Obsah

1 Třídy hustot a jejich vlastnosti **3**
1.1 Zavedení třídy hustot $\mathscr{H}$ . . . 3
1.2 Zavedení třídy balancovaných hustot $\mathscr{B}$ . . . 6
1.3 Laplaceova transformace na třídě $\mathscr{B}$ . . . 15

Kapitola 1

Třídy hustot a jejich vlastnosti

V této kapitole jsou kromě původních odvození citovány také informace získané ze zdrojů [4], [5] a [6]. Z výsledků výzkumu zjišťujeme, že v jednorozměrných krátkodosahových i středodosahových systémech splňují pravděpodobnostní rozdělení rozestupů tzv. balanční kritérium. Balančním kritériem je myšleno, že chvost příslušné hustoty pravděpodobnosti se chová jako klesající exponenciála e^{-kx}. Proto je výhodné zavést ve třídě hustot novou podtřídu, jejiž prvky budou mít balancovaný chvost.

1.1 Zavedení třídy hustot $\mathscr{H}$

Před zavedením třídy balancovaných hustot je zapotřebí zavést obecnou třídu hustot $\mathscr{H}$. Budeme pracovat s klasickou jednorozměrnou Lebesgueovou mírou $\mu(x) = \lambda(x)$ (viz skripta [6]), tedy vytvořující funkcí této míry bude $\varphi(x) = x$. Dále budeme počítat s jednorozměrnými hustotami, tudíž prostor s úplnou a σ-konečnou mírou budeme volit jako

$$\{\mathbb{R}, \lambda_1(x), \mathscr{D}\},$$

kde $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}_\lambda$ je tzv. borelovský uzávěr všech otevřených množin v $\mathbb{R}$. $\mathscr{D}$ je podle teorie rovněž σ-algebra, jejímž prezidentem je množina $\mathbb{R}$.

Definice 1.1.1 (Třída hustot)**.** Funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **hustotou**, pokud současně splňuje:

1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$,
3. $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Třídu všech hustot označíme $\mathscr{H}$. Pro libovolnou $f(x) \in \mathscr{H}$ definujeme tzv. **hustotní normu** $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x$. O $f(x) \in \mathscr{H}$ řekneme, že je **normovaná hustota**, pokud je její hustotní norma rovna jedné. Třídu všech normovaných hustot označíme $\mathscr{H}'$.

Definice 1.1.2 (Moment přidružený k hustotě $f(x)$)**.** Nechť je dána hustota $f(x) \in \mathscr{H}$ a číslo $n \in \mathbb{N}_0$. Pokud $x^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, pak **n-tým momentem** přidruženým k hustotě $f(x)$ nazveme číslo:

$$\mu_n(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Definice 1.1.3 (Centrální moment přidružený k hustotě $f(x)$)**.** Nechť je dána hustota $f(x) \in \mathscr{H}$, pro níž existuje první moment μ_1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $(x - \mu_1)^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. Pak **centrálním momentem** hustoty $f(x)$ nazveme číslo:

$$\nu_n(f) \equiv \int_{\mathbb{R}} (x - \mu_1)^n f(x) \mathrm{d}x.$$

Věta 1.1.4 (Věta o rozsáhlosti třídy $\mathscr{H}$)**.** *$\mathscr{H}$ je uzavřená na sčítání a násobení číslem, a navíc pro $\forall a \in \mathbb{R} \setminus 0, \forall c \in \mathbb{R}$ platí:*

$$f(x) \in \mathscr{H} \implies f(ax + c) \in \mathscr{H}.$$

Definice 1.1.5 (Afinní sdruženost)**.** Existuje-li $a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R}$ tak, že všude v $\mathbb{R}$ platí rovnost $g(x) = |a| \cdot f(ax + b)$. Pak řekneme, že hustoty $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ jsou **afinně sdružené**.

Věta 1.1.6 (Existence konvoluce)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$. Pak $\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y$ existuje pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$. Je-li navíc funkce $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$ dodefinována nulou tam, kde uvedený integrál neexistuje, pak $h(x) \in \mathscr{H}$.*

Důkaz. Díky $f(x) \in \mathscr{H}$ víme, že: $H(x, y) = f(y)g(x - y) \geq 0$ a zároveň $f(x), g(x) \in \Lambda_\lambda$ tj. jsou λ-měřitelné, díky tomu $H(x, y) \in \mathscr{L}^\star(\mathbb{R}^2)$, z čehož víme, že $\int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)\mathrm{d}x$ existuje a lze použít Fubiniovu větu, jejíž předpoklady jsou takto ověřeny.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} H(x, y)\mathrm{d}(x, y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\mathrm{d}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x - y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \\
= |z = x - y| = \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} g(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \\
= \int_{\mathbb{R}} g(z)\mathrm{d}z \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

U poslední rovnosti vycházíme z toho, že $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$, tudíž platí i $f(x), g(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.
Jako důsledek Fubiniovy věty víme, že $\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y$ existuje skoro všude na $\mathbb{R}$.
Po dodefinování nulou pak platí, že $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{Ran}(h) = \mathbb{R}_0^+$.
Jelikož $\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je tedy funkce $h(x)$ integrabilní, tudíž všechny axiomy třídy $\mathscr{H}$ jsou splněny a platí, že $h(x) \in \mathscr{H}$. □

Definice 1.1.7 (Konvoluce)**.** Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$. Pak funkci

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\mathrm{d}y,$$

která je dodefinovaná nulou v bodech, v nichž integrál případně neexistuje, nazýváme konvolucí funkcí $f(x)$ a $g(x)$.

Věta 1.1.8 (Vlastnosti konvoluce)**.** *Operace konvoluce je na $\mathscr{H}$:*

1. *komutativní,*
2. *bilineární,*
3. *asociativní.*

Důkaz. Uvažujme libovolné $g(x),\ f(x), h(x) \in \mathscr{H}$.

1.
$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = |z = x - y| = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)\mathrm{d}z = (g \star f)(x).$$

2.
$$((f+h) \star g) = \int_{\mathbb{R}} (f(y) + h(y))g(x-y)\mathrm{d}y = (f \star g)(x) + (h \star g)(x).$$

3.
$$(\overbrace{(f \star g)}^{\omega(x)} \star h)(x) = \int_{\mathbb{R}} \omega(\alpha)\, h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(\alpha)g(\beta)h(x-\alpha-\beta)\mathrm{d}(\alpha,\beta) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)g(y-z)h(x-y-z+z)\mathrm{d}(z,y) = ((f \star g) \star h)(x),$$

kde byla použita vhodná substituce: $z = \alpha$ a $y - z = \beta$, jejíž Jakobián je jednotkový.

□

Věta 1.1.9 (Zjednodušení definičního předpisu pro hustoty s pozitivním nosičem)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ a mají pozitivní nosič. Pak:*

1. *$f(x) = \theta(x)f(x)$,*
2. *$g(x) = \theta(x)g(x)$,*
3. *$(f \star g) = \theta(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$,*
4. *$(f \star g)$ má rovněž pozitivní nosič.*

Důkaz. Víme, že funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ mají pozitivní nosič. Zároveň připomeňme definici Heavisideovy funkce:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vynásobením Heavisideovou funkcí se původní funkce s pozitivním nosičem nezmění. Zápis $f(x) = \theta(x)f(x)$ a $g(x) = \theta(x)g(x)$ je tedy korektní.
$(f \star g)(x)$ tedy lze za daných předpokladů upravit na:

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \theta(y)f(y)\theta(x-y)g(x-y)\mathrm{d}y = \theta(x)\int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y,$$

kde lze korigovat integrační meze díky definici Heavisideovy funkce. Zároveň je z této úpravy vidět, že funkce $(f \star g)(x)$ má také pozitivní nosič. □

Věta 1.1.10 (Konvoluce a posuny v argumentech)**.** *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{H}$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak:*

1.
$$f(x+b), g(x+b), (f \star g)(x+b) \in \mathscr{H},$$

2.
$$f(x+b) \star g(x) = f(x) \star g(x+b) = (f \star g)(x+b),$$

3.
$$f(x+a) \star g(x+b) = f \star g(x+a+b).$$

1.2 Zavedení třídy balancovaných hustot $\mathscr{B}$

Definice 1.2.1 (Balancovaná hustota)**.** O $\lambda-$měřitelné funkci $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prohlásíme, že je **balancovanou hustotou** (hustotou s balancovaným chvostem), pokud současně splňuje následující axiomy:

1. $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$,
2. $\mathrm{Ran}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$,
3. $\mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$,
4. $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$,
5. $f(x)$ je po částech spojitá na $\mathbb{R}$, tj. $f(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$,
6. platí tzv. **balanční kritérium**: $\exists \omega > 0$:

$$\begin{aligned} \alpha > \omega : \lim_{x\to\infty} f(x)\mathrm{e}^{\alpha x} &= +\infty \\ \alpha < \omega : \lim_{x\to\infty} f(x)\mathrm{e}^{\alpha x} &= 0. \end{aligned}$$

Definice 1.2.2 (Třída balancovaných hustot)**.** Třídu všech balancovaných hustot označíme symbolem $\mathscr{B}$, číslo ω jednoznačně určené definicí 1.2.1 nazveme balančním indexem a označíme $\mathrm{inb}(f) = \omega$. Třídu všech normovaných balancovaných hustot označíme $\mathscr{B}'$.

Díky balančnímu kritériu víme, že bude platit implikace

$$f(x) \in \mathscr{B} \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

protože z definice vidíme, že mezi všemi $\alpha < \omega$ bude určitě i 0, z čehož plyne, že pro nulu platí limita z druhého bodu balančního kritéria, tedy bude platit $\lim_{x\to\infty} f(x)\mathrm{e}^{0\cdot x} = \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot 1 = 0$.

Dále díky vlastnosti $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ pro jakoukoliv množinu $A \in \mathscr{D} \subset \mathscr{M}_\lambda$ platí, že $f(x) \in \mathscr{L}(A)$, protože:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\setminus A} f(x)\mathrm{d}x,$$

kde $\mathbb{R}\setminus A \in \mathscr{M}_\lambda$ díky σ-aditivitě Lebesgueovy σ-algebry $\mathscr{M}_\lambda$, a jsou navíc splněny i předpoklady z věty o aditivitě Lebesguova integrálu, tedy že alespoň jedna strana existuje a zároveň $A \uplus \mathbb{R}\setminus A = \mathbb{R}$. Proto je jakákoliv balancovaná hustota integrabilní přes jakoukoli měřitelnou množinu.

Věta 1.2.3 (o rozsáhlosti třídy $\mathscr{B}$). *$\mathscr{B}$ je uzavřená na násobení kladným skalárem, na sčítání, a navíc $\forall f(x), g(x) \in \mathscr{B}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall c > 0, \forall \alpha \geq 0$ platí:*

1. $x^{\alpha} f(x) \in \mathscr{B}$,
2. $e^{\beta x} f(x) \in \mathscr{B}$, *pokud* $\beta < \mathrm{inb}(f)$,
3. $f(x)g(x) \in \mathscr{B}$, *pokud* $f(x)g(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$,
4. $\alpha f(cx) \in \mathscr{B}$.

A pokud jsou funkce integrabilní, pak platí:

1. $\mathrm{inb}(\alpha f(x)) = \mathrm{inb}(f)$,
2. $\mathrm{inb}(f(x) + g(x)) = min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}$,
3. $\mathrm{inb}(x^{\alpha} f(x)) = \mathrm{inb}(f)$,
4. $\mathrm{inb}(e^{\beta x} f(x)) = \mathrm{inb}(f) - \beta$,
5. $\mathrm{inb}(f(x)g(x)) = \mathrm{inb}(f) + \mathrm{inb}(g)$,
6. $\mathrm{inb}(f(cx)) = c \cdot \mathrm{inb}(f)$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že všechny funkce jsou integrabilní na celém $\mathbb{R}$ (pokud už tak není uvedeno v předpokladu věty). Potřebujeme ukázat, že $x^{\alpha} f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, tedy rozdělíme $\mathbb{R}$ na tři intervaly a na každém ověříme, zda je integrabilní.
Pro $x \in (-\infty, 0)$ z podmínky $\mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$ víme, že $x^{\alpha} f(x) \in \mathscr{L}((-\infty, 0))$.
Dále pro $x \in \langle 0, x_0)$ lze omezit $|x^{\alpha} f(x)| \leq K f(x)$, kde K je $\max_{x \in \langle 0, x_0)} x^{\alpha}$, tedy $x^{\alpha} f(x) \in \mathscr{L}(\langle 0, x_0))$.
Nakonec pro $x \in \langle x_0, +\infty)$ víme, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, a zároveň víme, že existuje rostoucí exponenciála, pro kterou platí, že $\lim_{x\to+\infty} e^{\beta x} f(x) = 0$, a protože polynom roste pomaleji než exponenciála, víme $x^{\alpha} f(x) \in \mathscr{L}\langle x_0, +\infty)$, neboť

$$|x^{\alpha} f(x)| \leq |e^{\beta x} f(x)| \xrightarrow{x\to+\infty} 0.$$

Nyní je třeba ukázat, že $e^{\beta x} f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. $\mathbb{R}$ rozdělíme na vhodné intervaly a dokážeme, že na nich je funkce integrabilní.
Pro $x \in (-\infty, 0)$ víme z podmínky $\mathrm{supp}(f) \subset \mathbb{R}_0^+$, že $e^{\beta} f(x) \in \mathscr{L}((-\infty, 0))$.
Pokud bereme $x \in \langle 0, x_0)$, pak lze funkci omezit $|e^{\beta} f(x)| \leq K f(x)$, kde K je $\max_{x\in\langle 0, x_0)} e^{\beta x}$, tedy platí, že $e^{\beta x} f(x) \in \mathscr{L}(\langle 0, x_0)$.
U posledního případu $x \in \langle x_0, +\infty)$ využijeme předpokladu, že $\beta < \mathrm{inb}(f)$, tedy víme, že platí $\lim_{x\to+\infty} e^{\beta x} f(x) = 0$, díky tomu i $e^{\beta x} f(x) \in \mathscr{L}\langle x_0, +\infty)$.
U $\alpha f(cx)$ víme, že integrabilní funkce zůstává integrabilní i po násobení kladným skalárem, a zároveň pokud je $f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, pak i $f(cx) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.
Při dokazování platnosti balančního kritéria nalezneme přímo i balanční index:

1. Označíme $h(x) = \alpha f(x)$, kde $\mathrm{inb}(f) = \omega > 0$

$$\varkappa > \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)e^{\varkappa x} = \alpha \lim_{x\to+\infty} f(x)e^{\varkappa x} = +\infty,$$
$$\varkappa < \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)e^{\varkappa x} = \alpha \lim_{x\to+\infty} f(x)e^{\varkappa x} = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Tedy z výpočtu je zřejmé, že $\mathrm{inb}(\alpha f(x)) = \mathrm{inb}(f)$.

2. Nyní označíme $h(x) = f(x) + g(x)$, kde $\mathrm{inb}(f) = \omega_1 > 0, \mathrm{inb}(g) = \omega_2 > 0$ a bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\omega_1 \leq \omega_2$

$$\begin{aligned}\varkappa < \omega_1 : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x))\mathrm{e}^{\varkappa x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} + \lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} = +\infty,\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti využíváme toho, že známe hodnotu limity $f(x)$ a na hodnotě limity $g(x)$ nezáleží, neboť jistě nemůže být menší než nula.

$$\begin{aligned}\varkappa > \omega_1 : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)]\,\mathrm{e}^{\varkappa x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} + \lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} = 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Víme, že $\omega_1 \leq \omega_2$, tedy pokud $\varkappa > \omega_1$, pak i $\varkappa > \omega_2$, a tedy balanční kritérium platí, a pro balanční index platí: $\mathrm{inb}(f(x) + g(x)) = \min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}$.

3. Označíme $h(x) = x^\alpha f(x)$, kde $\mathrm{inb}(f) = \omega > 0$.
Víme: $\eta > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}^+ : x > x_0 : x^\alpha < \mathrm{e}^{\eta x}$, tzn. od jistého x_0 exponenciála převáží polynom. Dále

$$\varkappa > \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} = +\infty,$$

kde v poslední rovnosti násobíme polynom jdoucí do nekonečna exponenciálou se základem větším než jedna, tedy celá limita jde k nekonečnu. Analogicky:

$$\varkappa < \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} < \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\omega-\delta+\varkappa)x} = 0,$$

kde $(\omega-\delta+\varkappa) < \omega$ a exponenciála tedy klesá. δ jsme volili tak, aby $\varkappa < \delta < \omega$, a zároveň definujeme η z nerovnosti $x^\alpha < \mathrm{e}^{\eta x}$ jako: $\eta := \omega - \delta > 0$. Z výpočtu získáváme: $\mathrm{inb}(x^\alpha f(x)) = \mathrm{inb}(f)$.

4. Označme $h(x) = \mathrm{e}^{\beta x} f(x)$, kde $\mathrm{inb}(f) = \omega > 0$ a $\beta < \mathrm{inb}(f)$. Pak platí:

$$\begin{aligned}\varkappa > \omega - \beta : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\varkappa+\beta)x} = |\beta + \varkappa > \beta + \omega - \beta > \omega| = +\infty,\\ \varkappa < \omega - \beta : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\varkappa+\beta)x} = |\beta + \varkappa < \beta + \omega - \beta < \omega| = 0.\end{aligned}$$

Z výpočtu plyne, že naše volba balančního indexu byla správná, tedy platí:

$$\mathrm{inb}(\mathrm{e}^{\beta x} f(x)) = \mathrm{inb}(f) - \beta.$$

5. Označíme $h(x) = f(x)g(x)$, kde $\mathrm{inb}(h) = \omega > 0$, $\mathrm{inb}(f) = \omega_1 > 0$ a $\mathrm{inb}(g) = \omega_2 > 0$. Navíc označme $\alpha < \omega_1 < \gamma, \beta < \omega_2 < \delta$, a $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Pak

$$\begin{aligned}\varkappa \geq \gamma + \delta > \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} \leq \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{(\gamma+\delta)x} &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\gamma x} g(x)\mathrm{e}^{\delta x} = \\ &= +\infty,\\ \varkappa \leq \alpha + \beta < \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} \leq \lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x} &= \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\alpha x} g(x)\mathrm{e}^{\beta x} = \\ &= 0.\end{aligned}$$

Tedy platí, že $\mathrm{inb}(f(x)g(x)) = \mathrm{inb}(f) + \mathrm{inb}(g)$.

6. Pro $h(x) = f(cx)$, $c > 0$, kde $\mathrm{inb}(h) = \omega > 0$ a $\mathrm{inb}(f) = \gamma > 0$ bude platit:

$$\begin{aligned}
\varkappa > \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} f(cx)\mathrm{e}^{\varkappa x} = |y = cx| = \\
&= \lim_{y\to+\infty} f(y)\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{c}y} = |\frac{\varkappa}{c} > \gamma| = +\infty, \\
\varkappa < \omega : \lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} f(cx)\mathrm{e}^{\varkappa x} = |y = cx| = \\
&= \lim_{y\to+\infty} f(y)\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{c}y} = |\frac{\varkappa}{c} < \gamma| = 0.
\end{aligned}$$

Z výpočtu je vidět, že platí: $\mathrm{inb}(f(cx)) = c \cdot \mathrm{inb}(f)$.

Zbylé podmínky pro to, aby funkce patřily do $\mathscr{B}$, jsou splněny díky tomu, že $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$. □

Definice 1.2.4 (Balanční jádro hustoty)**.** Nechť $f(x) \in \mathscr{B}$ a $\mathrm{inb}(f) = \omega$. Pak funkci $g(x)$, kde $g(x) := f(x)\mathrm{e}^{\omega x}$, nazveme balančním jádrem hustoty $f(x)$.

Věta 1.2.5. *Je-li $g(x)$ lib. balanční jádro, pak $\forall\tau > 0$ platí, že $h(x) := g(x)\mathrm{e}^{-\tau x} \in \mathscr{B}$ a navíc* $\mathrm{inb}(h) = \tau$.

Důkaz.

Víme, že $g(x)$ je balanční jádro, tedy: $\exists f(x) \in \mathscr{B} : \mathrm{inb}(f) = \omega$ a $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\omega x}$. Nejprve dokážeme variantu, kdy $\alpha > \tau$. Tedy platí:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{(\alpha-\tau)x} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\omega+\varepsilon)x}\mathrm{e}^{(\alpha-\tau-\varepsilon)x} = +\infty,$$

ε volím tak, aby

$$\alpha - \tau - \varepsilon > 0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \alpha - \tau,$$

přičemž víme, že $\alpha - \tau > 0$. ε lze tedy volit tak, aby uvedená limita šla skutečně do nekonečna.
Ve variantě $\alpha < \tau$ platí:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\omega x}\mathrm{e}^{(\alpha-\tau)x} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{(\omega-\varepsilon)x}\mathrm{e}^{(\alpha-\tau+\varepsilon)x} = 0,$$

$\varepsilon > 0$ volím tak, aby

$$\alpha - \tau + \varepsilon < 0 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon < \alpha - \tau,$$

přičemž $\alpha - \tau > 0$. Takové ε tedy určitě existuje. Proto platí, že $\mathrm{inb}(h) = \tau$.

Pro dokázání, že $h(x) \in \mathscr{B}$, zbývá dokázat integrabilita, kterou dokážeme pomocí následujícího lemmatu 1.2.6. □

Věta 1.2.6 (Přípravné lemma pro Laplaceovu transformaci)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$ a* $\mathrm{inb}(g) = \varkappa$. *Pak platí:* $\forall\eta < \varkappa : g(x)\mathrm{e}^{\eta x} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Důkaz.

Víme, že $\lim_{x\to+\infty} g(x)\mathrm{e}^{\eta x} = 0$, což značí, že

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \langle x_0, +\infty)) : |g(x)\mathrm{e}^{\eta x}| < \varepsilon.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ víme z podmínky $\mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$, že $g(x)\mathrm{e}^{\eta x} \in \mathscr{L}((-\infty, 0))$. Na intervalu $\langle 0, x_0)$ lze funkci omezit $|g(x)\mathrm{e}^{\eta x}| < Kg(x)$, kde K je $\max_{x\in\langle 0,x_0\rangle} \mathrm{e}^{\eta x}$, tedy $g(x)\mathrm{e}^{\eta x} \in \mathscr{L}(\langle 0, x_0))$.
Pro $x \in \langle x_0, +\infty)$ volíme $\eta < \rho < \varkappa$ a využijeme srovnávacího kritéria pro Lebesgueův integrál:

$$g(x)\mathrm{e}^{\eta x} = g(x)\mathrm{e}^{\rho x}\mathrm{e}^{\eta-\rho x} \leq \varepsilon \cdot \mathrm{e}^{\eta-\rho x} \in \mathscr{L}\left\langle x_0, +\infty\right),$$

tedy i $g(x)\mathrm{e}^{\eta x} \in \mathscr{L}\left\langle x_0, +\infty\right)$.

Díky větě o konečné integrabilitě v mezích Lebesguova integrálu platí, že $g(x)e^{\eta x} \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$. $\square$

Věta 1.2.7 (O vzorci pro výpočet balančního indexu)**.** *Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak platí:*

$$\mathrm{inb}(g) = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(g(x))}{x},$$

přičemž limita vpravo vždy existuje.

Důkaz. Nejprve si zvolím α, β, pro která platí $\alpha < \omega$ a $\beta > \omega$, kde $\omega = \mathrm{inb}(g) > 0$.
Pro $\beta > \omega$ bude platit série nerovností

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)e^{\beta x} = +\infty, \text{ tedy } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{g(x)} = 0.$$

Díky tomu také platí:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists x_1 \in \mathbb{R}_0^+) : x > x_1 \implies e^{-\beta x} < \varepsilon g(x) \implies g(x) > \frac{1}{\varepsilon}e^{-\beta x} > e^{-\beta x}.$$

Pro $\alpha < \omega$ bude obdobně platit:
$\lim_{x\to+\infty} g(x)e^{\alpha x} = 0$ a díky tomu i:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists x_2 \in \mathbb{R}_0^+) : x > x_2 \implies g(x)e^{\alpha x} < \varepsilon \implies g(x) < \varepsilon e^{-\alpha x} < e^{-\alpha x}.$$

Od jistého $x_0 = \max\{x_1, x_2\}$ postupně platí:

$$\begin{aligned}
&e^{-\beta x} < g(x) < e^{-\alpha x},\\
&-\beta x < \ln(g(x)) < -\alpha x \text{ kde } x \gg 1,\\
&-\beta < \frac{\ln(g(x))}{x} < -\alpha.
\end{aligned}$$

Z věty o sevření dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(g(x))}{x} = -\omega = -\mathrm{inb}(g).$$

Podíl $\frac{\ln(g(x))}{x}$ lze tedy volbou α, β učinit libovolně blízkým číslu ω.

$\square$

Věta 1.2.8. *Nechť $f(x) \in \mathscr{B}$. Pak $f(x)$ má všechny momenty.*

Důkaz. Víme, že $x^\alpha f(x) \in \mathscr{B}$ pro všechna $\alpha \geq 0$, tedy pro $\forall n \in \mathbb{N}_0$ platí $x^n f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$, a díky tomu existují všechny integrály

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\mathrm{d}x = \mu_n$$

a jejich hodnoty jsou reálnými čísly.

$\square$

Věta 1.2.9. *$g(x) \in \mathscr{B}$. Označme $h(x) = \theta(x) \int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$. Pak $h(x) \in \mathscr{B}$, a navíc* $\mathrm{inb}(h) = \mathrm{inb}(g)$.

Důkaz. Nechť $\omega = \mathrm{inb}(g)$. Můžeme si zvolit libovolná $\varkappa, \eta$, pro která platí: $\varkappa < \omega$, $\eta : \varkappa < \eta < \omega$ a navíc si pevně zvolit $\varepsilon > 0$ tak, že bude jistě existovat x_0 takové, že:

$$x_0 \in \mathbb{R}^+ : x \geq x_0 \implies g(x)\mathrm{e}^{\eta x} < \varepsilon.$$

Pak pro libovolně zvolené $\varkappa < \omega$ platí:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} \theta(x) \int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{\varkappa x} \leq \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\varkappa x} \int_x^{+\infty} \varepsilon \cdot \mathrm{e}^{-\eta y}\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\varkappa x} \left[-\frac{\varepsilon}{\eta}\mathrm{e}^{-\eta y}\right]_x^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varepsilon}{\eta}\mathrm{e}^{(\varkappa-\eta)y} = 0,\end{aligned}$$

kde $(\varkappa - \eta) < 0$.

Pokud si tentokrát zvolíme $\varkappa, \eta$ tak, že $\varkappa > \omega$, $\eta : \varkappa > \eta > \omega$ a k tomu si pevně zvolíme $\varepsilon > 0$, pro které existuje x_0 takové, že:

$$x_0 \in \mathbb{R}^+ : x \geq x_0 \implies g(x)\mathrm{e}^{\eta x} \geq \varepsilon,$$

pak pro libovolně zvolené $\varkappa > \omega$ platí:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} h(x)\mathrm{e}^{\varkappa x} &= \lim_{x\to+\infty} \theta(x) \int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{\varkappa x} \geq \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\varkappa x} \int_x^{+\infty} \varepsilon \cdot \mathrm{e}^{-\eta y}\mathrm{d}y = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\varkappa x} \left[-\frac{\varepsilon}{\eta}\mathrm{e}^{-\eta y}\right]_x^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varepsilon}{\eta}\mathrm{e}^{(\varkappa-\eta)y} = +\infty,\end{aligned}$$

kde $(\varkappa - \eta) > 0$.

□

Věta 1.2.10. *Nechť $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$. Pak i $(f \star g) \in \mathscr{B}$, a navíc platí:*

$$\mathrm{inb}(f \star g) = \min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}.$$

Důkaz. Víme, že $(f \star g) = \theta(x) \int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$. Nejprve je nutná kontrola integrability:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (f \star g)(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\mathrm{z} = x - y| = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(\mathrm{z})\mathrm{d}\mathrm{z}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} g(\mathrm{z})\mathrm{d}\mathrm{z}.\end{aligned}$$

Víme, že $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$, tedy i $f(x), g(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$ a součin dvou integrabilních funkcí je také integrabilní. Postup byl korektní, protože byly splněny předpoklady Fubiniovy věty, a tedy šlo vytknout integrál. Proto platí, že $(f \star g) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Nyní je třeba ověřit balanční kritérium a z výpočtu nalézt balanční index.
Označme $\mathrm{inb}(f) = \omega_1 > 0, \mathrm{inb}(g) = \omega_2 > 0$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\omega_1 \leq \omega_2$. Nyní je třeba ještě definovat η_1, η_2, aby pro ně platilo $\varkappa < \eta_1 < \omega_1$, $\varkappa < \eta_2 < \omega_2$, a zároveň:

$$\varepsilon_1 > 0 \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}^+ : x \geq x_1 \implies f(x)\mathrm{e}^{\eta_1 x} < \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_2 > 0 \quad \exists x_2 \in \mathbb{R}^+ : x \geq x_2 \implies g(x)\mathrm{e}^{\eta_2 x} < \varepsilon_2.$$

Zvolíme si libovolně $\varkappa < \omega_1$, pro které musí nutně platit:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\varkappa x}\int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y < \lim_{x\to+\infty} e^{(\varkappa-\eta_2)x}\varepsilon_1\varepsilon_2\int_0^x e^{(\eta_1-\eta_2)y}\mathrm{d}y =$$
$$= \varepsilon_1\varepsilon_2\lim_{x\to+\infty} e^{(\varkappa-\eta_2)x}\left[e^{(\eta_1-\eta_2)x}-1\right] = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\eta_2-\eta_1}\lim_{x\to+\infty}\left[e^{(\varkappa-\eta_1)x}-e^{(\varkappa-\eta_2)x}\right] = 0.$$

Zde využijeme toho, že

$$\varkappa-\eta_1<0 \quad\wedge\quad \varkappa-\eta_2<0,$$

což určitě platí díky způsobu, kterým jsme volili $\varkappa$.

Definujeme dále ρ_1, kde $\varkappa > \rho_1 > \omega_1$ tak, aby pro libovolné $\varepsilon_3 > 0$ platilo:

$$\varepsilon_3 > 0 \quad \exists x_3 \in \mathbb{R}^+ : x \geq x_3 \implies f(x)e^{\rho_1 x} > \varepsilon_3.$$

Nyní si zvolíme číslo $\varkappa > \omega_1$, pro které bude platit:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\varkappa x}\int_0^x f(y)g(x-y)\mathrm{d}y = |z = x-y| = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(x-z)g(z)\mathrm{d}z >$$
$$> \lim_{x\to+\infty} e^{\varkappa x}\int_0^x \varepsilon_3 e^{\rho_1(x-z)}g(z)\mathrm{d}z =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{(\varkappa-\rho_1)x}\int_0^x \varepsilon_3 e^{\rho_1 z}g(z)\mathrm{d}z = +\infty.$$

Víme, že $e^{(\varkappa-\rho_1)x}$ diverguje pro $x\to\infty$ do nekonečna, protože $\varkappa-\rho_1 > 0$. Získáváme vztah pro balanční index: $\mathrm{inb}(f\star g) = \min\{\mathrm{inb}(f),\mathrm{inb}(g)\}$. Zbylé axiomy třídy $\mathscr{B}$ jsou splněny triviálně díky tomu, že $f(x), g(x)\in\mathscr{B}$. Tedy platí, že $(f\star g)\in\mathscr{B}$.

□

Z předchozí věty plyne důležité zjištění, že chování chvostu konvoluce je určeno chováním chvostu funkce s menším balančním indexem.

Věta 1.2.11. *Nechť $g(x)\in\mathscr{B}$. Označme $h(x) = \theta(x)\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$. Pak $h(x)$ je neklesající, omezená, nezáporná, spojitá a $\lim_{x\to\infty} h(x)\in\mathbb{R}$. Navíc $\forall\tau>0$ platí, že $h(x)e^{-\tau x}\in\mathscr{B}$ a $\mathrm{inb}(h(x)e^{-\tau x}) = \tau$.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\theta(n-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{d}y\in\mathbb{R},$$

kde integrabilní majorantou k integrandu nezávislou na n je díky nerovnosti

$$|\,\theta(n-y)g(y)\,| \leq g(y)$$

právě funkce $g(y)$. Bez újmy na obecnosti zvolíme $x_1 > x_2 > 0$. Pak tedy

$$h(x_1) = \int_0^{x_1} g(y)\mathrm{d}y = \underbrace{\int_0^{x_2} g(y)\mathrm{d}y}_{h(x_2)} + \underbrace{\int_{x_2}^{x_1} g(y)\mathrm{d}y}_{\geq 0} \implies h(x_2)\leq h(x_1).$$

Pro důkaz spojitosti chceme, aby platilo: $\lim_{x\to a} h(x) = h(a)$. Je jasné, že vztah bude platit pro $a\leq 0$, protože funkce je nulová. Pro $a>0$ je třeba limitu rozepsat:

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}\theta(x)\int_0^x g(y)\mathrm{d}y = \lim_{x\to a}\int_{\mathbb{R}}\theta(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\theta(a-y)g(y)\mathrm{d}y = h(a).$$

V předposlední rovnosti byla provedena záměna limity a integrálu, která je korektní, protože existuje integrabilní majoranta, jak už bylo ukázáno v prvním bodě důkazu. Omezenost funkce vychází z předchozích, již dokázaných vlastností. Z předchozích vlastností navíc také plyne, že funkce $h(x)$ je balančním jádrem, tedy platí věta 1.2.5 a podle ní

$$\forall\tau > 0 : \quad h(x)\mathrm{e}^{-\tau x} \in \mathscr{B} \quad \wedge \quad \mathrm{inb}(h(x)\mathrm{e}^{-\tau x}) = \tau.$$

□

Definice 1.2.12 (Distribuční funkce)**.** Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak funkci $G(x) = \theta(x)\int_0^x g(y)\mathrm{d}y$ nazýváme distribuční funkcí příslušnou k hustotě $g(x)$.

Definice 1.2.13 (Chvostová distribuční funkce)**.** Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$. Pak funkci $h(x) = \theta(x)\int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ nazýváme chvostovou distribuční funkcí příslušnou k hustotě $g(x)$.

Věta 1.2.14. *$f(x), g(x) \in \mathscr{B}$. Nechť dále $f'(x), g'(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ a nechť alespoň jedna z derivací je omezenou funkcí. Pak platí:*

$$f'(x) \star g(x) = f(x) \star g'(x) = (f \star g)'(x).$$

Důkaz.

Víme, že: $f(x), g(x), f'(x), g'(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$, tedy všechny konvoluce budou existovat. Navíc lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že funkce f'(x) je omezená.

$$\begin{aligned} f'(x) \star g(x) &= \int_{\mathbb{R}} f'(y)g(x-y)\mathrm{d}y = |\text{per partes}| = \\ &= [g(x-y)f(y)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} f(y)g'(x-y)\mathrm{d}y = f(x) \star g'(x). \end{aligned}$$

V předposlední rovnosti byla použita metoda per partes, kde derivace $g(x-y)$ podle y byla rovna: $\frac{\mathrm{d}g(x-y)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}g(x-y)}{\mathrm{d}(x-y)}\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}g(x-y)}{\mathrm{d}(x-y)}$. Metoda mohla být použita díky předpokladu omezenosti alespoň jedné derivace, tedy platí $|\ f'(y)g(x-y)\ | \leq K\ |\ g(x-y)\ | \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \star g(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)f'(x-y)\mathrm{d}y = f'(x) \star g(x).$$

V předposlední rovnosti byla použita věta o derivaci integrálu dle parametru, integrabilní majoranta nezávislá na x existuje díky omezenosti $f(x)$, tedy

$$|\ g(y)f'(x-y)\ | \leq K \cdot g(y) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}).$$

□

Věta 1.2.15. *Nechť* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$. *Pak* $\forall s \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$\theta(s)\int_0^s (f \star g)(x)\mathrm{d}x = \theta(s)\int_0^s f(x)\mathrm{d}x \star g(s) = f(s) \star \theta(s)\int_0^s g(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Stačí dokázat jednu rovnost, druhá bude vycházet z komutativity konvoluce. Nechť $s > 0$, protože pro $s \leq 0$ rovnost platí triviálně, neboť víme, že $f(x), g(x), (f \star g)(x) \in \mathscr{B}$, a mají tedy nezáporný nosič. Dále lze ukázat, že

$$\begin{aligned}
\int_0^s (f \star g)(t)\mathrm{d}t = \int_0^s \int_0^t f(x)g(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^s \int_0^s f(x)g(t-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \overbrace{\int_0^s \int_t^s f(x)g(t-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t}^{=0} = \\
&= \int_0^s \int_0^s f(x)g(t-x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = |y = t - x| = \int_0^s \int_0^{s-x} f(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^s f(x)\left[\int_0^{s-x} g(y)\mathrm{d}y + \overbrace{\int_{-x}^0 g(y)\mathrm{d}y}^{=0}\right]\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^s f(x)\left(\int_0^{s-x} g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = f(s) \star \int_0^s g(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Integrály, kdy funkce budou mít záporné argumenty, budou nulové, protože všechny funkce jsou z $\mathscr{B}$, a tedy jejich nosič musí být podmnožinou $\mathbb{R}_0^+$. $\square$

1.3 Laplaceova transformace na třídě $\mathscr{B}$

Definice 1.3.1 (Prostor $\mathscr{P}$)**.** Do Laplaceova prostoru $\mathscr{P}$ patří všechny měřitelné funkce $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují následující podmínky.

1. $\mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$,
2. $g(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$, tedy $g(x)$ je po částech spojitou funkcí na $\mathbb{R}$,
3. $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\exists x_0 \in \mathbb{R}^+)(\exists K > 0)(\forall x > x_0 :| g(x) |\leq K\mathrm{e}^{\alpha x})$.

My zavedeme Laplaceovu transformaci pouze pro funkce ze třídy $\mathscr{B}$, které ale patří do prostoru $\mathscr{P}$, tedy platí $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}$. Definováním Laplaceovy transformace na $\mathscr{B}$ máme zaručenu integrabilnost funkcí, což pro funkce z $\mathscr{P}$ nemusí platit, jak si ukážeme v následujícím případě.
Budeme zkoumat funkci $f(x) = \theta(x)\frac{\sin(x)}{x}$. Díky Heavisideově funkci určitě platí, že $\mathrm{supp}(g) \subset \mathbb{R}_0^+$, funkce je po částech spojitá a lze ji omezit $|\frac{\sin(x)}{x}| \leq 1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0 \cdot x}$. Funkce $f(x)$ tedy splňuje všechny předpoklady a patří do $\mathscr{P}$.
Nyní chceme zjistit, zda je funkce $f(x)$ integrabilní. Zjistíme že nikoliv, protože

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\theta(x)\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \mathrm{d}x = +\infty.$$

Víme, že pro $\lambda-$měřitelné funkce platí ekvivalence

$$f(x) \in \mathscr{L}(A) \Leftrightarrow |f(x)| \in \mathscr{L}(A),$$

z čehož plyne, že funkce skutečně není integrabilní. Patří ale do $\mathscr{P}$, jak bylo ukázáno výše.

Definice 1.3.2 (Laplaceova transformace)**.** Nechť $f(x) \in \mathscr{B}$ a $\mathrm{inb}(f) = \omega > 0$. Pak $\forall s \in (-\omega, +\infty)$ existuje číslo $F(s) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$. Funkci $F(s)$ nazveme Laplaceovým obrazem hustoty $f(x)$ a označíme:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(x)\right](s), \text{ kde z kontextu } \mathrm{Dom}(F) = (-\omega, +\infty).$$

Příslušné zobrazení nazýváme Laplaceovou transformací. Funkci $f(x)$ pak nazýváme vzorem (resp. originálem) k funkci (obrazu) $G(s)$.

Již z definice lze ukázat několik elementárních vlastností Laplaceova obrazu $G(s)$:

1. $G(s) \in C^\infty(-\omega, +\infty)$,
2. $G(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot 1 = \mu_0$,
3. $G'(s) = -\int_{\mathbb{R}} xg(x)\mathrm{e}^{-sx}dx$, pak $G'(s) \leq 0$ a G(s) je nerostoucí na $(-\omega, +\infty)$,
4. $\lim_{s\to+\infty} G(s) = 0$, G(s) je tedy omezená na $\langle 0, +\infty)$.

Věta 1.3.3 (Podstatná linearita)**.** *Nechť* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$, $c > 0$, $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ *a* $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$. *Pak* $\forall s \in \mathrm{Dom}(G) \cap \mathrm{Dom}(F)$ *platí:*

$$\mathcal{L}[g(x) + cf(x)] = G(s) + cF(s).$$

Důkaz. Vychází z linearity integrálu. □

Věta 1.3.4 (Změna měřítka)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}$, $c > 0$ *a* $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$. *Pak platí rovnost*

$$\mathcal{L}[g(cx)] = \frac{1}{c}G(\frac{s}{c}).$$

Důkaz.

$$\mathcal{L}[g(cx)] = \int_{\mathbb{R}} g(cx)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = | \ y = cx \ | = \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-\frac{sy}{c}}\frac{1}{c}\mathrm{d}y = \frac{1}{c}G(\frac{x}{c}).$$

□

Věta 1.3.5 (O derivaci obrazu)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}$, $n \in \mathbb{N}_0$ *a* $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$.
Pak na $\mathrm{Dom}(G)$ *platí*

$$\mathcal{L}[x^n g(x)] = (-1)^n G^{(n)}(s).$$

Důkaz. Důkaz provedeme pomocí matematické indukce.

pro $n = 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-x)^0 g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

$n \to n + 1$

$$\text{pro n:} \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-x)^n g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$$

$$\text{pro n+1:} \quad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}s^{n+1}}\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-x)^n(-1)xg(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} (-x)^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x.$$

Aby byly úpravy korektní, je nutné nejdříve zkontrolovat, že jsou splněny předpoklady věty o derivaci integrálu dle parametru. Měřitelnost předpokládáme a konvergence platí určitě například pro $s_0 = 0$. Poslední předpoklad je existence integrabilní majoranty

$$|(-x)^n(-1)xg(x)\mathrm{e}^{-sx}| = |(x)^{n+1}g(x)\mathrm{e}^{-sx}| \leq |K \cdot (x)^{n+1}g(x)| \in \mathscr{L}(\mathbb{R}).$$

Tímto jsou všechny předpoklady věty splněny a derivace integrálu lze provést.

□

Věta 1.3.6 (O obrazu distribuční funkce)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(g) = \omega, G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$, $h(x) = \theta(x) \int_0^x g(y)\mathrm{d}y$*. Pak pro všechna* $s \in (0, +\infty)$ *platí*

$$\mathcal{L}[h(x)] = \frac{G(s)}{s}.$$

Důkaz. Pro $s > 0$ jistě platí série následujících úprav

$$\mathcal{L}[h(x)] = \mathcal{L}[\theta(x) \int_0^x g(y)\mathrm{d}y] = \int_{\mathbb{R}} \int_0^x g(y)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(y)\theta(x-y)g(y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$=\mid z = x - y \mid= \int_{\mathbb{R}^2} \theta(y)\theta(\mathrm{z})g(y)\mathrm{e}^{-s(y+\mathrm{z})}\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathrm{z} =\mid \text{ Fubiniova věta } \mid=$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \theta(y)g(y)\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y \cdot \int_{\mathbb{R}} \theta(\mathrm{z})\mathrm{e}^{-s\mathrm{z}}\mathrm{d}\mathrm{z} = \frac{G(s)}{s}.$$

Využili jsme zde předpokladu, že $g(x) \in \mathscr{B}$, tedy $g(x) = \theta(x)g(x)$. □

Věta 1.3.7 (O obrazu chvostové distribuční funkce)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(g) = \omega, \mathcal{L}[g(x)] = G(s)$*. Nechť* $h(x)$ *je chvostovou distribuční funkcí hustoty* $g(x)$*, tzn.* $h(x) = \theta(x) \int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$*. Pak* $h(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(h) = \omega$ *a pro* $\forall s > 0$ *platí:*

$$H(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \frac{\mu_0 - G(s)}{s}.$$

Důkaz. Pro všechna $s > -\omega$ lze provést sérii následujících úprav

$$\begin{aligned} s \cdot H(s) &= s \int_{\mathbb{R}} h(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = s \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \int_x^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} s\theta(x)\theta(y-x)g(y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}} \theta(x)\theta(y-x)s\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_0^y s\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left[-\mathrm{e}^{-sx} \right]_0^y \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y) \left[1 - \mathrm{e}^{-sy} \right] \mathrm{d}y = \mu_0 - G(s). \end{aligned}$$

□

Díky předchozí větě navíc víme, že platí:

$$\lim_{x \to 0} sH(s) = \mu_0 - \lim_{x \to 0} G(s) = \mu_0 - \mu_0 = 0.$$

Věta 1.3.8 (O obrazu derivace)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(g) = \omega, g'(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$*. Pak:*

$$\mathcal{L}[g'(x)](s) = sG(s) - \lim_{x \to 0^+} g(x).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g'(x)](s) = \int_{\mathbb{R}} g'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x =\mid \text{per partes} \mid = \left[g(x)\mathrm{e}^{-sx} \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x \\ = sG(s) - \lim_{x \to 0^+} g(x), \end{aligned}$$

kde omezení mezí integrálu lze provést díky $g(x) \in \mathscr{B}$.

□

Věta 1.3.9 (Translace v obraze)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(g) = \omega, \mathcal{L}[g(x)] = G(s), \alpha > 0$. *Pak pro* $\forall s > -(\alpha + \omega)$ *platí:*

$$\mathcal{L}[g(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}] = G(s + \alpha).$$

Důkaz.

Víme z věty o rozsáhlosti třídy $\mathscr{B}$, že $\mathrm{e}^{-\alpha x} g(x) \in \mathscr{B}$ pro jakékoli $\alpha > 0$. Odtud pro $\alpha + s > -\omega$ dostáváme:

$$\mathcal{L}[g(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-(\alpha+s)x}\mathrm{d}x = G(s + \alpha).$$

□

Věta 1.3.10 (O integrálu obrazu)**.** *Nechť* $\frac{g(x)}{x} \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(\frac{g(x)}{x}) = \omega$. *Pak* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathrm{inb}(g) = \omega$ *a pro všechna* $s > -\omega$ *platí*

$$\mathcal{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \int_s^{\infty} G(p)\mathrm{d}p.$$

Důkaz. Díky větě o rozsáhlosti třídy $\mathscr{B}$ víme, že $g(x) = \frac{g(x)}{x} \cdot x \in \mathscr{B}$. Pak dále

$$\int_s^{+\infty} G(p)\mathrm{d}p = \int_s^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x\mathrm{d}p = \mid \text{ Fubiniova věta } \mid = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left[-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-px}\right]_s^{+\infty} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \mathcal{L}\left[\frac{g(x)}{x}\right].$$

□

Věta 1.3.11 (O konvoluci)**.** *Nechť* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}, \mathcal{L}[g(x)] = G(s), \mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. *Pak* $(f \star g)(x) \in \mathscr{B}$ *a pro všechna* $s > \min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}$ *platí:*

$$\mathcal{L}[(f \star g)(x)] = G(s) \cdot F(s).$$

Důkaz. Víme, že $(f \star g)(x) \in \mathscr{B}$, a navíc $\mathrm{inb}(f \star g) = min\{\mathrm{inb}(f), \mathrm{inb}(g)\}$. Pak tedy:

$$\mathcal{L}[(f \star g)] = \int_{\mathbb{R}} (f \star g)(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \mid z = x - y \mid =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left[\int_{\mathbb{R}} g(z)\mathrm{e}^{-s(y+z)}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\mathrm{e}^{-s(y+z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = F(s) \cdot G(s),$$

kde jsme v poslední rovnosti využili větu o separabilitě integrálu.

□

Věta 1.3.12 (O záměně obrazu a vzoru)**.** *Nechť* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}, \mathcal{L}[g(x)] = G(s), \mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. *Pak platí:*

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cdot G(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} F(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Víme, že lze omezit součin $\mid f(x)G(x) \mid \leq K \cdot f(x)$, protože $G(s)$ je omezená na $\langle 0, +\infty)$ díky tomu, že její vzor $g(x) \in \mathscr{B}$, a tedy platí, že $f(x)G(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_0^+)$. Pak

$$\int_0^{+\infty} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x}_{F(y)}\right]\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} g(y)F(y)\mathrm{d}y.$$

□

Věta 1.3.13 (O translaci ve vzoru). *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \alpha > 0$. *Pak*

$$\mathcal{L}[g(x-\alpha)] = \mathrm{e}^{-\alpha s} G(s).$$

Důkaz.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-\alpha)\mathrm{e}^{-xs}\mathrm{d}x = | \, y = x - \alpha \, | = \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-s(y+\alpha)}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-s\alpha} \int_{\mathbb{R}} g(y)\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-s\alpha} G(s).$$

□

Věta 1.3.14. *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathcal{L}[g(x)] = G(s)$. *Pak pro všechna* $m \in \mathbb{N}$ *platí:*

$$\lim_{s\to 0} s^m G(s) = 0.$$

Důkaz. K důkazu využijeme větu o limitě součinu, kde požadujeme pouze existenci pravé strany.

$$\lim_{s\to 0} s^m G(s) = \lim_{s\to 0} s^m \cdot \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} s^m \cdot \underbrace{G(0)}_{=\mu_0} = 0 \cdot \mu_0 = 0.$$

Díky předpokladu $g(x) \in \mathscr{B}$ víme, že $g(x)$ má všechny momenty, tedy číslo μ_0 existuje. □

Věta 1.3.15. *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathcal{L}[g(x)] = G(s)$ *a* $g'(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$. *Pak*

$$\lim_{s\to+\infty} s \cdot G(s) = \lim_{x\to 0^+} g(x).$$

Důkaz. Z věty 1.3.8 víme, že pro Laplaceův obraz derivace platí:

$$\mathcal{L}[g'(x)](s) = sG(s) - \lim_{x\to 0^+} g(x).$$

Rozepsáním a aplikací limity obou stran rovnice dostáváme postupně

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x &= sG(s) - \lim_{x\to 0^+} g(x), \\
\lim_{s\to+\infty} \int_0^{+\infty} g'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x &= \lim_{s\to+\infty} \left[sG(s) - \lim_{x\to 0^+} g(x) \right], \\
\int_0^{+\infty} \lim_{s\to+\infty} g'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x &= \lim_{s\to+\infty} sG(s) - \lim_{s\to+\infty} \overbrace{\lim_{x\to 0^+} g(x)}^{\text{nezávislé na s}}, \\
0 &= \lim_{s\to+\infty} sG(s) - \lim_{x\to 0^+} g(x), \\
\lim_{s\to+\infty} sG(s) &= \lim_{x\to 0^+} g(x).
\end{aligned}$$

Záměnu integrálu a limity jsme mohli provést, protože pro integrand existuje na $\langle 0, +\infty)$ integrabilní majoranta:

$$|g'(x)\mathrm{e}^{-sx}| \leq |g'(x)|, \text{ kde } |g'(x)| \in \mathscr{L}(\mathbb{R}) \text{ díky předpokladu, že } g'(x) \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}).$$

□

Věta 1.3.16 (Lerchův teorém). *Nechť $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje následující předpoklady.*

1. $\operatorname{supp}(g) \subset \langle 0, +\infty)$,
2. $g(x) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$,
3. $(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\exists K > 0) :\mid g(x) \mid \leq K\mathrm{e}^{\alpha x}$ *na* $\mathbb{R}$.

Pokud existuje $s_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall s > s_0$, platí: $\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-sx} = 0$, pak $g(x) \sim 0$.

Důkaz. Pro $\varphi(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$ platí, že $\mathrm{Dom}(\varphi(s)) = (s_0, +\infty)$ a $\varphi(s) = 0$ na $\mathrm{Dom}(\varphi(s))$. Označíme $P(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k$, kde pro všechny koeficienty platí, že $a_k \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_0^{+\infty} f(x)P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-(s+k)x}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi(s+k) =$$

$$= \mid s + k > s_0 \mid = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 0 = 0$$

a také

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x &= |y = \mathrm{e}^{-x}| = \int_0^{1} f(-\ln(y)) \cdot P(y)y^s\frac{1}{y}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \underbrace{y^{s-1}f(-\ln(y))}_{H(y)} \cdot P(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Pro výpočet integrálu je nejprve nutné zjistit, zda je $H(y) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R})$ a omezená.

$$\mid f(x) \mid \leq K\mathrm{e}^{\alpha x}, \text{ pak } \mid f(-\ln(y)) \mid \leq K\mathrm{e}^{\alpha(-\ln(y))} = Ky^{-\alpha}.$$

Odtud $\mid H(y) \mid \leq y^{s-1}Ky^{-\alpha} = Ky^{s-\alpha-1}$ pro $s > \min\{\alpha + 1, s_0\}$, z čehož vyplývá, že pro $s - \alpha - 1 > 0$ je $\lim_{y \to 0^+} H(y) = 0$. Pokud navíc dodefinujeme $H(x)$ v nule jako $H(0) = 0$, bude H(x) spojitá v 0^+, a tedy omezená na $\langle 0, 1\rangle$ až na konečně mnoho bodů. Díky tomu se lze vrátit k výpočtu (1.2), protože $H(y) \in \mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle)$ a omezená, tedy pro všechny polynomy $P(y)$ platí:

$$\int_0^{+\infty} f(x)P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \int_0^1 H(y)P(y)\mathrm{d}y = 0.$$

$\mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle)$ je vektorový prostor a $\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ je na jeho faktorizované verzi $\mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle)_{/\sim}$ zavedený skalární součin. Z rovnosti

$$\int_0^1 H(y)P(y)\mathrm{d}y = 0 \text{ tedy plyne, že } H(y) \perp P(y).$$

V $\mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle)$ lze ale zvolit bázi z Legendreových polynomů $L_1(x), L_2(x), ...$, kde dimenze prostoru je $\mathbf{dim}(\mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle)) = \aleph_0$ a lze ho zapsat jako lineární obal $\mathcal{PC}(\langle 0, 1\rangle) = [L_1(x), L_2(x), ...]_\lambda$. Žádná jiná LN funkce už v prostoru neexistuje, tedy pro všechna $k \in \mathbb{N} :\quad H(y) \perp L_k(y)$, tedy $H(y) \sim 0 \implies f(-\ln(y)) \sim 0 \implies f(x) \sim 0$. ◻

Věta 1.3.17 (O analytičnosti G(s) - díl první)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}, \mathcal{L}[g(x)] = G(s)$ *. Pak G(s) je analytická v nule* ($s_0 = 0$) *a koeficienty příslušného Maclaurinova rozvoje jsou rovny číslům*

$$a_k = (-1)^k \frac{\mu_k}{k!},$$

kde μ_k *je k-tý moment g(x).*

Důkaz. Potřebujeme ukázat, že Lagrangeův zbytek po n-tém členu $R_{n+1}(s) = \frac{G^{(n)}(\xi)}{(n+1)!} s^{n+1}$ jde pro všechna $\xi \in (0, s) \cup (s, 0)$ k nule, z čehož vyplývá, že předpokládaný Taylorův rozvoj je opravdu rozvojem dané funkce.

Nejdříve je potřeba odhadnout $|G^{(n)}(\xi)|$. Zvolíme proto ξ tak, aby $2|\xi| < 2\delta < \mathrm{inb}(g)$:

$$\left|G^{(n)}(\xi)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{e}^{-sx} \mathrm{d}x\right|_{s=\xi} = \left|\int_{\mathbb{R}} x^n g(x) \mathrm{e}^{-\xi x} \mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}} x^n g(x) \mathrm{e}^{\delta x} \mathrm{d}x =$$

$$= |\text{ mocninný rozvoj } \mathrm{e}^x| = \frac{n!}{\delta^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x) \mathrm{e}^{2\delta x} \mathrm{d}x}_{\in \mathbb{R}} = K(\delta) \frac{n!}{\delta^n}.$$

Nyní již stačí ukázat, že Lagrangeův zbytek jde k nule. Vidíme, že

$$|R_{n+1}(s)| \leq \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} K(\delta) \cdot \frac{(n+1)!}{\delta^{n+1}} = K(\delta) \left(\frac{s}{\delta}\right)^{n+1},$$

kde druhý člen konverguje pro všechna $|s| < \delta$ k nule, odkud $\lim_{n \to +\infty} |R_{n+1}(s)| = 0$. Z podmínky $|s| < \delta$ vidíme, že interval konvergence Maclaurinova rozvoje je $(-\delta, \delta)$ a navíc víme, že platí $2\delta < \mathrm{inb}(g)$.
Z toho plyne, že poloměr konvergence dané řady je přinejmenším roven polovině balančního indexu.

□

Věta 1.3.18 (O analytičnosti G(s) - díl druhý)**.** *Nechť* $g(x) \in \mathscr{B}$*,* $\mathrm{inb}(g) = \omega$*,* $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$*. Pak G(s) je analytická všude na intervalu* $(-\omega, +\infty)$*.*

Důkaz. Označme $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ pro libovolné, ale pevné $\alpha < \omega$. Dále označme $H(s) = \mathcal{L}[h(x)] = G(s - \alpha)$. Víme, že $g(x) \in \mathscr{B}$, tedy i $h(x) \in \mathscr{B}$ (z věty o rozsáhlosti třídy $\mathscr{B}$). Pokud $h(x) \in \mathscr{B}$, pak H(s) je analytická funkce v bodě $s = 0$ podle věty 1.3.17, tedy $G(s)$ je analytická v bodě $s = -\alpha$, kde α bylo voleno pevně, ale libovolně. G(s) je tedy analytická ve všech bodech $s \in (\omega, +\infty)$.

□

Definice 1.3.19 (Momentový kód hustoty)**.** Nechť $g(x) \in \mathscr{B}$ a čísla $\mu_k (k \in \mathbb{N}_0)$ jsou její momenty. Pak posloupnost $(\mu_k)_0^{+\infty}$ nazýváme momentovým kódem balancované hustoty $g(x)$.

Věta 1.3.20 (O jednoznačnosti kódování)**.** *Nechť pro* $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$ *platí, že mají totožné momentové kódy. Pak* $f(x) \sim g(x)$ *v* $\mathbb{R}$*.*

Důkaz. Momentový kód $(\mu_k)_0^{+\infty}$ určuje podle vět 1.3.17 a 1.3.18 Taylorovy rozvoje funkce $G(s)$ v libovolném bodě $\alpha \in (-\omega, +\infty)$. Vyšetřování chování funkce $G(s)$ na okolí bodu $s = -\alpha$ je totožné s vyšetřováním funkce $H(s) = \mathcal{L}[h(x)\mathrm{e}^{\alpha x}]$ na okolí nuly, protože platí $H(s) = G(s - \alpha)$. Je třeba dokázat, že momenty funkce $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ jsou jednoznačně určeny kódem hustoty $g(x)$:

$$\mu_{k,\alpha} = \int_{\mathbb{R}} x^k h(x) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) \mathrm{e}^{\alpha x} \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\alpha x)^j}{j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{\mathbb{R}} x^k x^j g(x) \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \mu_{k+j}.$$

Mají-li funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$ totožné kódy, pak i funkce $h_\alpha(x) = g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ a $t_\alpha(x) = f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ mají totožné kódy.

Nyní dokážeme, že Taylorovy řady obou funkcí $g(x)$, $f(x)$ jsou na $(0, +\infty)$ totožné:

$$G^{(k)}(\alpha) = H^{(k)}(0) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \mathcal{L}[h(x)]|_{s=0} = (-1)^k \mathcal{L}[x^k h(x)]|_{s=0} =$$

$$= (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k h(x) \mathrm{e}^{-sx} \mathrm{d}x|_{s=0} = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) \mathrm{e}^{\alpha x} \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^k \mu_{k,\alpha}(g) = (-1)^k \mu_{k,\alpha}(f) = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) \mathrm{e}^{\alpha x} \mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^k \int_{\mathbb{R}} x^k t(x) \mathrm{e}^{-sx} \mathrm{d}x|_{s=0} = (-1)^k \mathcal{L}[x^k t(x)]|_{s=0} = T^{(k)}(0) = F^{(k)}(\alpha).$$

Tato rovnost je platná pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a všechna $\alpha > -\omega$. Oba obrazy funkcí $g(x)$, $f(x)$ mají totožné Taylorovy rozvoje ve všech bodech intervalu $(0, +\infty)$, tedy $G(s) - F(s)$ je nulová pro $\forall s > 0$.
Díky Lerchovu lemmatu víme, že $\mathcal{L}^{-1}[G(s) - F(s)]$ je funkce nulová skoro všude, tedy $g(x) - f(x) \sim 0$. Odtud $g(x) \sim f(x)$.

$\square$

Věta 1.3.21 (O Laplaceově inverzi)**.** *Nechť F(s) je pro jisté c* > 0 *holomorfní (tj. komplexně diferencovatelná) v polorovině* $\Re(s) > c$. *Nechť existují čísla A,B taková, že pro všechna s, pro něž* $|s| > B$ *a* $\Re(s) > c$, *platí nerovnost* $|F(s)| \leq \frac{A}{s^2}$. *Pak funkce*

$$f(x) := \frac{1}{2\pi\imath} \int_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} F(s) \mathrm{e}^{sx} \mathrm{d}s$$

je spojitou funkcí z Laplaceova prostoru a navíc pro ni platí $\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$. *Přitom hodnota uvedeného komplexního integrálu nezávisí na volbě parametru* $a > c$.

Literatura

[1] APELTAUER T.: *Modelování dopravního proudu* [online]. Brno: FAST VUT, 2007.[vid. 8.6.2018]. Dostupné z http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/CM04.

[2] HELBING D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 73, no. 4, 2001, 1067-1141.

[3] KERNER B. S. *The Physics of Traffic*. Berlin: Springer, 2004. ISBN 978-3-540-20716-0.

[4] KRBÁLEK, M. *Matematická analýza III* (třetí přepracované vydání). Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2011.

[5] KRBÁLEK, M. *Matematická analýza IV* (druhé přepracované vydání). Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2009.

[6] KRBÁLEK, M. *Teorie míry a Lebesgueova integrálu* (první vydání). Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2014.

[7] KRBÁLEK, M. *Socio-fyzikální modelování dynamiky transportních systémů*. Praha, 2010. Habilitační práce. ČVUT v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky.

[8] KRBÁLEK, M. Equilibrium distributions in thermodynamical traffic gas. *J. Phys. A: Math Theor.*, vol. 40, 2007, 5813-5821.

[9] KRBÁLEK, M. Theoretical predictions for vehicular headways and their clusters. *J. Phys. A: Math Theor.*, vol. 46, 2013, 4451011.

[10] KRBÁLEK M., KOLLERT O., HOBZA T., KRBÁLKOVÁ M. Level processes and statistical rigidity – Theoretical instruments for transportation science. *Physica A* [in review process]. 2018.

[11] SZABOVÁ, Z. *Statistická detekce interakčního dosahu v částicových systémech*. Praha, 2017. Výzkumný úkol. ČVUT v Praze, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Katedra matematiky.

[12] TREIBER M., KESTING A. *Traffic Flow Dynamics*. Berlin: Springer, 2003. ISBN 978-3-642-32459-8.

[13] ZVÁRA K., ŠTĚPÁN J. *Pravděpodobnost a matematická statistika.*(5. vyd.). Praha: Matfyzpress, 2012. ISBN 978-80-7378-218-4.