

Dodatky a korekce ke skriptům Matematická analýza III

V tomto textu předkládáme dodatky ke skriptům *M. Krbálek, Matematická analýza III (třetí rozšířené vydání), Česká technika - nakladatelství ČVUT, Praha 2010.*

1 Korekce chyb

- Na straně 112 důsledek 4.4.14 říká, že pokud je wronskián alespoň pro jedno x nenulový, pak jsou funkce lineárně závislé (zde by mělo být nezávislé)
- na straně 112 (v poznámce k existenční větě) má být poslední rovnice ve tvaru

$$y_n(x) := y(x), y_{n-1}(x) := \frac{dy_1}{dx}, y_{n-2}(x) := \frac{dy_2}{dx}, \dots, y_1(x) := \frac{dy_{n-1}}{dx}.$$

1.1 Definice

Nechť A, B jsou libovolné množiny. *Kartézským součinem* množin A a B rozumíme množinu

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

1.2 Definice

Nechť je dán prehilbertovský prostor $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ nad tělesem \mathbf{C} a dva nenulové vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. *Úhlem* vektorů \vec{x}, \vec{y} budeme rozumět číslo

$$\angle(\vec{x}, \vec{y}) := \arccos \left(\frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}{\sqrt{\langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \langle \vec{y} | \vec{y} \rangle}} \right).$$

1.3 Lemma

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$ zavedený nad tělesem \mathbf{C} . Nechť je dána reálná funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ kladná na $\langle a, b \rangle$. Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_a^b f(x) g^*(x) w(x) dx \quad (1)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$.

1.4 Lemma

Nechť $a \in \mathbf{R}$. Nechť $\mathcal{C}_0(\langle a, +\infty \rangle)$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých a omezených na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$ zavedený nad tělesem \mathbf{C} . Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, +\infty \rangle)$, která je na $\langle a, +\infty \rangle$ integrabilní. Pak formule

$$\langle f(x) | g(x) \rangle_w := \int_a^\infty f(x) g^*(x) w(x) dx \quad (2)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}_0(\langle a, b \rangle)$.

1.5 Lemma

Nechť $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ je vektorový prostor všech komplexních funkcí $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ spojitých a omezených na \mathbf{R} zavedený nad tělesem \mathbf{C} . Nechť je dále dána kladná reálná funkce $w(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, která je na \mathbf{R} integrabilní. Pak formule

$$\langle f(x)|g(x) \rangle_w := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)w(x) \, dx \quad (3)$$

splňuje axiomy skalárního součinu na $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$.

2 Dodatek ke kapitole o bilineárních a kvadratických formách

2.1 Definice

Nechť je dána r -dimenzionální bilineární, popř. kvadratická forma s maticí \mathbb{A} , jež má hodnotu rovnou číslu $s \in \hat{r}$. Nechť jsou vlastní čísla matice \mathbb{A} uspořádána následovně. Pro $i \in \hat{r} \setminus \hat{s}$ nechť $\lambda_i = 0$ a pro $i \in \hat{s}$ nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$. Pak vektor

$$\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$$

budeme nazývat (*uspořádaným*) *vektorovým spekrem* bilineární/kvadratické formy.

2.2 Definice

Nechť je dána matice \mathbb{A} . Nechť $\vec{\sigma}(\mathbb{A}) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ je její vektorové spektrum. Pak matici $\mathbb{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ budeme nazývat *kanonickou maticí* přidruženou k matici \mathbb{A} .

3 Dodatek ke kapitole o skalárním součinu

3.1 Definice

Řekneme, že funkce $f(x)$ je *komplexní funkcí reálné proměnné*, pokud $\text{Dom}(f) \subset \mathbf{R}$ a $\text{Ran}(f) \subset \mathbf{C}$.

3.2 Poznámka

Symbol $\mathcal{R}(M)$ bude reprezentovat množinu všech funkcí $g(x)$, pro něž existuje Riemannův integrál $(\mathcal{R}) \int_M g(x) \, dx$ a je konečný, tj.

$$\mathcal{R}(M) = \left\{ g(x) : M \mapsto \mathbf{R} : (\mathcal{R}) \int_M g(x) \, dx \in \mathbf{R} \right\}.$$

3.3 Definice

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\text{Re}(f(x)), \text{Im}(f(x)) \in \mathcal{R}(M)$. Pak definujeme

$$\int_M f(x) \, dx := (\mathcal{R}) \int_M \text{Re}(f(x)) \, dx + i (\mathcal{R}) \int_M \text{Im}(f(x)) \, dx.$$

3.4 Lemma

Nechť $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné a $M \subset \mathbf{R}$. Nechť $\operatorname{Re}(f(x)), \operatorname{Im}(f(x)) \in \mathcal{R}(M)$. Pak

$$\int_M f^*(x) \, dx = \left[\int_M f(x) \, dx \right]^*.$$

3.5 Věta – o funkcionálním skalárním součinu

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \left\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} : \operatorname{Re}(f(x)), \operatorname{Im}(f(x)) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \right\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem \mathbf{C} . Pak zobrazení

$$\langle f|g \rangle := \int_a^b f(x)g^*(x) \, dx$$

definované na \mathcal{V} reprezentuje skalární součin, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

Důkaz:

- nejprve dokážeme, že pro libovolné $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$ definiční integrál existuje a je konečný
- snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f)) (\operatorname{Re}(g) - i \operatorname{Im}(g)) \, dx &= \int_a^b (\operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) + \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g)) \, dx + \\ &+ i \int_a^b (\operatorname{Im}(f)\operatorname{Re}(g) - \operatorname{Re}(f)\operatorname{Im}(g)) \, dx \end{aligned}$$

- jelikož jsou oba integrandy spojitými funkcemi na kompaktu $\langle a, b \rangle$, oba integrály existují a jsou konečné
- tedy $\langle f|g \rangle \in \mathbf{C}$ pro každé $f(x), g(x) \in \mathcal{V}$
- levou linearitu, tedy první axiom skalárního součinu, prokážeme sérií následujících úprav

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + \alpha h)g^* \, dx &= \int_a^b (f + \alpha h)\operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b (f + \alpha h)\operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f) + \alpha \operatorname{Re}(h) + \alpha i \operatorname{Im}(h))\operatorname{Re}(g) \, dx - \\ &- i \int_a^b (\operatorname{Re}(f) + i \operatorname{Im}(f) + \alpha \operatorname{Re}(h) + \alpha i \operatorname{Im}(h))\operatorname{Im}(g) \, dx = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h)\operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx + i\alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h)\operatorname{Re}(g) \, dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx - i\alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h)\operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h)\operatorname{Im}(g) \, dx = \\
& = \int_a^b \operatorname{Re}(f)g^*(x) \, dx + \alpha \int_a^b \operatorname{Re}(h)g^*(x) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)g^*(x) \, dx + i\alpha \int_a^b \operatorname{Im}(h)g^*(x) \, dx = \\
& = \int_a^b f(x)g^*(x) \, dx + \alpha \int_a^b h(x)g^*(x) \, dx
\end{aligned}$$

- jako další chod tohoto důkazu nabízíme ověření hermiticity

$$\begin{aligned}
\langle f|g \rangle & = \int_a^b f(x)g^*(x) \, dx = \int_a^b f(x)\operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b f(x)\operatorname{Im}(g) \, dx = \\
& \int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx = \\
& = \left[\int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx - i \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b \operatorname{Re}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx + \int_a^b \operatorname{Im}(f)\operatorname{Im}(g) \, dx \right]^* = \\
& = \left[\int_a^b f^*(x)\operatorname{Re}(g) \, dx + i \int_a^b f^*(x)\operatorname{Im}(g) \, dx \right]^* = \left[\int_a^b f^*(x)g(x) \, dx \right]^* = \langle g|f \rangle^*
\end{aligned}$$

- pro argumentaci, že hodnota $\langle f|f \rangle$ je nulová právě tehdy, když $f(x)$ je striktně nulová funkce, je třeba si uvědomit, že

$$\int_a^b f(x)f^*(x) \, dx = \int_a^b (\operatorname{Re}^2(f) + \operatorname{Im}^2(f)) \, dx = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

- aby integrál $\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$ z reálné funkce, která je nezáporná a (vzhledem k předpokladům věty) spojitá, byl nulový, musí nutně $|f(x)| = 0$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$
- to ale může nastat jedině tehdy, když $f(x) = 0$ na $\langle a, b \rangle$
- tím je prokázáno naplnění axiomu pozitivní definitnosti, a $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem

3.6 Důsledek – o funkcionálním skalárním součinu s vahou

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a

$$\mathcal{V} = \left\{ f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{C} : \operatorname{Re}(f(x)), \operatorname{Im}(f(x)) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle) \right\}$$

je funkcionální vektorový prostor nad tělesem \mathbf{C} . Nechť $w(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ je kladná funkce na $\langle a, b \rangle$. Pak zobrazení

$$\langle f|g \rangle_w := \int_a^b f(x)g^*(x)w(x) \, dx$$

definované na \mathcal{V} reprezentuje skalární součin s vahou $w(x)$, a dvojice $\{\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle_w\}$ je tudíž prehilbertovským prostorem.

4 Dodatek k ekvivalenci metrik

V celé sekci předpokládáme, že je dán vektorový prostor \mathcal{V} nad \mathbf{C} konečné dimenze $\dim(\mathcal{V}) = n$, v němž je zvolena pevná ale libovolná báze $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$. Souřadnice libovolného vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ v bázi \mathcal{X} označme $\omega_k \in \mathbf{C}$, tj. $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k$.

4.1 Věta

Zobrazení $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$, které každému vektoru $\vec{x} \in \mathcal{V}$ přiřazuje číslo

$$\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} := \sum_{k=1}^n |\omega_k|$$

splňuje axiomy normy.

Důkaz:

- norma $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$ je nulová právě tehdy, když všechny $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ jsou nulové, což může nastat pouze pro nulový vektor, čímž je naplněn axiom nulovosti
- pro každé $\lambda \in \mathbf{C}$ a $\vec{x} \in \mathcal{V}$ platí, že

$$\|\lambda \vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \left\| \lambda \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\lambda \omega_k) \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\lambda \omega_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^n |\omega_k| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$$

- proto je splněn také axiom homogenity
- axiom trojúhelníkové nerovnosti prokážeme sérií následujících úprav

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k + \sum_{k=1}^n \varkappa_k \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{k=1}^n (\omega_k + \varkappa_k) \vec{\varepsilon}_k \right\|_{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^n |\omega_k + \varkappa_k| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |\omega_k| + \sum_{k=1}^n |\varkappa_k| = \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\vec{y}\|_{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

kde bylo využito faktu, že nerovnost $|a + b| \leq |a| + |b|$ platí pro každá komplexní $a, b \in \mathbf{C}$

4.2 Definice

Normu $\|\cdot\|_{\mathcal{X}} : \mathcal{V} \mapsto \mathbf{R}_0^+$ z věty 4.1 nazýváme *souřadnicovou normou v bázi $\mathcal{X} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$* , nebo krátce *souřadnicovou normou*.

4.3 Lemma

Relace *býti ekvivalentní* (označme ji symbolem \triangleq) je ve třídě všech norem zavedených nad týmž vektorovým prostorem \mathcal{V}

- a) *reflexivní*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- b) *symetrická*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \Rightarrow \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_1$,
- a) *tranzitivní*, tj. $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2 \wedge \|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_3 \Rightarrow \|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_3$.

4.4 Věta

Pro každé \vec{x} z normovaného prostoru $\{V, \|\cdot\|\}$ s libovolnou normou platí nerovnost

$$\|\vec{x}\| \leq \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|.$$

Důkaz:

- snadno:

$$\|\vec{x}\| = \left\| \sum_{k=1}^n \omega_k \vec{\varepsilon}_k \right\| \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \sum_{k=1}^n \|\omega_k \vec{\varepsilon}_k\| \stackrel{\textcircled{2}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \|\vec{\varepsilon}_k\| \stackrel{\textcircled{3}}{\leq} \sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$$

- v odvození bylo využito **1** axiomu trojúhelníkové nerovnosti, **2** axiomu homogenity a nakonec také **3** rovnosti $\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k$ platné pro libovolná nezáporná čísla

4.5 Věta

Pro libovolnou normu v normovaném prostoru $\{V, \|\cdot\|\}$ existuje číslo $\mu \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$, pro něž $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, je $\|\vec{x}\| \geq \mu$.

Důkaz:

- předpokládejme naopak, že pro všechny $\mu \in \mathbf{R}^+$ existuje vektor takový, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\| \leq \mu$
- je-li ale $\|\vec{x}\|$ menší než libovolné kladné číslo μ , pak zjevně $\|\vec{x}\| = 0$, odkud plyne, že $\vec{x} = \vec{0}$
- to je ale ve sporu s faktem, že $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = 1$, protože podle axiomu nulovosti nemůže nulový vektor mít nenulovou normu

4.6 Věta

Všechny normy zkonstruované nad \mathcal{V} jsou ekvivalentní se souřadnicovou normou $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$.

Důkaz:

- podle definice ekvivalence norem je třeba pro libovolně zvolenou normu $\|\cdot\|$ dokázat, že $\|\cdot\| \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, tedy, že existují čísla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ tak, že pro všechny $\vec{x} \in \mathcal{V}$:

$$\|\vec{x}\| \leq \alpha \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \quad \wedge \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \beta \|\vec{x}\|$$

- z povahy definice ekvivalence norem je zřejmé, že není třeba se zabírat vektorem $\vec{x} = \vec{0}$, proto ho z následujících odvození vyjmeme

- z věty 4.4 vyplývá, že

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |\omega_k| \cdot \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|}{\sum_{k=1}^n |\omega_k|} = \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|,$$

kde číslo $\sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$ je nezávislé na volbě \vec{x} , neboť se jedná o konečný součet norem vektorů pevně zvolené báze ve \mathcal{V}

- za hledané α z definice ekvivalence norem lze tedy klást $\alpha := \sum_{k=1}^n \|\vec{\varepsilon}_k\|$
- pak totiž $\|\vec{x}\| \leq \alpha \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}$
- pro důkaz druhé nerovnosti nejprve uvažme, že pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existují číslo $\sigma > 0$ a vektor $\vec{x}_0 \in \mathcal{V}$ tak, že $\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}} = 1$ a $\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} = \|\sigma \vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}$
- pro libovolné $\vec{x} \in \mathcal{V} \setminus \{\vec{0}\}$ tedy nalezneme σ a \vec{x}_0 dle předchozího a provedeme sérii těchto úprav založených na substituci $\vec{x} = \sigma \vec{x}_0$:

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\sigma \vec{x}_0\|}{\|\sigma \vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \frac{\|\vec{x}_0\|}{\|\vec{x}_0\|_{\mathcal{X}}} = \|\vec{x}_0\|$$

- hodnota $\|\vec{x}_0\|$ je ale podle věty 4.5 omezena zdola univerzální hodnotou $\mu > 0$ nezávislou na volbě \vec{x}_0 , a tedy nezávislou na volbě \vec{x}
- proto

$$\frac{\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|_{\mathcal{X}}} \geq \mu \quad \Rightarrow \quad \|\vec{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{\|\vec{x}\|}{\mu} =: \beta \|\vec{x}\|,$$

což bylo dokázat

4.7 Věta – o ekvivalenci všech norem

Je-li dimenze normovaného prostoru \mathcal{V} konečná, jsou každé dvě normy na \mathcal{V} ekvivalentní.

Důkaz:

- zvolme tedy dvě normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ zavedené na týmž vektorovém prostoru \mathcal{V}
- podle věty 4.6 platí, že $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ a $\|\cdot\|_2 \triangleq \|\cdot\|_{\mathcal{X}}$
- jelikož je ale relace ekvivalence podle lematu 4.3 symetrická a tranzitivní, vyplývá odsud, že také $\|\cdot\|_1 \triangleq \|\cdot\|_2$, což dokládá platnost tvrzení