Minitest č. 2 z předmětu 01SMB1	Datum:	11.11.2009
Jméno a příjmení:	Hodnocení:	

[1.] Opravte následující definici: *Nechť $c \in \mathbf{R}$. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na jisté množině $M \ni c$. Řekneme, že $f(x)$ je analytickou funkcí v bodě c, jestliže existuje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ taková, že na množině M platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

[2.] Nechť

$$\left(x - \frac{x}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$$

je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Čemu se rovná $f_n(x)$?

[3.] Sestavte funkční řadu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ splňující následující podmínky:

- pro všechny $n \in \mathbf{N}$ je $\mathrm{Dom}(f_n) = \mathbf{R}$
- všechny funkce $f_n(x)$ jsou spojité na $\mathbf{R}$
- obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je $\mathcal{O} = \langle 2, 8)$.

[4.] Za jakých předpokladů lze zaměnit sumu a derivaci ve výrazu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)?$$

[5.] Opravte znění Dirichletova kritéria: *Nechť $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ a $\big(g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti funkcí na množině $M \subset \mathbf{R}$. Nechť je posloupnost $\big(g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ $n-$monotónní. Nechť je posloupnost $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ stejnoměrně omezená na množině M, tj. existuje $\mathtt{K} > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a pro každé $n \in N$ platí*

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant \mathtt{K}.$$

Nechť dále posloupnost $\big(g_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ konverguje na M k nulové funkci. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

[6.] Sestavte obyčejnou diferenciální rovnici, jejíž systém všech řešení je tvaru

$$\left[x, x^2, x + x^2\right]_{\lambda} + 1.$$

[7.] Může existovat analytická funkce, pro níž platí

$$f^{(n)}(0) = \big(n!\big)^2, \quad \big(n \in \mathbf{N}\big)\,?$$

[8.] Jak lze nejjednodušeji zdůvodnit, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ nekonverguje na $\mathbf{R}$ stejnoměrně?

[9.] Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na (a,b) a jejím součtem na (a,b) je funkce $s(x)$. Může nastat situace, že by $s(x)$ byla nespojitou funkcí na (a,b)?

[10.] Vyslovte definici spojitosti funkce $f(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$.

[11.] Rozhodněte zda platí věta: *Nechť je dána posloupnost $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ na množině M. Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že platí implikace*

$$x \in M \;\wedge\; n > n_0 \quad \Longrightarrow \quad \big|f_{n+1} + f_n(x)\big| < \varepsilon.$$

Pak $f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows} 0$.