

Clearance distribuce

- podmíněná pravděpodobnost
- podmínka: v i -té buňce sedí částice a zároveň někde před i -tou buňkou je alespoň 1 další částice, aby byla mezera mezi sousedními částicemi rušec definována
- pravděpodobnost podmínky:

$$Z_N \cdot P_r(B) = \langle w | (D+E)^{i-1} D (D+E)^{N-i} | v \rangle - \langle w | (D+E)^{i-1} D E^{N-i} | v \rangle$$

$$P_r(A \cap B) = \langle w | (D+E)^{i-1} D E^{k-1} D (D+E)^{N-i-k} | v \rangle \cdot \frac{1}{Z_N}$$

- vypočítat podmíněné pravděpodobnosti

$$P_r(A|B) = \frac{P_r(A \cap B)}{P_r(B)} = \frac{\langle w | (D+E)^{i-1} D E^{k-1} D (D+E)^{N-i-k} | v \rangle}{\langle w | (D+E)^{i-1} D (D+E)^{N-i} | v \rangle - \langle w | (D+E)^{i-1} D E^{N-i} | v \rangle}$$

- na limitě komutativity

$$P^{(i)}(k) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{i-1} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{N-i-k}}{\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{i-1} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{N-i} - \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^{i-1} \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{N-i} \frac{1}{\beta}} = \frac{\alpha \beta^{k-1}}{1 - \beta^{N-i}}$$

limite pro velkou N : $P^{(i)}(k) = \alpha \beta^{k-1}$

střední hodnota:

$$\langle k \rangle = E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P^{(i)}(k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \beta^{k-1} = \frac{\alpha}{(1-\beta)^2} = \frac{1}{\alpha}$$

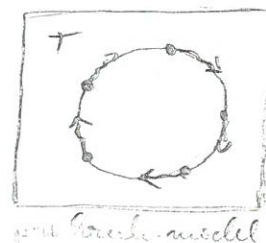
$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} \quad \int \rho(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x} \Rightarrow \rho(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

2) Termodynamický' doprav. plyn:

- modelujeme pohyb částic (vozidel) v prostřech'
- prostřech' modelujeme "tepeln' lázeň" o teplotě T
- částice mají určitý zákonitosti pohyb, který ^{je} ~~je~~ náhodný ovlivňovaný rezervoárem ~~tepeln' lázeň~~

↳ míra ovlivňování závisí na teplotě T

- stochastická' rezistivita: $\beta = \frac{1}{2T}$



$\beta = 0 \Rightarrow T = +\infty \Rightarrow$ velký vliv lázně $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ náhodný' pohyb částic (vzniká vliv interakčních sil)

$\beta = +\infty \Rightarrow T = 0 \Rightarrow$ lázeň nemá žádný vliv $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ deterministický' pohyb

- zákonitosti pohyb částic jsou určeny interakčními silami mezi částicemi

↳ $\vec{F} = -\text{grad } U$; kde U je inter. potenciál

(pro 1D pohyb: $F = -\frac{dU}{dx}$)

↳ Markovské interakční sil: 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

3) $F \in C(1/2^+)$

↳ Potenciály: $U(x) = -\ln x$... logaritm. potenciál ($\gamma = 1$)

$U(x) = \frac{1}{\gamma - \gamma} x^{1-\gamma}$

$\gamma = 2$... vzájemný' hyperbol. potenciál

$\gamma > 2$... zesílený' hyperbol. potenciál (superhyp.)

$\gamma \in (1, 2)$... zeslábený' hyperbol. potenciál (subhyp.)

$\gamma \in (0, 1)$... mocninový'

Všechny potenciály
vedou na sílu
ve tvaru

$$F(x) = \frac{1}{x^\gamma}$$

termální rovnice

= slab systém, při kterém se β nemění v čase

2. SAKUSKUPA

2/4

3)

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \cdot \theta(\vec{r}) \cdot \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) \cdot e^{-\beta \sum_{k=1}^N \varphi(r_k)}$$

3.1.

$$\beta = 0 \Rightarrow G(\vec{r}) = \frac{1}{Z_N(L)} \theta(\vec{r}) \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right)$$

$$Z_N(L) = \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\vec{r}) \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) d\vec{r}$$

$$g(r_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} G(\vec{r}) d(r_2, \dots, r_N) = \frac{1}{Z_N(L)} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \theta(\vec{r}) \delta\left(L - r_1 - \sum_{k=2}^N r_k\right) d(r_2, \dots, r_N) =$$

$$= \theta(r_1) \cdot \frac{Z_{N-1}(L - r_1)}{Z_N(L)}$$

Přídp. homog. systém $\Rightarrow g(r) = \theta(r) \cdot \frac{Z_{N-1}(L - r)}{Z_N(L)}$

$$Z_N(L) = ? \quad \mathcal{L}[Z_N(L)](s) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\vec{r}) \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) d\vec{r} e^{-sL} dL =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\vec{r}) \int_0^{+\infty} \delta\left(L - \sum_{k=1}^N r_k\right) e^{-sL} dL d\vec{r} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \theta(\vec{r}) e^{-\sum_{k=1}^N r_k \cdot s} d\vec{r} = \prod_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} \theta(r_k) e^{-s r_k} dr_k = \left(\int_{\mathbb{R}} \theta(r) e^{-s r} dr \right)^N =$$

$$= \frac{1}{s^N} \Rightarrow \mathcal{L}[Z_N(L)](s) = \frac{1}{s^N} \Rightarrow Z_N(L) = \frac{1}{(N-1)!} L^{N-1}$$

$$\Rightarrow g(r) = \theta(r) \cdot \frac{\frac{1}{(N-2)!} (L-r)^{N-2}}{\frac{1}{(N-1)!} L^{N-1}} = (N-1) \cdot \theta(r) \cdot \frac{(L-r)^{N-2}}{L^{N-1}}$$

$$= \theta(r) \cdot (N-1) \cdot \frac{(L-r)^{N-2}}{L^{N-1}}$$

~~limita pro $N \rightarrow \infty$~~
~~(nada pro $N \rightarrow \infty$)~~

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} g(r) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \theta(r) \cdot (N-1) \cdot \frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \theta(r) N \frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-1}} -$$

$$- \lim_{N \rightarrow +\infty} \theta(r) \frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-1}} = \underline{\underline{\theta(r) \cdot e^{-r}}}$$

3.2.

$$N \cdot \frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-1}} = \frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-2}} = \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N-2} = \left[1 - \frac{\frac{r}{N}}{\frac{N}{r}}\right]^{\frac{N}{r} \cdot \frac{r}{N} \cdot (N-2)} \rightarrow e^{-r}$$

$$\frac{(N-r)^{N-2}}{N^{N-1}} = \frac{1}{N} \cdot \left(1 - \frac{r}{N}\right)^{N-2} \rightarrow 0$$

• Statistica di rigidità: $\Delta(L) = E(M_L - L)^2$

dove M_L = intervalli frequenza = # particelle in intervalli $(0, L)$

$$P(M_L = k) = P(M_L > k-1) - P(M_L > k) = \int_0^L h_{k-1}(x) dx - \int_0^L h_k(x) dx$$

$$h_k(x) = (\underbrace{g * g * \dots * g}_{k \text{ volte}})(x)$$

$$(g * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(y) e^{-y} \theta(x-y) e^{-(x-y)} dy = \theta(x) \int_0^x e^{-y} dy = \theta(x) x e^{-x}$$

$$(g * g * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(y) y e^{-y} \theta(x-y) e^{-(x-y)} dy = \theta(x) e^{-x} \int_0^x y dy = \theta(x) e^{-x} \frac{x^2}{2}$$

$$(\underbrace{g * \dots * g}_{k \text{ volte}})(x) = \theta(x) e^{-x} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = h_k(x)$$

$$\begin{aligned} (\underbrace{g * \dots * g}_{k \text{ volte}} * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(y) e^{-y} \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} \theta(x-y) e^{-(x-y)} dy = \theta(x) e^{-x} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x y^{k-1} dy \\ &= \theta(x) e^{-x} \frac{1}{k!} x^k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(M_L = k) = \int_0^L \theta(x) e^{-x} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} dx - \int_0^L \theta(x) e^{-x} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} dx =$$

$$= \frac{1}{(k-2)!} \int_0^L e^{-x} x^{k-2} dx - \frac{1}{(k-1)!} \int_0^L e^{-x} x^{k-1} dx$$

$\beta = 0 \Rightarrow$ náhodný' pohyb $\Rightarrow$ Poisson. systém $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(M_L = k) = \frac{L^k}{k!} e^{-L}$$

3.3.

$$\Delta(L) = E(M_L - L)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (k-L)^2 P(M_L = k)$$

$$= E M_L^2 - 2L E M_L + L^2 = E M_L^2 - L^2$$

$= L$ (Pois. systém)

$$E M_L^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(M_L = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{L^k}{k!} e^{-L} = e^{-L} \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{L^k}{(k-1)!}$$

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \frac{L^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{L^{k+1}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{L^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L^{k+1}}{k!} =$$

$$= L \left[\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{L^k}{k!} \cdot e^{-L} \right] e^L + L \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} = L \cdot e^{-L} + L \cdot e^L = L$$

$$\Rightarrow E M_L^2 = e^{-L} \cdot (L^2 e^L + L e^L) = L^2 + L$$

$$\Rightarrow \Delta(L) = L^2 + L - L^2 = L \quad \dots \text{slučná rovnost Poisson. rozdělení ' Po(L)}$$

$$(E M_L = L \text{ pro Poisson}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(L) = E(M_L - E M_L)^2 = \text{Var } M_L$$

4. $f(x), q(x) \sim N(a, b)$

$P(x, v) = f(x)q(v)$ před. nezávislosti ✓

$P(x, \tilde{v}) = \left| \begin{smallmatrix} x = \tilde{v} \cdot b \\ v = \tilde{v} \end{smallmatrix} \right| \det \left(\frac{D(x, v)}{D(\tilde{v}, b)} \right) = \left| \begin{smallmatrix} b & \tilde{v} \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right| = -\tilde{v} = \tilde{v} f(\tilde{v}b) q(\tilde{v})$ ✓

$h(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v} \frac{f(\tilde{v}b)q(\tilde{v})}{q(v)} d\tilde{v} \stackrel{(*)}{=} \int_0^{+\infty} \tilde{v} f(\tilde{v}b)q(\tilde{v}) d\tilde{v} + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty}$

$q(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{(k)}(w)}{k!} (v-w)^k$ ✓

$q'(v) = f(vb) + v \frac{df(vb)}{d(vb)} b$

$q''(v) = 2b \frac{df(vb)}{d(vb)} + v b^2 \frac{d^2 f(vb)}{d(vb)^2}$

$q^{(3)}(v) = 3b^2 \frac{d^2 f(vb)}{d(vb)^2} + v b^3 \frac{d^3 f(vb)}{d(vb)^3}$

$q^{(k)}(v) = k b^{k-1} \frac{d^{k-1} f(vb)}{d(vb)^{k-1}} + v b^k \frac{d^k f(vb)}{d(vb)^k}$

$\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} w f(wb) q(v) dv + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left[k b^{k-1} \frac{d^{k-1} f(wb)}{d(wb)^{k-1}} + v b^k \frac{d^k f(wb)}{d(wb)^k} \right] (v-w)^k q(v) dv$

$= w f(wb) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} A = \left| k=2m, \mu_{2k+1}=0 \right| = A$

$= w f(wb) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu_{2m}}{(2m)!} \left[2m b^{2m-1} \frac{d^{2m-1} f(wb)}{d(wb)^{2m-1}} + v b^{2m} \frac{d^{2m} f(wb)}{d(wb)^{2m}} \right] \Big|_{v=w} =$

$\mu_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}b^2} (x-a)^m e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}} dx = 0(1+(-1)^m) \frac{m! b^m}{m!!}$

$\mu_{2m} = \frac{(2m)! b^{2m}}{(2m)!!}$

$= w f(wb) + \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{b^{2m}}{(2m)!!}}_C$ ✓

borderline členy ✗

$\int_{-\infty}^{+\infty} w f(wb) dw = \left| \begin{smallmatrix} wb=a \\ wb=db \end{smallmatrix} \right| = \int_a^b f(a) da = 1 \Rightarrow C$ se při normalizaci neprojeví ✓

✗ dokazuje o σ^2 & σ^4 (ve vztahu k nálně dopravě)

5. $\omega(x) \triangleq p_0(x, \tau=0)$ počáteční podmínka pro hustotu

6b

Propagační rychlost kinematických vln:

$$\mu(x, \tau) = V_0 \left(1 - 2 \frac{p_0(x, \tau)}{p_0} \right) \checkmark$$

Počáteční podmínka pro propagační rychlost:

$$\alpha(x) \triangleq \mu(x, \tau=0) = V_0 \left(1 - 2 \frac{\omega(x)}{p_0} \right) \checkmark$$

Cole-Hopfova transformace

$$\mu(x, \tau) = - \frac{2D}{\varphi(x, \tau)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \checkmark$$

$$\mu(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial x} \left[-2D \cdot \ln \varphi(x, \tau) \right]$$

$$2D \cdot \ln \varphi(x, \tau) = - \int_0^x \mu(y, \tau) dy$$

$$\varphi(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2D} \int_0^x \mu(y, \tau) dy}$$

$$\eta(x) \triangleq \varphi(x, \tau=0) = e^{-\frac{1}{2D} \int_0^x \alpha(y) dy} \checkmark \checkmark$$

$$\eta(x) = e^{-\frac{V_0}{2D} \int_0^x \left(1 - 2 \frac{\omega(y)}{p_0} \right) dy} \checkmark$$

6. fund. diagram ukazuje ^(vztah) závislost ρ na β hustotě nebo rychlosti na hustotě

kde by se tomu mělo říkat, protože dvě závislosti nejsou správně funkcí β funkce: jedné hustotě β může odpovídat více hodnot ρ nebo rychlosti

2. mezi částicemi působí síla F
pro sílu F platí $F = -\frac{d\Phi(x)}{dx}$, kde Φ je potenciál, x je vzdálenost mezi částicemi
typy potenciálů:

$\Phi = -\ln x$ logaritmický potenciál

$\Phi = \frac{1}{\gamma-1} x^{1-\gamma}$ ~~pro~~ $\gamma \in (0, 1)$ mocninový potenciál

$\Phi = \frac{1}{x}$ vzájemný hyperbolický potenciál

$\Phi = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{x^{\gamma-1}}$ $\gamma \in (1, 2)$ zeslabený hyperbolický pot. (sub-hyperbolický)

$\Phi = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{x^{\gamma-1}}$ $\gamma > 2$ zesílený hyperbolický pot. (superhyperbolický)

vlastnosti Φ :

$$\Phi(0) = +\infty$$

$$\Phi(+\infty) = 0$$

$$\Phi'(x) < 0$$

$$\Phi(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

stochastická keristivita B - odolnost systému vůči stoch. šumům

$$B = \frac{1}{2T} \quad k \dots \text{Boltzmanova konst.}$$

$T \dots$ term. ~~by~~ teplota

$B \rightarrow +\infty$ deterministický systém, velké hustoty

$B \rightarrow 0+$ Poissonův systém, malé hustoty

term. rovnováha: systém je v ustáleném stavu

(a co je to na plynu?) $\checkmark -1$

$\hookrightarrow$ systém částic na kruhu
podrobený vlnu seplotní
lázně