# Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

14. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 1 (13 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xz + 2yz + 10z^2 + 2y + 4z = 3$$

určete hlavní a vedlejší signaturu a normální tvar včetně afinní transformace

$$(x, y, z)^T = \mathbf{M}\,(a, b, c)^{\mathrm{T}} + (r, s, t)^{\mathrm{T}},$$

která ji na tento tvar převádí. Jaký je název této kvadriky? Pokud je kvadrika centrální, určete její střed.

---

**Řešení:**

- Převod kvadratické formy na čtverec

$$q\,(x, y, z) = x^2 - 4xy + 5y^2 + 2xz + 2yz + 10z^2 = (x - 2y + z)^2 + 6yz + y^2 + 9z^2$$

$$= \Big(\underbrace{x - 2y + z}_{\xi}\Big)^2 + \Big(\underbrace{y + 3z}_{\eta}\Big)^2 = \xi^2 + \eta^2 + 0 \cdot \lambda^2$$

- Transformace má tedy tvar (*pozor na správné doplnění na regulární matici*)

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

- Dosadíme do $Q$:

$$Q\,(x, y, z) = \xi^2 + \eta^2 + 2\,(\eta - 3\lambda) + 4\lambda - 3 = \xi^2 + \eta^2 + 2\eta - 2\lambda - 3 = 0.$$

- Nalezneme posunutí druhým převodem na čtverec

$$\xi^2 + (\eta + 1)^2 - 2\,(\lambda + 2) = 0.$$

- Normální tvar tedy je

$$a^2 + b^2 - 2c = 0.$$

- Posunutí lze vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

  takže pro transformaci mezi $(x, y, z)^{\mathrm{T}}$ a $(a, b, c)^{\mathrm{T}}$ platí

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Rozšířená kvadratická forma je (vycházíme z normálního tvaru $Q$)

$$q_0\,(a, b, c, d) = a^2 + b^2 - 2cd = a^2 + b^2 + \alpha^2 - \beta^2$$

  kde v posledním kroku byla k převodu na čtverec použita substituce $-2c = \alpha + \beta$, $d = \alpha - \beta$. Pro **signatury** tedy platí

$$\mathrm{SG}\,(Q) = (3, 1, 0), \quad \mathrm{sg}\,(Q) = (2, 0, 1).$$

- Jde o **eliptický paraboloid**.
- Kvadrika není centrální, protože v normálním tvaru obsahuje lineární člen. V takovém případě není soustava $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$ nikdy řešitelná: $\operatorname{rank}\,(\mathbf{A}|\,\boldsymbol{b}) > \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

# Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

14. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 2 (10 bodů)

Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{2x^2+4n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2+4n^2}}\right)' \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Korektně a velmi detailně zdůvodněte!!

---

**Řešení:** Předpokládáme, že se nám rovnost podaří dokázat ověřením předpokladů věty o záměně derivace a sumy na (*omezeném!*) intervalu $(a,b)$

(1) konvergence původní řady alespoň v 1 bodě intervalu $(a,b)$

(2) stejnoměrná konvergence řady derivací na $(a,b)$

Potom původní řada konverguje stejnoměrně na $(a,b)$ a záměnu lze provést $\forall x\in(a,b)$. Pokud ale stejnoměrnou konvergenci ověříme na celém $\mathbb{R}$, bude fungovat i pro libovolný $(a,b)$, z čehož plyne možnost záměny $\forall x\in\mathbb{R}$. Pozn: Neplyne z toho ale stejnoměrná konvergence původní řady na celém $\mathbb{R}$.

argumentace

- Původní řada skutečně konverguje např. v $x=0$ z Leibnizova kritéria:

$$s(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$$

  Intervaly $(a,b)$ je tedy nutné volit tak, aby obsahovaly bod 0, tj. např. tvaru$(-c,c)$.

- Řada derivací je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{-\frac{1}{2}\cdot 4x}{(2x^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2x}{(2x^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Použijeme Weierstrassovo kritérium - najdeme číselnou majorantu splňující $\left|f_n'(x)\right|<a_n\ \forall n\in\mathbb{N}$ *(odhad členů posloupnosti, žádné sumy!)*. Jednoduchý odhad není hned možný, takže nalezneme nejlepší možný odhad

$$a_n=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|(-1)^n\frac{2x}{(2x^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=2\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{(2x^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=2\sup_{x\in\langle 0,+\infty)}\underbrace{\frac{x}{(2x^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{ozn.}g_n(x)}$$

  kde poslední rovnost plyne z toho, že výraz v abs. hodnotě je lichá funkce

- Funkce $g_n(x)$ je diferencovatelná na celém $\mathbb{R}$ a platí pro ni
  - $g_n(0)=0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)=0$
  - $g_n(x)>0\ \forall x\in\langle 0,+\infty)$.

  Hodnotou jejího suprema tedy bude největší z lokálních extrémů na $\langle 0,+\infty)$.

- Body podezřelé z extrému splňují

$$0=g_n'(x)=\frac{\left(2x^2+4n^2\right)^{\frac{3}{2}}-x\left(2x^2+4n^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4x}{(2x^2+4n^2)^3}=\frac{n^2-x^2}{(2x^2+4n^2)^{\frac{5}{2}}}$$

  Jediný extrém (a tedy z vlastností $g_n$ nutně maximum) je v $x=n$. Proto

$$a_n=2\sup_{x\in\langle 0,+\infty)}g_n(x)=2g_n(n)=\frac{2n}{(2n^2+4n^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{6^{3/2}}\frac{1}{n^2}$$

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\approx\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ je zřejmě konvergentní (z integrálního kritéria - ale lze brát jako fakt), čímž je příklad uzavřen.

# Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

14. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (10 bodů)

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice
$$x^2y'' - \left(5x^2+4x\right)y' + \left(6x^2+10x+6\right)y = 0$$
i diferenciální rovnice
$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$
*Nápověda:* Rovnice jsou sestavené tak, že mají neprázdný průnik fundamentálních systémů.

---

**Řešení:**

- Nejprve řešíme **druhou rovnici**. Charakteristický polynom je
$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$
Uhodneme jedno řešení $\lambda = 2$ jako dělitele konstantního koeficientu 8. Po vydělení dostaneme
$$\ell(\lambda) = (\lambda-2)\cdot\left(\lambda^2 - 4\lambda + 4\right) = (\lambda-2)^3$$
- Fundamentální systém je tedy
$$\mathrm{FS} = \left\{\mathrm{e}^{2x}, x\mathrm{e}^{2x}, x^2\mathrm{e}^{2x}\right\}$$
a požadované obecné řešení je ve tvaru
$$y(x) = A\mathrm{e}^{2x} + Bx\mathrm{e}^{2x} + Cx^2\mathrm{e}^{2x}.$$

pokud neuvede obecné řešení, půlbod dolů

- **První rovnici** řeší funkce $v(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$ (což lze ověřit delším výpočtem)
- Provedeme snížení řádu:
$$\begin{aligned} y(x) &= zx^2\mathrm{e}^{2x} \\ y'(x) &= z'x^2\mathrm{e}^{2x} + z\left(2x+2x^2\right)\mathrm{e}^{2x} = \left(z'x^2 + 2zx^2 + 2zx\right)\mathrm{e}^{2x} \\ y''(x) &= \underbrace{\left(z''x^2 + 2z'x + 2z'x^2\right)\mathrm{e}^{2x}}_{\text{lze opsat z minulého řádku se záměnou } z \text{ za } z'} + 2\underbrace{\left(z'x^2 + 2zx^2 + 2zx\right)\mathrm{e}^{2x}}_{\text{lze opsat z minulého řádku}} \\ &\quad + \underbrace{\left(2z'x + 2z + 4zx\right)\mathrm{e}^{2x}}_{\text{derivace } 2zx\mathrm{e}^{2x}} \end{aligned}$$
- Dosadíme do rovnice. Není nutné mnoho psaní, pokud se budeme ptát, s jakým koeficientem se ve výsledné rovnici vyskytuje $z'', z', z$. Navíc už rovnou píšeme rovnici vydělenou $\mathrm{e}^{2x}$, které násobí všechny členy a jde o nenulové číslo.
  - koef. u $z''$ je $x^2x^2 = x^4$ (to je nejsnazší)
  - koef. u $z'$ je $x^2\underbrace{\left(2x+2x^2+2x^2+2x\right)}_{\text{všechny členy násobící } z' \text{ ve vzorci pro } y''} - \left(5x^2+4x\right)x^2 = x^2\left(4x^2+4x-5x^2-4x\right) = -x^4$
  - koef. u $z$ je $x^2\left(4x^2+4x+2+4x\right) - \left(5x^2+4x\right)\left(2x^2+2x\right) + \left(6x^2+10x+6\right)x^2 = 0$
    (opět lze snadno spočítat z hlavy bez psaní hledáním koeficientu u $x^4, x^3, x^2, x, 1$)
- **Výsledná rovnice** tedy je
$$x^4\left(z''-z'\right) = 0,$$
$$z'' - z' = 0.$$
- Charakteristický polynom je $\ell(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$, a tedy $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a $\mathrm{FS} = \{1, \mathrm{e}^x\}$. Obecné řešení v závisle proměnné $z$ je tedy $z(x) = C + D\mathrm{e}^x$, a proto
$$y(x) = Cx^2\mathrm{e}^{2x} + Dx^2\mathrm{e}^{3x}; \qquad I = \mathbb{R}.$$

pokud neuvede interval I, půlbod dolů

# Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

14. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 4 (10 bodů)

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

a její obor konvergence.

---

**Řešení:** Mocninnou řadu lze integrovat člen po členu na *vnitřku* oboru konvergence.

- Platí
$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$
- Tato funkce je součtem mocninné řady (zobecněná binomická věta)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n$$
kde $t = x^2$. Obor konvergence této řady je $O_t = (-1, 1\rangle$, tj. $O_x = \langle -1, 1\rangle$ (kraje ale pro nás nejsou důležité). Integrováním člen po členu pak dostaneme
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + C = x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + C$$
$$= x + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + C = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{kde def. } (-1)!!=1}}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + C$$
*(uznat libovolný z těchto tvarů)* a tato rovnost platí alespoň $\forall x \in (-1, 1)$.
- Je nutné ještě určit integrační konstantu $C$ (konst. člen Maclaurinovy řady). V bodě $x = 0$ platí $f(x) = \ln 1 = 0$, z čehož $C = 0$.
- Absolutní konvergenci v obou krajních bodech současně dokážeme pomocí Raabeova kritéria:
$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{2n+1}{2n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n+1}{2n+3}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)-(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$
- Proto je oborem konvergence řady interval
$$O = \langle -1, 1\rangle.$$

**Poznámky:**

- Celý obor konvergence lze také vyšetřovat až u zintegrované řady. Postup hledání rozvoje $f$ pomocí rozvoje $f'$ pak zpětně ospravedlňuje věta o derivaci mocninné řady člen po členu.
- Přesně vzato, použitím věty o integraci člen po členu jsme ukázali, že součet zintegrované řady je roven $f$ pouze na $(-1, 1)$. Rovnost součtu řady a funkce $f$ i pro $|x| = 1$ plyne ze spojitosti $f$ v těchto bodech.

# Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

14. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (7 bodů)

Představte si, že cestujete po prostoru spojitých funkcí $\mathrm{C}(\langle 0,1\rangle)$, kde je definován skalární součin

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall f,g\in \mathrm{C}(\langle 0,2\pi\rangle),$$

který indukuje (generuje) příslušnou normu a metriku. Chcete se dostat z bodu $\theta$ do bodu $h$ a na mapě zjistíte, že můžete cestovat buď přes $f$, nebo přes $g$. Přitom $\forall x\in\langle 0,1\rangle$ platí

$$\begin{aligned}\theta(x) &= 0,\\ h(x) &= x^2,\\ f(x) &= x+1,\\ g(x) &= 2x.\end{aligned}$$

Která z těchto dvou cest je kratší?

---

**Řešení:**

- Délka cesty přes $f$ je $\|f-\theta\|+\|h-f\|$, délka cesty přes $g$ je $\|g-\theta\|+\|h-g\|$.

uvědomí si, co počítáme

- Přitom platí

$$\begin{aligned}\|f-\theta\|+\|h-f\| &= \sqrt{\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_0^1 (x^2-x-1)^2\,\mathrm{d}x}\\ &= \sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{41}{30}}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\|g-\theta\|+\|h-g\| &= \sqrt{\int_0^1 (2x)^2\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_0^1 (x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x}\\ &= \sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{8}{15}}\end{aligned}$$

za sestavení správných integrálů

+

za jejich výpočet *

- Kratší cesta tedy vede přes bod $g$.

výsledek

- Integrály lze přímo vypočítat, nebo si lze uvědomit následující nerovnosti, které platí na intervalu $(0,1)$:
  - $x+1>2x$, tj. díky vlastnostem druhé mocniny i odmocniny (jsou to rostoucí funkce pro kladný argument) a větě o nerovnosti integrálů musí platit i
  $$\sqrt{\int_0^1 (x+1)^2\,\mathrm{d}x} > \sqrt{\int_0^1 (2x)^2\,\mathrm{d}x}.$$
  - Stejně tak $x^2-x-1 < x^2-2x$, ale zde jsou obě hodnoty záporné. Proto $\left(x^2-x-1\right)^2 > \left(x^2-2x\right)^2$ a tedy i
  $$\sqrt{\int_0^1 (x^2-x-1)^2\,\mathrm{d}x} > \sqrt{\int_0^1 (x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x}.$$

*) nebo 2 body za jiný způsob zdůvodnění nerovnosti

# Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

21. ledna 2016, 9:00 – 11:00

**1** (9 bodů)

Sestavte mocninnou řadu, jejíž součet je roven integrálu

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt$$

a určete její obor konvergence $O$. Dále rozhodněte, zda uvedená řada stejnoměrně konverguje na $O$. Velmi pečlivě zdůvodněte všechny kroky.

---

**Řešení:**

- Vyjdeme ze znalosti MacLaurinova rozvoje funkce

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad u \in \mathbb{R}$$

- Z toho postupně

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!},$$

$$1 - e^{-t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n}}{n!},$$

$$\frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(n+1)!}.$$

1b .. zdůvodnění

- Oborem konvergence poslední řady je $\mathbb{R}$. Jako mocninná řada konverguje tedy stejnoměrně na intervalu $\langle 0, x\rangle$, resp. $\langle x, 0\rangle$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Použijeme tedy větu o integraci stejnoměrně konvergentní řady člen po členu *(v. 2.2.20 str. 46 ve skriptech verze 2014)* a pro každé konkrétní $x \geq 0$ (a taktéž i pro $x < 0$ s použitím konvence $\int_a^b = -\int_b^a$) dostaneme

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-t^2}}{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

- Tato rovnost podle výše uvedené věty platí $\forall x \in \mathbb{R}$, a tedy lze okamžitě říci $O = \mathbb{R}$. Pro kontrolu lze vypočítat obor konvergence ručně:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{2n}}{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{y^n}{2n+1} \text{ kde } y = x^2.$$

$$L_y = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} \frac{2n+1}{2n+3} = 0 \implies R_y = +\infty \implies O_y = \mathbb{R} \implies O = \mathbb{R}.$$

z toho 1b za lib. zdůvodnění

- Ovšem řada na $\mathbb{R}$ nekonverguje stejnoměrně. Není splněna ani nutná podmínka konvergence

$$f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0,$$

protože

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{x^{2n}}{2n+1} - 0 \right| = +\infty.$$

# Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

21. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## ❷ (9 bodů)

Načrtněte množinu $M \subset \left(\mathbb{R}^2, \rho_2\right)$ zadanou předpisem $M = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, kde

$$A = \langle -1, 1) \times (0, 2)\,, \quad B = \left\{ \left(x, 2x^2\right) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Poté načrtněte a pomocí matematických formulí (tj. podobně jako v definici samotné $M$) popište množiny $C = M^0$, $D = \bar{M}$, $E = \operatorname{der}\left(M^0\right)$, $F = (\operatorname{der}(M))^0$. Nakonec najděte předpis pro metriku $\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ tak, aby

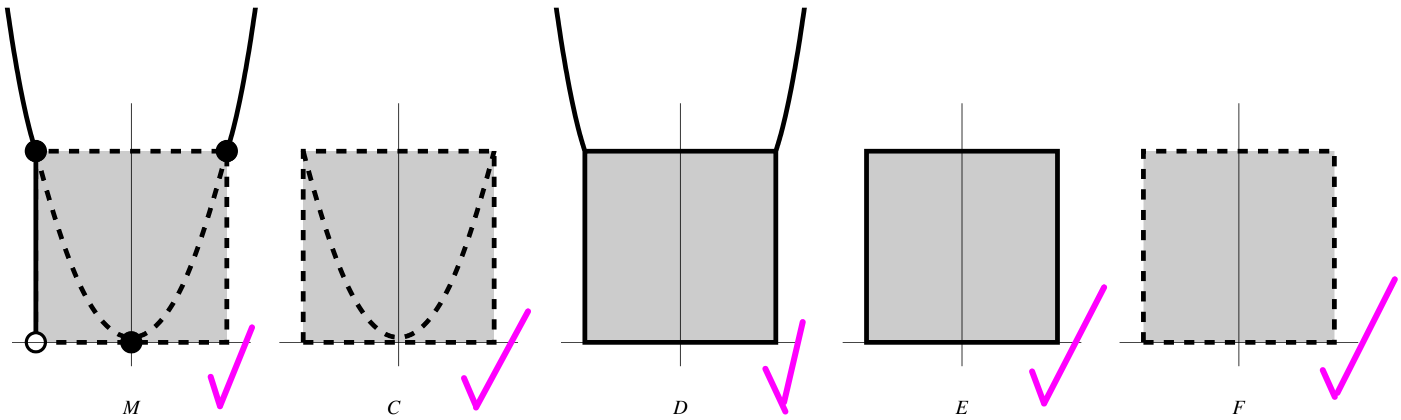
$${}_{\chi}U_5((0,1)) = F.$$

*Pokyny k náčrtkům:* Nakreslete osy souřadné soustavy. Plnou čarou vyznačte hranici množiny, která do ní patří, přerušovanou čarou hranici, která do ní nepatří. Kde je to potřebné, vyznačte plným kolečkem bod, který do množiny patří, prázdným kolečkem bod, který do ní nepatří. Plochu patřící do množiny vyšrafujte.

---

**Řešení:**

- Množiny $M, C, D, E, F$ jsou zobrazeny na následujícím náčrtku:




- Matematický zápis je např.

$$\begin{aligned} C &= M^0 = (-1,1) \times (0,2) \setminus B, \\ D &= \bar{M} = \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle \cup B, \\ E &= \operatorname{der}\left(M^0\right) = \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle, \\ F &= (\operatorname{der}(M))^0 = (-1,1) \times (0,2). \end{aligned}$$

- Z definice okolí máme

$${}_{\chi}U_5((0,1)) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, \chi((x_1, x_2), (0,1)) < 5 \right\}$$

a má platit

$${}_{\chi}U_5((0,1)) = (-1,1) \times (0,2)\,,$$

tj.

$${}_{\chi}U_5((0,1)) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, |x_1| < 1 \wedge |x_2 - 1| < 1 \right\}.$$

Toto lze přepsat do tvaru

$${}_{\chi}U_5((0,1)) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, \max\{5|x_1 - 0|, 5|x_2 - 1|\} < 5 \right\}.$$

- Srovnáním s definicí okolí nám vychází metrika

$$\chi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{5|x_1 - y_1|, 5|x_2 - y_2|\}$$

z toho 1b za nějaké rozumné zdůvodnění

# Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

21. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (11 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$x^2 + 12z + 6xz - 5 - 2y + 17z^2 + 4x + 2y^2 - 2xy = 0$$

v prostoru $\mathbb{R}^3$ stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Najděte vektory příslušné polární báze. Rozhodněte, zda jde o plochu centrální a pokud ano, příslušný střed vypočítejte.
*Poznámka:* Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují!

---

**Řešení:**

- Převod kvadratické formy na čtverec

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 17z^2 + 6xz - 2xy = (x - y + 3z)^2 + y^2 + 8z^2 + 6yz$$
$$= \Big(\underbrace{x - y + 3z}_{\xi}\Big)^2 + \Big(\underbrace{y + 3z}_{\eta}\Big)^2 - \underbrace{z}_{\lambda}{}^2 = \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2$$

- Transformace má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

- Dosadíme do $Q$:

$$Q(\xi,\eta,\lambda) = \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2 + 4(\xi + \eta - 6\lambda) - 2(\eta - 3\lambda) + 12\lambda - 5$$
$$= \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2 + 4\xi + 2\eta - 6\lambda - 5 = 0$$

- Nalezneme posunutí druhým převodem na čtverec

$$Q(\xi,\eta,\lambda) = \Big(\underbrace{\xi + 2}_{a}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\eta + 1}_{b}\Big)^2 - \Big(\underbrace{\lambda + 3}_{c}\Big)^2 - 1 = 0$$

- Normální tvar tedy je

$$Q(a,b,c) = a^2 + b^2 - c^2 - 1 = 0.$$

- Rozšířená kvadratická forma je (vycházíme z normálního tvaru $Q$)

$$q_0(a,b,c,d) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

  Pro **signatury** tedy platí

$$\mathrm{SG}(Q) = (2,2,0)\ , \ \mathrm{sg}(Q) = (2,1,0).$$

- Jde o **jednodílný hyperboliod**.
- Vektory polární báze jsou sloupce matice $\mathbf{M}$, tj. **polární báze** je

$$B_P = \left\{(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}, (-6,-3,1)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

- Střed $\boldsymbol{s}$ je řešením soustavy $\mathbf{A}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}$, v našem případě

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix},$$

za lib. způsob nalezení středu

  z čehož $\boldsymbol{s} = (15, 8, -3)^{\mathrm{T}}$. Střed lze ale vypočítat i z normálního tvaru, kde $\mathbf{A} = \mathrm{diag}\,(1,1,-1)$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, z čehož $\boldsymbol{s}_{\text{norm}} = (a_s, b_s, c_s) = \mathbf{0}$. Následně přejdeme posunutím nejprve k proměnným $(\xi_s, \eta_s.\lambda_s)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} + (-2,-1,-3)^{\mathrm{T}}$ a nakonec transformací $\boldsymbol{s} = \mathbf{M}(\xi_s, \eta_s.\lambda_s)^{\mathrm{T}}$ dojdeme ke stejnému výsledku.

# Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

21. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 4 (9 bodů)

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x^2 y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 8x^3 e^{2x}.$$

*Nápověda:* Můžete použít fakt, že příslušnou rovnici s nulovou pravou stranou řeší funkce $v(x) = x$.

---

**Řešení:**

- Provedeme snížení řádu substitucí $y(x) = v(x)z(x)$, tj.

$$y(x) = zx.$$
$$y'(x) = z'x + z.$$
$$y''(x) = z''x + 2z'.$$

- Dosadíme do rovnice. Není nutné mnoho psaní, pokud se budeme ptát, s jakým koeficientem se ve výsledné rovnici vyskytuje $z'', z', z$.
  - koef. u $z''$ je $x^2 x = x^3$ (to je nejsnazší),
  - koef. u $z'$ je $x^2 \cdot 2 - 2x(1+x)\cdot x = -2x^3$,
  - koef. u $z$ je $-2x(1+x) + 2(1+x)x = 0$.
- **Výsledná rovnice** tedy je

$$x^3(z'' - 2z') = 8x^3 e^{2x},$$
$$z'' - 2z' = 8e^{2x}.$$

- Rovnici lze vyřešit rovnou jako LDR s konst. koef. a speciálním tvarem pravé strany:
  - Charakteristický polynom je $\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$.
  - Jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.
  - $\mathrm{FS} = \left\{1, e^{2x}\right\}$,
  - Partikulární řešení hledáme dle příslušné věty ve tvaru $z_p(x) = P(x)x^k e^{\beta x} = axe^{2x}$ kde $a$ představuje polynom stupně nula a $k = 1$ je násobnost čísla $\beta = 2$ jakožto kořene charakteristického polynomu.
  - Zderivujeme: $z_p' = a(1+2x)e^{2x}$, $z_p'' = 4a(1+x)e^{2x}$ a po dosazení do rovnice dostáváme $a = 4$.
  - Obecné řešení má tedy tvar

$$\underline{z(x) = C + De^{2x} + 4xe^{2x},}$$
$$\underline{y(x) = Cx + Dxe^{2x} + 4x^2 e^{2x}, \qquad I = \mathbb{R}.}$$

- Lze také skutečně snížit řád a řešení hledat pomocí integračního faktoru:
  - Def. $w = z'$ a máme rovnici $w' - 2w = 8e^{2x}$.
  - Integrační faktor je $e^{P(x)}$ kde $P(x) = \int p(x)\,dx = -2x$.
  - Vynásobíme tedy $e^{-2x}$ a dostaneme $\left(we^{-2x}\right)' = 8$.
  - Zintegrujeme $we^{-2x} = 8x + A$ a získáme

$$w(x) = 8xe^{2x} + Ae^{2x}.$$

  - Znovu zintegrujeme

$$z(x) = \int w(x)\,dx = A\int e^{2x}dx + 8\int xe^{2x}dx = \left[\begin{array}{lll} \text{pp.} & u = x & v' = e^{2x} \\ & u' = 1 & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$$
$$= \frac{A}{2}e^{2x} + 4xe^{2x} - 4\int e^{2x}dx = \underline{\underbrace{\left(\frac{A}{2} - 2\right)}_{D} e^{2x} + 4xe^{2x} + C.}$$

  - Nakonec vynásobíme $x$ a dostaneme opět

$$\underline{y(x) = Cx + Dxe^{2x} + 4x^2 e^{2x}, \qquad I = \mathbb{R}.}$$

+ až 5 bodů za libovolný způsob řešení až po z(x)=...

pokud není interval I, tak půlbod dolů

# Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

21. ledna 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (12 bodů)

Nalezněte ortonormální bázi podprostoru

$$[p_0, p_1, p_2]_\lambda \subset\subset C(\langle 0, +\infty))$$

kde

$$p_0(x) = 3, \qquad p_1(x) = \pi + ex, \qquad p_2(x) = e + \pi x + e\pi x^2.$$

Skalární součin je na $C(\langle 0, +\infty))$ zaveden vztahem

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} xe^{-x} f(x)\, g(x)\, dx.$$

*Nápověda:* 1) Jak vypadají prvky lineárního obalu $[p_0, p_1, p_2]_\lambda$? 2) Čemu se rovná $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$?

---

**Řešení:**

- Použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační (ortonormalizační) proces
- Nápověda nám říká, že prvky podprostoru jsou všechny polynomy stupně max. 2
- Lze tedy uvažovat jednodušší bázi

$$\tilde{p}_0(x) = 1, \qquad \tilde{p}_1(x) = x, \qquad \tilde{p}_2(x) = x^2.$$

- Dále budeme vektory původní báze značit již bez vlnek. Ortonormální báze bude mít složky $\{q_0, q_1, q_2\}$.
- Ještě před výpočtem se nám bude hodit vztah

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!,$$

který lze snadno odvodit metodou per partes, jejímž výsledkem je rekurentní vzorec $I_n = nI_{n-1}$. Přitom $I_0 = 1$.

- Pro první vektor báze $q_1$ platí

$$\tilde{q}_0 = p_0; \qquad q_0 = \frac{\tilde{q}_0}{||\tilde{q}_0||}.$$

Přitom

$$||\tilde{q}_0||^2 = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \cdot 1^2 dx = 1! = 1,$$

takže $q_0 = p_0$, tj. $q_0(x) = x$.

- Pro druhý vektor báze $q_1$ platí

$$\tilde{q}_1 = p_1 - \langle p_1 | q_0 \rangle q_0; \qquad q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{||\tilde{q}_1||}.$$

Vypočítáme tedy

$$\langle p_1 | q_0 \rangle = \int_0^{+\infty} xe^{-x} \cdot x \cdot 1 dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2! = 2$$

Z toho $\tilde{q}_1 = p_1 - 2q_2$, tj. $\tilde{q}_1(x) = x - 2$. Zbývá normalizace:

$$||\tilde{q}_1||^2 = \int_0^{+\infty} xe^{-x}(x-2)^2 dx = \int_0^{+\infty} x\left(x^2 - 4x + 4\right) e^{-x} dx = 3! - 4 \cdot 2! + 4 \cdot 1! = 2,$$

takže $q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2)$.

- Pro třetí vektor báze $q_2$ platí

$$\tilde{q}_2 = p_2 - \langle p_2 | q_0 \rangle q_0 - \langle p_2 | q_1 \rangle q_1; \qquad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|}.$$

Vypočítáme tedy

$$\langle p_2 | q_0 \rangle = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} \cdot x^2 \cdot 1 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = 3! = 6,$$

$$\langle p_2 | q_1 \rangle = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (x-2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \left(x^4 - 2x^3\right) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} (4! - 2 \cdot 3!) = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Z toho $q_2 = p_2 - 6q_0 - \frac{12}{\sqrt{2}} q_1$, tj. $\tilde{q}_2(x) = x^2 - 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (x-2) = x^2 - 6 - 6(x-2) = x^2 - 6x + 6.$
Zbývá poslední normalizace

$$\|\tilde{q}_2\|^2 = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x} \left(x^2 - 6x + 6\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \left(x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 72x + 36\right) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x =$$
$$= 5! - 12 \cdot 4! + 48 \cdot 3! - 72 \cdot 2! + 36 \cdot 1! = 4!\,(5 - 12 + 12 - 6) + 36 = 36 - 24 = 12,$$

takže $q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{12}} \left(x^2 - 6x + 6\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \left(x^2 - 6x + 6\right).$

# Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

## 1 (8 bodů)

Abelovým kritériem vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}$$

na $\mathbb{R}$. Je možné použít i Weierstrassovo kritérium?

---

**Řešení:**

- Řada $\sum f_n(x)\, g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině $M$, jestliže je splněna Abelova podmínka

$$\sum f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows},$$

$$g_n(x) \text{ monotónní } \forall x \in M \text{ a stejnoměrně omezená na } M.$$

- Posloupnost

$$g_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

je skutečně monotónní vzhledem k pro každé $x$ jak je vidět ze zápisu nahoře ($\left(\frac{x}{n}\right)^2$ klesá, tj. jmenovatel klesá, $g_n(x)$ roste).
- Okamžitě je vidět i stejnoměrná omezenost

$$0 < \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} \leq 1.$$

(kdo tyto vlastnosti nevidí, musí je nějak korektně dokázat).
- Řada $\sum f_n(x)$ je pouze číselná, tj. stačí dokázat její konvergenci.
- Použijeme zobecněné Raabeho kritérium pro řady se střídavými znaménky. Platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{2n+2}{2n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n+3-(2n+2)}{2n+3}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \in (0,1),\end{aligned}$$

takže řada konverguje neabsolutně (relativně). Tím je důkaz hotov.

- Z výše uvedeného postupu je vidět, že pro důkaz stejnoměrné konvergence na $\mathbb{R}$ nelze použít Weierstrassovo kritérium. Nejlepší majorantou posloupnosti

$$(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}$$

je totiž

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

ale z Raabeho kritéria je vidět, že řada $\sum \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ diverguje.

# Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

## 2 (10 bodů)

Mezi formálními řešeními diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} - 3}{3\frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} - 3}$$

je i kružnice o poloměru $R = 5$. Nalezněte její střed.

---

**Řešení:**

- Zadaná diferenciální rovnice je homogenní stupně nula a její řešení budeme hledat rovnou pomocí obecné substituce

$$y(x) = xz(x),$$

protože lineární řešení nemůže být kružnice.

- Dosadíme do rovnice $y = zx$, $\quad y' = z'x + z$.

$$z'x + z = \frac{3z^2 - 6z - 3}{3z^2 + 6z - 3} = \frac{z^2 - 2z - 1}{z^2 + 2z - 1}$$

- Separujeme proměnné

$$z'x = \frac{z^2 - 2z - 1 - z\left(z^2 + 2z - 1\right)}{z^2 + 2z - 1} = \frac{-z^3 - z^2 - z - 1}{z^2 + 2z - 1},$$

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} z' = -\frac{1}{x}.$$

- Před integrací provedeme rozklad na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli má kořen $z = -1$ (uhodneme: jediní kandidáti na celočíselné kořeny jsou dělitelé absolutního členu 1, tj. $\pm 1$). Po vydělení zjišťujeme $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)\left(z^2 + 1\right)$ a platí tedy

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}.$$

- Najdeme $A, B, C$:

$$Az^2 + A + Bz^2 + Bz + Cz + C = z^2 + 2z - 1,$$

z čehož vychází soustava

$$A + B = 1, \qquad B + C = 2, \qquad A + C = -1,$$

jejímž řešením je $(A, B, C) = (-1, 2, 0)$.

- Nyní integrujeme

$$\int \frac{-1}{z+1} \mathrm{d}z + \int \frac{2z}{z^2 + 1} \mathrm{d}z = -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x,$$

$$\ln\left|\frac{z^2 + 1}{z + 1}\right| = \ln\frac{C}{|x|} \text{ kde } C > 0,$$

$$\frac{z^2 + 1}{z + 1} = \frac{C}{x} \text{ kde } C \in R \setminus \{0\}.$$

- Přejdeme k původním proměnným a dostaneme formální řešení

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right), \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{2},$$
$$x^2 + y^2 = C(x + y),$$

což je kružnice se středem $\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right)$ a poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}}$.

- Kružnice s poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}} = 5$ má tedy střed $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

# Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (12 bodů)

Rozhodněte, zda kvadratická forma

$$q(x,y,u,v) = -2u^2 + 2uv + 5v^2 - 6vx + 2x^2 - 8uy - 4vy + 2xy - y^2$$

může mít polární bázi ve tvaru

$$B_P = \left\{(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}, (2,1,-1,2)^{\mathrm{T}}, (7,2,-1,5)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{w}\right\}.$$

Pokud ano, určete neznámý vektor $\boldsymbol{w}$ a stanovte signaturu formy $q$.

*Poznámka:* Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují!

---

**Řešení:**

- Kvadratická forma $q(x,y,u,v) = (x,y,u,v)\,\mathbf{A}\,(x,y,u,v)^{\mathrm{T}}$ má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Nejprve ověříme, zda zadané vektory splňují podmínky $q$-ortogonality a $q$- normalizační podmínky. Platí

$$(1,0,0,1)\,\mathbf{A}\,(2,1,-1,2)^{\mathrm{T}} = 0, \qquad (1,0,0,1)\,\mathbf{A}\,(1,0,0,1)^{\mathrm{T}} = 1,$$
$$(1,0,0,1)\,\mathbf{A}\,(7,2,-1,5)^{\mathrm{T}} = 0, \qquad (2,1,-1,2)\,\mathbf{A}\,(2,1,-1,2)^{\mathrm{T}} = 1,$$
$$(2,1,-1,2)\,\mathbf{A}\,(7,2,-1,5)^{\mathrm{T}} = 0, \qquad (7,2,-1,5)\,\mathbf{A}\,(7,2,-1,5)^{\mathrm{T}} = 1,$$

- Podmínky jsou tedy splněny a už nyní je vidět, že forma $q$ v normálním tvaru obsahuje alespoň 3 kladné čtverce, tj. kladný index setrvačnosti je alespoň 3. Pro určení signatury zbývá určit koeficient před posledním čtvercem a jak se ukáže, nebude kvůli tomu nutné provádět Lagrangeův algoritmus.
- Poslední vektor polární báze $\boldsymbol{w} = (w_1,w_2,w_3,w_4)^{\mathrm{T}}$ musí splňovat podmínky $q$-ortogonality, tj.

$$(1,0,0,1)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = -w_1 - w_2 + w_3 + 2w_4 = 0,$$
$$(2,1,-1,2)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = -w_1 + w_2 + w_4 = 0,$$
$$(7,2,-1,5)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = w_1 - w_2 - w_3 - w_4 = 0.$$

*Tento výpočet lze provést před ověřováním podmínek výše a pak dosadit za $\boldsymbol{w}$ příslušné vektory, čímž si ušetříme opakované násobení maticí $\mathbf{A}$ a všechny podmínky lze ověřit v podstatě z hlavy.*

- Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $w_3 = 0$, z první a druhé rovnice pak $w_4 = 2w_2$, $w_1 = 3w_2$. Vektor $\boldsymbol{w}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{w} = (3,1,0,2)\,w_2.$$

- Dosazením do normalizační podmínky dostáváme

$$q(\boldsymbol{w}) = (3,1,0,2)\,w_2\mathbf{A}\,(3,1,0,2)^{\mathrm{T}}\,w_2 = -w_2^2 = -1.$$

Z tvaru $q(\boldsymbol{w})$ je zřejmé, že pravá strana může být rovna pouze $-1$. Pochopitelně nemůže být rovna 1 a nemůže být ani nulová, protože pak by vyšlo $w_2 = 0$ a z toho $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$.

- Známe tedy znaménko posledního čtverce a můžeme uzavřít

$$\mathrm{sg}(q) = (3,1,0).$$

vč. zdůvodnění jakýmkoliv způsobem

- Platí $w_2 = \pm 1$ a tedy

$$\boldsymbol{w} = \pm(3,1,0,2).$$

# Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

**4** (9 bodů)

Nechť

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in C(\langle 0, +\infty)) \,\middle|\, \int_0^{+\infty} f^2(x)\, \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

je prostor se skalárním součinem

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{120} \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x,$$

který indukuje (generuje) příslušnou normu a metriku. Nalezněte množinu

$$M = \{ m \in \mathbb{N}_0 | \, o \in \mathcal{U}_6(f_m) \},$$

kde $o$ je nulová funkce $o(x) = 0$ a $f_m(x) = x^{\frac{3}{2}m}$. Dále určete, čemu se rovná $f_{m_0}(-4)$ pro $m_0 = \min(M)$.

---

**Řešení:**

- V prostoru $\mathcal{H}$ platí

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \frac{1}{120} \int_0^{+\infty} f^2(x)\, \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x,$$

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\frac{1}{120} \int_0^{+\infty} (f(x) - g(x))^2\, \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x}.$$

- Ptáme se, pro která $m \in \mathbb{N}_0$ platí

$$o \in \mathcal{U}_6(f_m),$$

$$\rho(o, f_m) < 6,$$

$$\sqrt{\frac{1}{120} \int_0^{+\infty} \left( x^{\frac{3}{2}m} - 0 \right)^2 \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x} < 6,$$

$$\frac{1}{120} \int_0^{+\infty} x^{3m} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x < 6^2.$$

- Pamatujeme si vzorec

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = n!$$

nebo jej snadno odvodíme metodou per partes. Jejím výsledkem je rekurentní vzorec $I_n = nI_{n-1}$. K tomu dopočítáme počáteční podmínku $I_0 = 1$.

- Po dosazení má tedy platit

$$(3m)! < 6^2 \cdot 120 = 6 \cdot 6!.$$

Pravá strana nerovnosti je větší než 6!, ale menší než 7!. Je tedy zřejmé, že nerovnost bude splněna nejvýše pro $m = 2$ $((3 \cdot 2)! = 6!)$, ale nikoliv už pro $m = 3$ $((3 \cdot 3)! = 9!)$. Proto $M = \{0, 1, 2\}$.

- $m_0 = \min(M) = 0$, ale funkce $f_0 \in \mathcal{H}$, $f_0(x) = 1$ není v bodě $x = -4$ definována, neboť je z definice $\mathcal{H}$ definována pro $x \in \langle 0, +\infty)$.

# Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (11 bodů)

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - n}.$$

---

**Řešení 1:**

- Považujme danou číselnou řadu za mocninnou řadu
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} x^{2n}$$
v bodě $x = 1$.
- Tato řada pro $x = 1$ konverguje absolutně, neboť lze srovnat s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$:
$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2 - n}\right| = \frac{1}{2n^2 - n} < \frac{1}{2n^2 - n^2} = \frac{1}{n^2}.$$
- Derivováním člen po členu dostaneme
$$s'(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}$$
$$s''(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} = -2\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{-2}{1+x^2}$$
kde poslední řada je jen geometrická řada s kvocientem $q = -x^2$, která má mimochodem obor konvergence jen $x \in (-1, 1)$.
- Zpětně zintegrujeme
$$s'(x) = \int \frac{-2}{1+x^2} \mathrm{d}x = -2\arctan x + C$$
a určíme konstantu $C$ dosazením $x = 0$. Dostaneme $C = 0$.
- Další integrací dostaneme
$$s(x) = -2\int \arctan x \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{lll} \text{p.p.} & u = \arctan x & v' = 1 \\ & u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array}\right] = -2x\arctan x + \int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= -2x\arctan x + \ln\left(1+x^2\right) + D$$
a opět dosazením $x = 0$ dostaneme $D = 0$.
- Platí tedy
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - n} = s(1) = \ln\left(1+1^2\right) - 2\cdot 1\cdot \arctan 1 = \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

---

**Řešení 2:**

- Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

rozklad na p.z.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{n} + 2\frac{(-1)^n}{2n-1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \ln 2 - 2\frac{\pi}{4}$$

protože na druhém řádku rozpoznáme rozvoj $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ v bodě $x = 1$ a rozvoj $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ v bodě $x = 1$.

**Řešení 3:**

- Podobně jako v **řešení č. 1** považujme danou číselnou řadu za mocninnou řadu
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} x^{2n-1}$$
v bodě $x = 1$. (Všimněte si, že nyní máme mocninu $x^{2n-1}$ místo $x^{2n}$)
- Tato řada konverguje absolutně, viz **řešení č. 1**.
- Derivováním člen po členu dostaneme
$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n-2} = -\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(x^2\right)^n = -\frac{1}{x^2} \ln\left(1+x^2\right)$$
s oborem konvergence $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
- Zpětnou integrací dostaneme
$$s(x) = -\int \frac{1}{x^2} \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x = \left[ \text{p.p.} \quad \begin{matrix} u = \ln\left(1+x^2\right) & v' = -\frac{1}{x^2} \\ u' = \frac{2x}{1+x^2} & v = \frac{1}{x} \end{matrix} \right]$$
$$= \frac{1}{x} \ln\left(1+x^2\right) - \int \frac{2}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{x} \ln\left(1+x^2\right) - 2 \arctan x + C.$$
- Abychom určili hodnotu integrační konstanty $C$, musíme umět sečíst řadu alespoň pro jedno $x$. My to umíme jen pro $x = 0$, ale to nelze do získaného tvaru funkce $s(x)$ dosadit. Můžeme však využít spojitosti součtu. Proto platí
$$s(0) = \lim_{x \to 0+} s(x) = \lim_{x \to 0+} \left( \frac{1}{x} \ln\left(1+x^2\right) - 2x \arctan x + C \right)$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} \ln\left(1+x^2\right) + 0 + C = \lim_{x \to 0+} x \underbrace{\frac{1}{x^2} \ln\left(1+x^2\right)}_{\to 1} + 0 + C = C.$$
Dosazením $x = 0$ přímo do sumy a porovnáním pak získáme $C = 0$.
- Platí tedy (srovnej s **řešením 1**)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - n} = s(1) = \frac{1}{1} \ln\left(1+1^2\right) - 2 \arctan 1 = \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

# Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

9. února 2016, 9:00 – 11:00

## 1 (9 bodů)

Nalezněte dvě řešení exaktní diferenciální rovnice

$$(cy - bx)\, y' = ax + by,$$

která jsou ve tvaru přímky procházející bodem $(0,0)$. Určete podmínku pro parametry $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ve tvaru závislosti $b = b(a, c)$ tak, aby uvedené dvě přímky byly na sebe kolmé při skalárním součinu

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}.$$

*Nápověda:* Prozradili jsme vám typ rovnice. Chtěli jsme vám tím usnadnit práci?

---

**Řešení:**

- Pokud využijeme znalosti, že jde o exaktní rovnici $f(x,y) + g(x,y)\, y' = 0$, máme $f(x,y) = -(ax + by)$, $g(x,y) = cy - bx$ a skutečně platí

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -b = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

- Implicitní řešení nalezneme ve tvaru primitivní funkce k $f, g$:

$$H(x,y) = \int f(x,y)\, \mathrm{d}x + G(y) = -\int ax + by \mathrm{d}x + G(y) = -\frac{1}{2}ax^2 - bxy + G(y),$$

$$\text{kde } \frac{\partial H}{\partial y} = -bx + G'(y) \stackrel{!}{=} cy - bx,$$

z čehož $G'(y) = cy$, $G(y) = \frac{1}{2}cy^2 + K$ a tedy

$$H(x,y) = -\frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy - cy^2\right) + K = 0$$

představuje formální řešení rovnice. Aby procházelo bodem $(0,0)$, dosadíme a vypočítáme $K = 0$.

- Podobně lze dosadit do připraveného vzorečku

$$H(x,y) = \int_{x_0}^{x} f(x,s)\, \mathrm{d}s + \int_{y_0}^{y} g(x_0,t)\, \mathrm{d}t = 0$$

kde $(x_0, y_0) = (0,0)$ je bod, kterým má řešení procházet. Vyjde totéž, tj. řešení ve tvaru

$$ax^2 + 2bxy - cy^2 = 0.$$

- Jestliže chceme pouze řešení ve tvaru přímky (procházející počátkem), předpokládáme $y = kx$ a směrnici $k$ vypočítáme po dosazení a vydělení $x^2$ z rovnice

$$a + 2bk - ck^2 = 0.$$

- *Můžeme ale také využít nápovědy* a předpokládat, že řešit rovnici jako exaktní není ten nejsnadnější způsob. Skutečně, rovnice je také homogenní stupně 1 a její lineární řešení $y = kx$ představuje právě přímku procházející počátkem. Máme $y' = k$ a po dosazení do rovnice

$$(ck - b)\, kx = (a + bk)\, x$$

a vydělení $x$ okamžitě opět dostáváme

$$a + 2bk - ck^2 = 0.$$

- Tato rovnice má dvě řešení

$$k_{1,2} = \frac{1}{c}\left(b \pm \sqrt{b^2 + ac}\right)$$

- Směrové vektory obou přímek jsou $\boldsymbol{s}_1 = (1, k_1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{s}_2 = (1, k_2)$ a aby byly kolmé, musí platit
$$\boldsymbol{s}_1^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{s}_2 = 1 + k_1 + k_2 + 2k_1k_2.$$
- Po dosazení za $k_1, k_2$ dostaneme
$$1 + 2\frac{b}{c} + 2\frac{b^2 - \left(b^2 + ac\right)}{c^2} = 0,$$
z čehož
$$b = a - \frac{1}{2}c.$$

# Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

9. února 2016, 9:00 – 11:00

**2** (15 bodů)

Řešte diferenciální rovnici

$$\sum_{j=1}^{5} a_j x^j y^{(j-1)}(x) = b$$

pro $\boldsymbol{a} = (24, 0, -12, 4, 1)^T$, $b = 120$ a $x > 0$.
*Nápověda:* Někde uhodnete, že něco je rovno $-1$ a $+2$.

---

**Řešení:**

- Po rozepsání sumy vidíme, že řešíme diferenciální rovnici

$$x^5 y'''' + 4x^4 y''' - 12x^3 y'' + 24xy = 120.$$

- Po vydělení $x$ dostáváme Eulerovu rovnici

$$x^4 y'''' + 4x^3 y''' - 12x^2 y'' + 24y = \frac{120}{x},$$

kterou převedeme na LDR s konstantními koeficienty substitucí $x = +e^t$, tj. $t = \ln x$.

- Z toho vypočítáme derivace

$$y' = \frac{1}{x}\dot{y}, \qquad y'' = -\frac{1}{x^2}\dot{y} + \frac{1}{x}\ddot{y} = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}),$$

$$y''' = -\frac{2}{x^3}(\ddot{y} - \dot{y}) + \frac{1}{x^2}\left(\dddot{y}\frac{1}{x} - \ddot{y}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right),$$

$$y'''' = \frac{-3}{x^4}\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right) + \frac{1}{x^3}\left(\ddddot{y}\frac{1}{x} - 3\dddot{y}\frac{1}{x} + 2\ddot{y}\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4}\left(\ddddot{y} - 6\dddot{y} + 11\ddot{y} - 6\dot{y}\right).$$

- Dosadíme do rovnice a dostaneme

$$\left(\ddddot{y} - 6\dddot{y} + 11\ddot{y} - 6\dot{y}\right) + 4\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right) - 12(\ddot{y} - \dot{y}) + 24y = 120e^{-t},$$

$$\ddddot{y} - 2\dddot{y} - 13\ddot{y} + 14\dot{y} + 24y = 120e^{-t}.$$

- Charakteristický polynom je tedy ve tvaru

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 13\lambda^2 + 14\lambda + 24 = 0$$

- Uhodneme jeden z kořenů $\lambda_1 = -1$. Vydělíme a dostaneme

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 - 13\lambda^2 + 14\lambda + 24 = (\lambda + 1)\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24\right).$$

- Uhodneme další kořen $\lambda_2 = +2$. Vydělíme a dostaneme

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 2)\left(\lambda^2 - \lambda - 12\right) = (\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda + 3).$$

- Fundamentální systém je tedy

$$\text{FS} = \left\{e^{-t}, e^{2t}, e^{-3t}, e^{4t}\right\}.$$

- Vzhledem k speciálnímu tvaru pravé strany předpokládáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(t) = P(t)\,t^k e^{\beta t} = ate^{-t}.$$

Najdeme jeho derivace

$$\dot{y}_p(t) = a(1 - t)e^{-t}, \qquad \ddot{y}_p(t) = a(t - 2)e^{-t},$$

$$\dddot{y}(t) = a(3 - t)e^{-t}, \qquad \ddddot{y}_p(t) = a(t - 4)e^{-t}$$

a dosadíme jej do rovnice. Pokud věříme větě o speciálním tvaru partikulárního řešení, stačí z derivací $y_p$ dosazovat jen konstantní násobky $e^{-t}$, neboť $t$-násobky se musí nutně odečíst. Po dosazení vyjde $30a = 120$, tj. $a = 4$.

- Obecné řešení v proměnné $t$ má tvar

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{2t} + Ce^{-3t} + De^{4t} + 4te^{-t}$$

a po návratu k proměnné $x$ dostáváme

$$y(x) = \frac{A}{x} + Bx^2 + \frac{C}{x^3} + Dx^4 + 4\frac{\ln x}{x}; \qquad x > 0.$$

# Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

9. února 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (6 bodů)

Nechť $g_n \in C(\langle a,b\rangle)$ a $g_n \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} g$. Dokažte, že v Hilbertově prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ se skalárním součinem

$$\langle f | g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

a příslušnou normou a metrikou, které jsou tímto skalárním součinem indukovány (generovány), platí

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = g.$$

---

**Řešení:**

- Máme dokázat

$$0 \overset{!}{=} \lim_{n\to+\infty} \rho(g_n, g) = \lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|$$

neboli

$$0 \overset{!}{=} \lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \langle g_n - g | g_n - g\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (g_n(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x$$

- $g_n \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} g$, a tedy ekvivalentně ze supremálního kritéria máme

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\langle a,b\rangle} |g_n(x) - g(x)| = \lim_{n\to+\infty} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |g_n(x) - g(x)|\,.$$

Supremum je pro spojité funkce na uzavřeném intervalu totéž co maximum.

- Zřejmě i

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in\langle a,b\rangle} (g_n(x) - g(x))^2 = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$(g_n - g)^2 \overset{\langle a,b\rangle}{\rightrightarrows} 0.$$

- To je předpoklad pro záměnu limity a integrálu, takže rovnou dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (g_n(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} (g_n(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x = \int_a^b 0\mathrm{d}x = 0.$$

- Tvrzení lze dokázat i přímo z nerovnosti

$$0 \le \int_a^b (g_n(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x \le \int_a^b \max_{x\in\langle a,b\rangle} (g_n(x) - g(x))^2\, \mathrm{d}x = (b-a) \underbrace{\sigma_n^2}_{\to 0}$$

a z věty o limitě sevřené posloupnosti.

# Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

9. února 2016, 9:00 – 11:00

## ❹ (10 bodů)

Nalezněte všechny hodnoty parametru $\mu \in \mathbb{R}$, pro které je kvadratická forma

$$q(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 - 4\mu(xy + xz + yz)$$

negativně definitní.

---

**Řešení:**

- Pro zjednodušení zápisu místo původního zadání vyšetříme ekvivalentní problém, a sice kdy forma

$$-q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4\mu(zy + zx + yz)$$

q nebo -q je skoro jedno

je pozitivně definitní.

- Použijeme Sylvestrovo kritérium na matici formy $-q$, která má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2\mu & 2\mu \\ 2\mu & 1 & 2\mu \\ 2\mu & 2\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

nebo analogicky pro q

- První hlavní minor je $\Delta_1 = \det(1) = 1 > 0$ a odtud tedy žádná podmínka neplyne.
- Dále z podmínky

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2\mu \\ 2\mu & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4\mu^2 > 0$$

máme $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Nakonec máme podmínku

$$\Delta_3 = \det \mathbf{A} = 16\mu^3 - 12\mu^2 + 1 > 0.$$

Když nalezneme kořeny tohoto polynomu, již snadno zjistíme, jaké znaménko mají jeho hodnoty mezi jednotlivými kořeny. Problém je, že jde o kubickou rovnici, kde obecné vzorce pro hledání řešení jsou komplikované.

- Pokusíme se řešení uhodnout. Jde o polynom s celočíselnými koeficienty, takže pokud existuje celočíselné řešení, musí být dělitelem konstantního členu, tj. čísla 1. $\pm 1$ ale řešením nejsou.
- Pomůže nám substituce $\mu = \frac{t}{4}$, po které rovnice přejde na tvar

$$t^3 - 3t^2 + 4 = 0.$$

- Zde uhodneme řešení $t = -1$ a po vydělení dostaneme

$$t^3 - 3t^2 + 4 = (t+1)\left(t^2 - 4t + 4\right) = (t+1)(t-2)^2.$$

nalezení kořenů

Kořeny původního polynomu jsou tedy $\mu = -\frac{1}{4}$ a $\mu = \frac{1}{2}$, který je dvojnásobný.

- Dosazením např. za $\mu = 0$ zjišťujeme, že polynom $\Delta_3$ je kladný mezi pro $\mu \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ a to jsou právě všechny hodnoty $\mu$, pro které je $-q$ PD, tj. $q$ je ND. Snadno totiž také ověříme, že pro $\mu < -\frac{1}{4}$ je již $\Delta_3 < 0$.

*Poznámka:* Místo použití Sylvestrova kritéria lze použít relativně komplikovaný převod na čtverec

$$\begin{aligned} -q(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 + 4\mu(zy + zx + yz) \\ &= (x + 2\mu y + 2\mu z)^2 + \left(1 - 4\mu^2\right)y^2 + \left(1 - 4\mu^2\right)z^2 + \left(4\mu - 8\mu^2\right)yz \\ &= (x + 2\mu y + 2\mu z)^2 + \left(1 - 4\mu^2\right)\left(y + \frac{2\mu - 4\mu^2}{1 - 4\mu^2}z\right)^2 + \left(1 - 4\mu^2 - \frac{\left(2\mu - 4\mu^2\right)^2}{1 - 4\mu^2}\right)z^2 \end{aligned}$$

kde se opět ukazuje, že první čtverec je kladný, druhý je kladný $\iff$ $\Delta_2 > 0$ a úpravami posledního čtverce opět dostaneme polynomiální nerovnost $\Delta_3 > 0$.

vč. určení nerovnic

# Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

9. února 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (10 bodů)

V metrickém prostoru $\left(\mathbb{R}^2, \rho_J\right)$ s modifikovanou skokovou (jump) metrikou definovanou jako

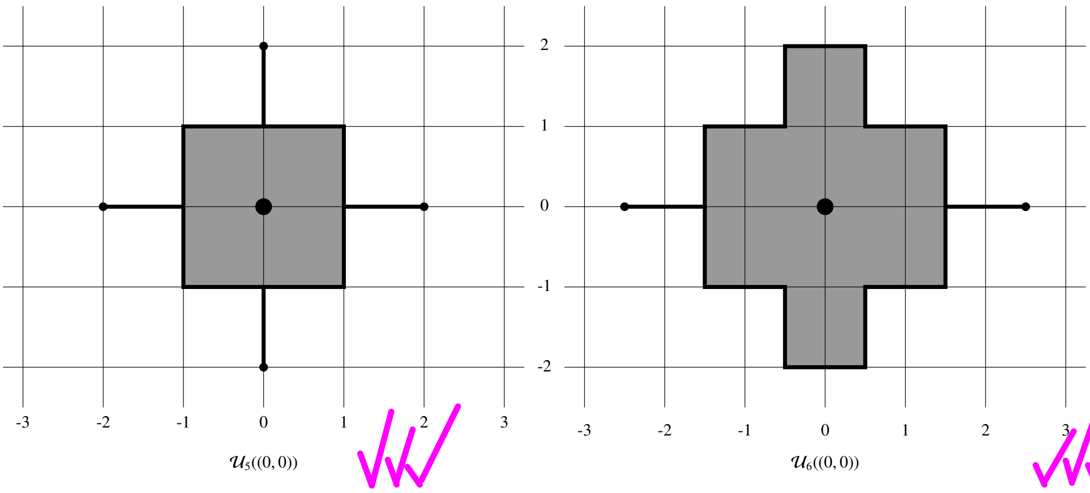
$$\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lceil 2\,|y_1 - x_1| \rceil + 2\,\lceil |y_2 - x_2| \rceil$$

vykreslete tvary okolí $\mathcal{U}_5((0,0))$ a $\mathcal{U}_6((0,0))$ a rozhodněte, zda jsou to v tomto prostoru množiny otevřené či uzavřené.

---

**Řešení 1:**

- Hodnoty metriky $\rho_J$ se mění při překročení celočíselných hodnot na ose $x_2$ a při překročení násobků $\frac{1}{2}$ na ose $x_1$(pozor na to!). Při hledání bodů, které patří do daných okolí, lze postupovat např. takto:
  - Hledáme body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , pro které
  $$\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \lceil 2\,|x_1| \rceil + 2\,\lceil |x_2| \rceil < 5, \text{ resp. } 6.$$
  - Okolí je symetrické vzhledem k zrcadlení podél osy $x_1$ i $x_2$, můžeme se tedy omezit jen na kladný kvadrant.
  - Pro $x_2 = 0$ je hodnota druhého sčítance nejmenší, a to 0. Řešíme tedy nerovnost
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 5, \\ 2x_1 &\leq 4, \\ x_1 &\leq 2, \end{aligned}$$
  respektive
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 6, \\ 2x_1 &\leq 5, \\ x_1 &\leq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
  - Pro $x_2 \in (0, 1\rangle$ je hodnota druhého sčítance rovna 2. Řešíme tedy nerovnost
  $$\lceil 2x_1 \rceil + 2 < 5, \text{ atd.}$$
- Výsledný tvar okolí je vidět na obrázku.




- Pro každý bod $\boldsymbol{x}$ existuje okolí, např $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})$, v němž leží jen on sám.
  - Z toho plyne, že všechny body libovolné množiny se do ní vejdou i se svým okolím, tj. leží také v jejím vnitřku. Libovolná množina v prostoru $\left(\mathbb{R}^2, \rho_J\right)$ je tedy otevřená.
  - Ze stejného důvodu je hranice libovolné množiny prázdná (z definice hraničního bodu $M$, kde v každém jeho okolí leží nějaký bod z $M$ a nějaký mimo $M$). Z definice $\bar{M} = M \cup \mathrm{bd}(M)$ je tedy každá množina zároveň i uzavřená.

# Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

17. února 2016, 9:00 – 11:00

## 1 (16 bodů)

Načrtněte co nejpřesněji kuželosečku, která představuje formální řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$y' = \frac{2y\,(x+2y)}{x^2-8y^2}; \qquad y\,(-2) = 1.$$

*Nápověda:* Při tvorbě náčrtku může pomoci znalost středu kvadriky (pokud existuje), průsečíků s osami (pokud existují), vektorů polární báze, asymptot (pokud existují) apod. Zvažte sami, co z toho se bude nejlépe hodit!

---

**Řešení:**

- Jde o homogenní rovnici stupně 2.
- Protože kuželosečky jsou i přímky, má teoreticky smysl hledat i lineární řešení. Předpokládáme-li $y = Cx$ a dosadíme, dostaneme

$$C = \frac{2C\,(1+2C)}{1-8C^2},$$
$$0 = C\left(8C^2+4C+1\right).$$

když si uvědomí, dát bod navíc (i když je to k ničemu)

Polynom v závorce má záporný diskriminant, takže jediné reálné řešení je $C = 0$, tj. $y = 0$, ale to neprochází bodem $(-2, 1)$.

- Hledáme obecné nelineární řešení substitucí $y = xw \implies y' = w + xw'$. Dosadíme:

$$w + xw' = \frac{2xw\,(x+2xw)}{x^2-8x^2w^2} = \frac{2w\,(1+2w)}{1-8w^2}$$
$$xw' = \frac{2w+4w^2-w+8w^3}{1-8w^2}$$
$$\frac{1-8w^2}{8w^3+4w^2+w} = \frac{1}{x}.$$

- Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\left(\frac{A}{w} + \frac{Bw+C}{8w^2+4w+1}\right)w' = \frac{1}{x}$$

kde po převodu na společného jmenovatele porovnáním čitatelů získáme

$$A\left(8w^2+4w+1\right) + Bw^2 + Cw = 1 - 8w^2,$$

z čehož vychází soustava

$$8A + B = -8, \qquad 4A + C = 0, \qquad A = 1.$$

Z toho okamžitě $(A, B, C) = (1, -16, -4)$. Máme tedy rozklad

$$\left(\frac{1}{w} - \frac{16w+4}{8w^2+4w+1}\right)w' = \frac{1}{x}.$$

- Zintegrujeme (v druhém zlomku je čitatel akorát derivací jmenovatele)

$$\ln|w| - \ln\left|8w^2+4w+1\right| = \ln|x| + \ln C = \ln Cx; \;\; C > 0.$$

Po odlogaritmování a odstranění absolutní hodnoty již lze uvažovat $C \in \mathbb{R}$ (přesně vzato $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$), tj.

$$\frac{w}{8w^2+4w+1} = Cx.$$

- Přejdeme zpět k závisle proměnné $y$

$$\frac{xy}{8y^2+4xy+x^2}=Cx$$
$$C\left(8y^2+4xy+x^2\right)=y.$$

- Z počáteční podmínky $y(-2)=1$ dostáváme $C=\frac{1}{4}$, tj. po dosazení

$$8y^2+4xy+x^2-4y=0.$$

- Dvojitým převodem na čtverec[1] získáváme snadno

$$8y^2+4xy+x^2-4y=(x+2y)^2+4y^2-4y=\Big(\underbrace{x+2y}_{a}\Big)^2+\Big(\underbrace{2y-1}_{b}\Big)^2-1=0$$
$$a^2+b^2=1.$$

  Jde tedy o elipsu.

- Jejím středem je v nových proměnných bod $(0,0)$ (to je notoricky známé - rovnice jednotkové kružnice se středem v počátku), tj. v původních proměnných bod splňující rovnice

$$x_s+2y_s=0,$$
$$2y_s=1.$$

  Z toho $(x_s,y_s)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$. Totéž lze odvodit z rovnice $\mathbf{A}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}$, kde v původních proměnných

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

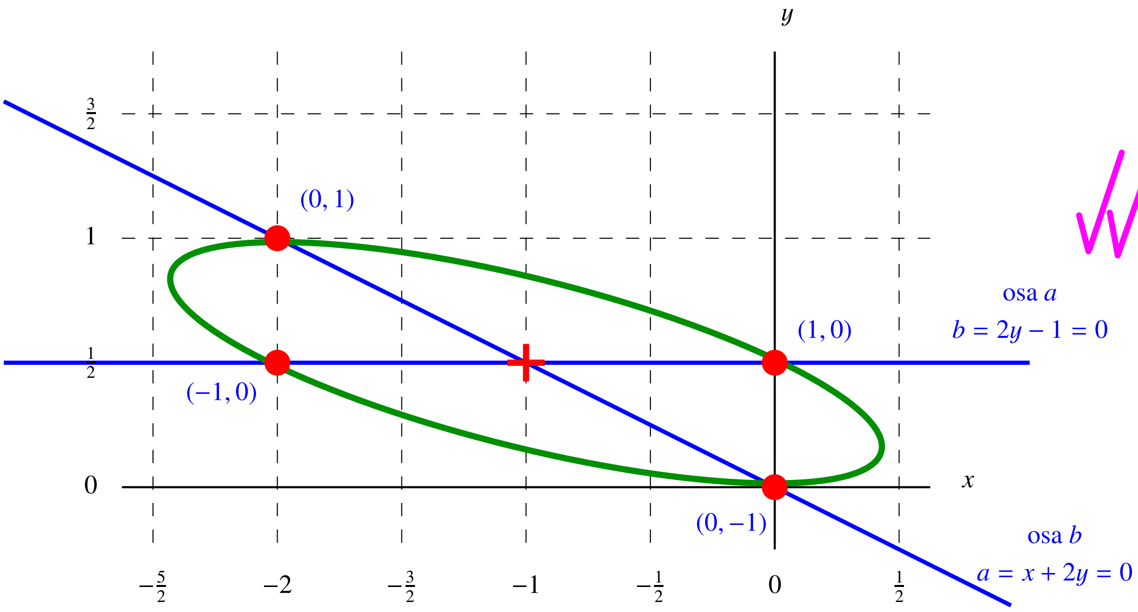
  Abychom elipsu uspokojivě zakreslili, najdeme ještě průsečík s osou $x$ (tj. $y=0$)

$$x^2=0\implies(x,y)=(0,0)$$

  a průsečíky s osou $y$ (tj. $x=0$)

$$8y^2-4y=4y(2y-1)=0\implies(x,y)_1=(0,0)\ \text{a}\ (x,y)_2=\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

  Středová symetrie nám okamžitě umožní určit ještě další dva body ležící na elipse, viz obrázek.




- Z obrázku je vidět i možnost použít k načrtnutí normální tvar a nový souřadný systém $(a,b)$. Červené body jsou totiž zároveň průsečíky „jednotkové kružnice“ s osami $a,b$.

[1] zde provedeno bez obvyklého přechodného označení proměnných po lineární transformaci

# Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

17. února 2016, 9:00 – 11:00

**2** (8 bodů)

Vypočítejte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}.$$

---

**Řešení:**

- Součet má smysl hledat, protože řada konverguje dle podílového kritéria

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5} < 1.$$

- Součet číselné řady budeme hledat jako hodnotu součtu mocninné řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$

v bodě $x = \frac{1}{5}$. Tato řada má střed v nule a poloměr konvergence 1 a lze ji tedy na intervalu obsahujícím bod $\frac{1}{5}$ derivovat i integrovat člen po členu. Poloměr konvergence se tím podle známé věty nemění.

- Označíme

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1}.$$

- Zintegrujeme člen po členu

$$H(x) = \int h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n.$$

- Trik ještě jednou zopakujeme. Označme

$$g(x) = \frac{H(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

- Potom zintegrováním dostaneme už jen geometrickou řadu

$$G(x) = \int g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

- Vrátíme se zpět k funkci $f$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= G'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.\\
H(x) &= xg(x) = \frac{x}{(1-x)^2}\\
h(x) &= H'(x) = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}\\
f(x) &= xh(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

- Dosadíme $x = \frac{1}{5}$ a uzavíráme, že

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n} = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{5}\right)}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{\frac{1}{5}\frac{6}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} = \frac{5\cdot 6}{4^3} = \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4^2} = \frac{15}{32}.$$

# Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

17. února 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (12 bodů)

Nalezněte neznámé vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ v souboru

$$S = \left((-1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)$$

tak, aby platily následující podmínky:

(1) $S$ je polární bází kvadratické formy

$$q(x_1, x_2, x_3) = -2x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3,$$

(2) Při standardním skalárním součinu na $\mathbb{R}^3$ je $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$.

Určete signaturu formy $q$. V závislosti na parametru $\mu \in \mathbb{R}$ poté diskutujte, jakou kvadriku definuje rovnice

$$q(\boldsymbol{x}) - \mu = 0.$$

*Poznámka:* Určení názvu kvadriky v závislosti na $\mu$ je významně hodnoceno. Pokud si nepamatujete názvy podle tvaru $Q$, můžete použít metodu řezů.

---

**Řešení:**

- Matice $q$ je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

- Skutečně platí

$$q\left((-1, 1, -1)^{\mathrm{T}}\right) = (-1, 1, -1)\,\mathbf{A}\,(-1, 1, -1)^{\mathrm{T}} = (0, 1, 2)\,(-1, 1, -1)^{\mathrm{T}} = -1 \in \{0, \pm 1\},$$

  takže má smysl hledat doplnění na polární bázi.

- Začneme vektorem $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$, který musí splňovat podmínku $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{e}_1 \rangle = 0$, což neznamená nic jiného, než že $v_1 = 0$. Složky $v_2, v_3$ již určíme z podmínky $q$-ortogonality a $q$-normalizační podmínky.
  - má platit

  $$0 \overset{!}{=} qq\left((-1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}\right) = (-1, 1, -1)\,\mathbf{A}\,(0, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} = (0, 1, 2)\,(0, v_2, v_3)^{\mathrm{T}} = v_2 + 2v_3$$

    a z toho máme $v_2 = -2v_3$. Lze tedy psát $\boldsymbol{v} = \alpha\,(0, -2, 1)$ kde $\alpha = v_3$ je neznámé číslo.
  - Dosazením do normalizační podmínky dostáváme

  $$q(\boldsymbol{v}) = (0, -2, 1)\,\mathbf{A}\,(0, -2, 1)^{\mathrm{T}} \alpha^2 = (-1, 0, 1)\,(0, -2, 1)^{\mathrm{T}} \alpha^2 = \alpha^2 \overset{!}{=} +1$$

    (kvadrát nemůže být záporný a nemůže být ani nulový, jinak by $\alpha = 0$, tj. $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ by nemohl být součástí báze. Proto $\alpha = \pm 1$ a lze tedy volit např.

  $$\boldsymbol{v} = (0, -2, 1)^{\mathrm{T}}.$$

- Vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je již určen jednoznačně dvěma podmínkami $q$-ortogonality a jednou normalizační podmínkou
  - $0 \overset{!}{=} qq\left((-1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}\right) = u_2 + 2u_3 \implies u_2 = -2u_3.$
  - $0 \overset{!}{=} qq(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = qq\left((0, -2, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}\right) = (0, -2, 1)\,\mathbf{A}\boldsymbol{u} = (-1, 0, 1)\,\boldsymbol{u} \implies u_1 = u_3$
  - Vektor $\boldsymbol{u}$ je tedy tvaru $\boldsymbol{u} = \beta\,(1, -2, 1)$. Dosazením do normalizační podmínky dostáváme

  $$q(\boldsymbol{u}) = (1, -2, 1)\,\mathbf{A}\,(1, -2, 1)^{\mathrm{T}} \beta^2 = (-1, 1, 2)\,(1, -2, 1)^{\mathrm{T}} \beta^2 = -\beta^2 \overset{!}{=} -1$$

    (argument je stejný jako u podmínky pro $\boldsymbol{v}$). Proto $\beta = \pm 1$ a lze volit např.

  $$\boldsymbol{u} = (1, -2, 1).$$

- Hodnoty $q$ aplikované na vektory polární báze okamžitě určují signaturu $\operatorname{sq}(q) = (1, 2, 0)$.

- Normální tvar $q$ je tedy

$$q(\boldsymbol{y}) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

- Rovnice kvadriky je (převedená tak, aby počet kladných čtverců byl vyšší než počet záporných)

$$y_2^2 + y_3^2 - y_1^2 = -\mu.$$

- Dostáváme následující klasifikaci kvadrik (jejich tvar lze snadno zjistit metodou řezů):

$\mu = 0$ kužel,
$\mu < 0$ jednodílný hyperboloid,
$\mu > 0$ dvoudílný hyperboloid.

# Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

17. února 2016, 9:00 – 11:00

## 4 (9 bodů)

Nechť jsou v pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ definována zobrazení

$$\omega_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lfloor 2|y_1 - x_1| \rfloor + 2\lfloor |y_2 - x_2| \rfloor,$$
$$\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lceil 2|y_1 - x_1| \rceil + 2\lceil |y_2 - x_2| \rceil.$$

Ověřte, zda $\omega_J$ a $\rho_J$ jsou metriky, a postup detailně komentujte.

---

**Řešení:**

- Ověříme, zda zobrazení $\omega_J$ a $\rho_J$ splňují axiomy metriky:
- Symetrie (invariance vůči záměně $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$) je u obou zobrazení splněna zřejmě.
- Nulovost ($\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$) splňuje pouze $\rho_J$:
  - Zřejmě platí $\omega_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$.
  - Jestliže $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, pak alespoň jeden z rozdílů $x_1 - y_1$ a $x_2 - y_2$ je různý od nuly a horní celá část z jeho absolutní hodnoty je rovna alespoň 1. Proto $\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$.
  - Naproti tomu, pokud platí $|x_1 - y_1| < \frac{1}{2}$ a $|x_2 - y_2| < 1$, potom $\omega_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.
- $\rho_J$ ještě může být metrikou, platí-li trojúhelníková nerovnost

$$\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq \rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \rho_J(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2, \text{ tj.}$$

$$\lceil 2|z_1 - x_1| \rceil + 2\lceil |z_2 - x_2| \rceil \leq \lceil 2|y_1 - x_1| \rceil + 2\lceil |y_2 - x_2| \rceil + \lceil 2|z_1 - y_1| \rceil + 2\lceil |z_2 - y_2| \rceil.$$

Nutnou a postačující podmínkou je platnost nerovností pro jednotlivé složky zvlášť, tj.

$$\lceil 2|z_1 - x_1| \rceil \leq \lceil 2|y_1 - x_1| \rceil + \lceil 2|z_1 - y_1| \rceil,$$
$$2\lceil |z_2 - x_2| \rceil \leq 2\lceil |y_2 - x_2| \rceil + 2\lceil |z_2 - y_2| \rceil.$$

Označíme-li $a = y_2 - x_2$, $b = z_2 - y_2$ (resp. $a = 2(y_1 - x_1)$, $b = 2(z_1 - y_1)$), je třeba dokázat pouze nerovnost

$$\lceil |a + b| \rceil \leq \lceil |a| \rceil + \lceil |b| \rceil \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

S použitím trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu máme

$$\lceil |a + b| \rceil \leq \lceil |a| + |b| \rceil$$

a postačující podmínkou tedy je

$$\lceil |a| + |b| \rceil \leq \lceil |a| \rceil + \lceil |b| \rceil \qquad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

neboli

$$\lceil c + d \rceil \leq \lceil c \rceil + \lceil d \rceil \qquad \forall c, d \geq 0.$$

Nechť $c = m + \varepsilon$, $d = n + \delta$ kde $m, n \in \mathbb{N}_0$ a $\varepsilon, \delta \in \langle 0, 1)$. BÚNO rozlišíme 3 případy:

(1) Pokud $\varepsilon = \delta = 0$, pak nerovnost přejde na rovnost: $\lceil c + d \rceil = (m + n)$ i $\lceil c \rceil + \lceil d \rceil = m + n$.
(2) Pokud $\varepsilon > 0$ a $\delta = 0$, pak platí opět rovnost: $\lceil c + d \rceil = (m + n) + 1$ a $\lceil c \rceil + \lceil d \rceil = (m + 1) + n$.
(3) Pokud $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$, pak $\lceil c + d \rceil = (m + n) + 1$ nebo $\lceil c + d \rceil = (m + n) + 2$ (podle toho, zda $\varepsilon + \delta \leq 1$ nebo ne), a $\lceil c \rceil + \lceil d \rceil = (m + 1) + (n + 1)$, takže nerovnost je i tentokrát splněna.

- Zjistili jsme tedy, že $\rho_J$ metrikou je, ale $\omega_J$ není.

# Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

17. února 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (7 bodů)

Nalezněte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou platí

$$f(1) = 6,\ f'(1) = 5,\ f''(1) = 4,\ f'''(1) = 3$$

a dále

$$f^{(k)}(1) = 2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}, k > 3.$$

---

**Řešení:**

- Jestliže taková funkce existuje a její Taylorova řada se středem v bodě $x = 1$ k ní konverguje, platí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

kde hodnoty $f^{(n)}(1)$ známe. Pokusme se tedy danou řadu sečíst.

- Po dosazení máme

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 + 5(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{3}{3!}(x-1)^3 + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2}{n!}(x-1)^n \\ &= (4-2) + (5-2)(x-1) + \frac{4-2}{2!}(x-1)^2 + \frac{3-2}{3!}(x-1)^3 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n \\ &= 4 + 3(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + 2e^{x-1}. \end{aligned}$$

Tato rovnost skutečně platí $\forall x \in \mathbb{R}$. (známe vlastnosti Maclaurinova rozvoje funkce $e^x$).

# Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

10. května 2016, 9:20 – 11:20

## 1 (12 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$2x + x^2 - 6y - 2xy + 2y^2 + 4z - 4xz - 2yz + 12z^2 = 0$$

určete hlavní a vedlejší signaturu a normální tvar včetně afinní transformace

$$(x, y, z)^T = \mathbf{M}\,(a, b, c)^{\mathrm{T}} + (r, s, t)^{\mathrm{T}},$$

která ji na tento tvar převádí. Jaký je název této kvadriky?
*Poznámka:* Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují!

---

**Řešení:**

- Převod kvadratické formy na čtverec

$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xz - 2yz + 12z^2 = (x-y-2z)^2 + y^2 + 8z^2 - 6yz$$
$$= \Big(\underbrace{x-y-2z}_{\xi}\Big)^2 + \Big(\underbrace{y-3z}_{\eta}\Big)^2 - \underbrace{z}_{\lambda}{}^2 = \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2$$

- Transformace má tedy tvar

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\mathbf{M}}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \lambda\end{pmatrix}.$$

- Dosadíme do $Q$:

$$Q(\xi,\eta,\lambda) = \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2 + 2(\xi + \eta + 5\lambda) - 6(\eta + 3\lambda) + 4\lambda$$
$$= \xi^2 + \eta^2 - \lambda^2 + 2\xi - 4\eta - 4\lambda = 0$$

- Nalezneme posunutí druhým převodem na čtverec

$$Q(\xi,\eta,\lambda) = \Big(\underbrace{\xi+1}_{a}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\eta-2}_{b}\Big)^2 - \Big(\underbrace{\lambda+2}_{c}\Big)^2 - 1 = 0$$

- Normální tvar tedy je

$$Q(a,b,c) = a^2 + b^2 - c^2 - 1 = 0.$$

- Posunutí lze vyjádřit jako

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix},$$

  takže pro transformaci mezi $(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ a $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ platí

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-9\\ -4\\ -2\end{pmatrix}.$$

- Rozšířená kvadratická forma je (vycházíme z normálního tvaru $Q$)

$$q_0(a,b,c,d) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

  Pro **signatury** tedy platí

$$\mathrm{SG}(Q) = (2,2,0),\quad \mathrm{sg}(Q) = (2,1,0).$$

- Jde o **jednodílný hyperboliod**.

# Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

10. května 2016, 9:20 – 11:20

## 2 (11 bodů)

Nalezněte součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 2n}.$$

---

**Řešení 1:**

- Považujme danou číselnou řadu za mocninnou řadu
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n}$$
v bodě $x = 1$.
- Tato řada pro $x = 1$ konverguje absolutně, neboť lze srovnat s řadou $\sum \frac{1}{n^2}$:
$$\left|\frac{(-1)^n}{2n^2 - n}\right| = \frac{1}{2n^2 - n} < \frac{1}{2n^2 - n^2} = \frac{1}{n^2}.$$
- Derivováním člen po členu dostaneme
$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1}$$
$$s''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = -\frac{1}{1+x^2}$$
kde poslední řada je jen geometrická řada s kvocientem $q = -x^2$, která má mimochodem obor konvergence jen $x \in (-1, 1)$.
- Zpětně zintegrujeme
$$s'(x) = -\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = -\arctan x + C$$
a určíme konstantu $C$ dosazením $x = 0$. Dostaneme $C = 0$.
- Další integrací dostaneme
$$s(x) = -\int \arctan x \mathrm{d}x = \left[ \text{p.p.} \quad \begin{matrix} u = \arctan x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{matrix} \right] = -x \arctan x + \int \frac{x \mathrm{d}x}{1+x^2}$$
$$= -x \arctan x + \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + D$$
a opět dosazením $x = 0$ dostaneme $D = 0$.
- Platí tedy
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 2n} = s(1) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + 1^2\right) - 1 \cdot \arctan 1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

**Řešení 2:**

- Rozkladem na parciální zlomky zjistíme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n-1}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4},$$
protože na druhém řádku rozpoznáme rozvoj $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ v bodě $x = 1$ a rozvoj $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ v bodě $x = 1$.

**Řešení 3:**

- Podobně jako v **řešení č. 1** považujme danou číselnou řadu za mocninnou řadu
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n-1}$$
v bodě $x = 1$. (Všimněte si, že nyní máme mocninu $x^{2n-1}$ místo $x^{2n}$)
- Tato řada konverguje absolutně, viz **řešení č. 1**.
- Derivováním člen po členu dostaneme
$$s'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n-2} = -\frac{1}{2x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(x^2\right)^n = -\frac{1}{2x^2} \ln\left(1 + x^2\right)$$
s oborem konvergence $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
- Zpětnou integrací dostaneme
$$s(x) = -\int \frac{1}{2x^2} \ln\left(1 + x^2\right) \mathrm{d}x = \left[ \text{p.p.} \quad \begin{array}{ll} u = \ln\left(1+x^2\right) & v' = -\frac{1}{x^2} \\ u' = \frac{2x}{1+x^2} & v = \frac{1}{x} \end{array} \right]$$
$$= \frac{1}{2x} \ln\left(1 + x^2\right) - \int \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2x} \ln\left(1 + x^2\right) - \arctan x + C.$$
- Abychom určili hodnotu integrační konstanty $C$, musíme umět sečíst řadu alespoň pro jedno $x$. My to umíme jen pro $x = 0$, ale to nelze do získaného tvaru funkce $s(x)$ dosadit. Můžeme však využít spojitosti součtu. Proto platí
$$s(0) = \lim_{x \to 0+} s(x) = \lim_{x \to 0+} \left( \frac{1}{2x} \ln\left(1 + x^2\right) - x \arctan x + C \right)$$
$$= \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2x} \ln\left(1 + x^2\right) + 0 + C = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0+} x \underbrace{\frac{1}{x^2} \ln\left(1 + x^2\right)}_{\to 1} + 0 + C = C.$$
Dosazením $x = 0$ přímo do sumy a porovnáním pak získáme $C = 0$.
- Platí tedy (srovnej s **řešením 1**)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 2n} = s(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} \ln\left(1 + 1^2\right) - \arctan 1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}.$$

# Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

10. května 2016, 9:20 – 11:20

## 3 (9 bodů)

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice

$$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 8x^3e^{2x}.$$

*Nápověda:* Můžete použít fakt, že příslušnou rovnici s nulovou pravou stranou řeší funkce $v(x) = x$.

---

**Řešení:**

- Provedeme snížení řádu substitucí $y(x) = v(x)z(x)$, tj.

$$y(x) = zx.$$
$$y'(x) = z'x + z.$$
$$y''(x) = z''x + 2z'.$$

- Dosadíme do rovnice. Není nutné mnoho psaní, pokud se budeme ptát, s jakým koeficientem se ve výsledné rovnici vyskytuje $z'', z', z$.
  - koef. u $z''$ je $x^2x = x^3$ (to je nejsnazší),
  - koef. u $z'$ je $x^2 \cdot 2 - 2x(1+x)\cdot x = -2x^3$,
  - koef. u $z$ je $-2x(1+x) + 2(1+x)x = 0$.
- **Výsledná rovnice** tedy je

$$x^3(z'' - 2z') = 8x^3e^{2x},$$
$$z'' - 2z' = 8e^{2x}.$$

- Rovnici lze vyřešit rovnou jako LDR s konst. koef. a speciálním tvarem pravé strany:
  - Charakteristický polynom je $\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2)$.
  - Jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.
  - FS $= \left\{1, e^{2x}\right\}$,
  - Partikulární řešení hledáme dle příslušné věty ve tvaru $z_p(x) = P(x)x^ke^{\beta x} = axe^{2x}$ kde $a$ představuje polynom stupně nula a $k = 1$ je násobnost čísla $\beta = 2$ jakožto kořene charakteristického polynomu.
  - Zderivujeme: $z_p' = a(1+2x)e^{2x}$, $z_p'' = 4a(1+x)e^{2x}$ a po dosazení do rovnice dostáváme $a = 4$.
  - Obecné řešení má tedy tvar

$$z(x) = C + De^{2x} + 4xe^{2x},$$
$$y(x) = Cx + Dxe^{2x} + 4x^2e^{2x}, \quad I = \mathbb{R}.$$

- Lze také skutečně snížit řád a řešení hledat pomocí integračního faktoru:
  - Def. $w = z'$ a máme rovnici $w' - 2w = 8e^{2x}$.
  - Integrační faktor je $e^{P(x)}$ kde $P(x) = \int p(x)\,dx = -2x$.
  - Vynásobíme tedy $e^{-2x}$ a dostaneme $\left(we^{-2x}\right)' = 8$.
  - Zintegrujeme $we^{-2x} = 8x + A$ a získáme

$$w(x) = 8xe^{2x} + Ae^{2x}.$$

  - Znovu zintegrujeme

$$z(x) = \int w(x)\,dx = A\int e^{2x}dx + 8\int xe^{2x}dx = \left[\begin{array}{lll} \text{pp.} & u = x & v' = e^{2x} \\ & u' = 1 & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]$$
$$= \frac{A}{2}e^{2x} + 4xe^{2x} - 4\int e^{2x}dx = \underbrace{\left(\frac{A}{2} - 2\right)}_{D}e^{2x} + 4xe^{2x} + C.$$

  - Nakonec vynásobíme $x$ a dostaneme opět

$$y(x) = Cx + Dxe^{2x} + 4x^2e^{2x}, \quad I = \mathbb{R}.$$

# Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

10. května 2016, 9:20 – 11:20

## 4 (6 bodů)

Heavisideova funkce $\theta$ je definována jako

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Nechť je zadán metrický prostor $(\mathbb{R}^2, \rho)$ s metrikou definovanou vztahem

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_2 - y_2| + \theta(|x_1 - y_1|).$$

Vykreslete tvar okolí $\mathcal{U}_1((2,3))$ a rozhodněte, zda v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho)$ platí implikace

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}\right) \implies (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}).$$

Svoje tvrzení správně zdůvodněte.

---

**Řešení:**

- Z definice platí
$$\mathcal{U}_1((2,3)) = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \rho((x_1, x_2), (2,3)) < 1\right\}.$$
- Je zřejmé, že pokud $x_1 \neq 2$, pak díky Heavisidově funkci bude $\rho((x_1, x_2), (2,3)) \geq 1$. Hledané okolí tedy bude podmnožinou přímky $x_1 = 2$.
- Po dosazení $x_1 = 2$ dostáváme
$$\mathcal{U}_1((2,3)) = \left\{(2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \rho((2, x_2), (2,3)) = |x_2 - 3| < 1\right\}.$$
- Dané okolí je tedy úsečka spojující body (2, 2) a (2, 4), kromě koncových bodů.
- Zadaná implikace říká, že v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho)$ konvergují jen posloupnosti, které jsou od jistého $n_0$ konstantní. To však není pravda. K nalezení protipříkladu se lze inspirovat obrázkem okolí $\mathcal{U}_1(2,3)$. Například platí
$$\lim_{n\to\infty}\left(2, 3 + \frac{1}{n}\right) = (2,3),$$
protože
$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\left(2, 3 + \frac{1}{n}\right), (2,3)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left|3 + \frac{1}{n} - 3\right| = 0.$$

# Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB3

10. května 2016, 9:20 – 11:20

## 5 (12 bodů)

S použitím vhodných znalostí z teorie mocninných a Taylorových řad odvoďte tvar Maclaurinových řad funkcí $f(x) = \sin x$ a $g(x) = \operatorname{arctan} x$. Odvoďte rovněž příslušné obory konvergence a dokažte, že součty těchto řad jsou na jejich oborech konvergence skutečně rovny funkcím $f(x)$ a $g(x)$.

---

**Řešení:**

- Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \sin x$ lze odvodit z definice - jako mocninnou řadu s koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- Snadným výpočtem hodnot derivací funkce $\sin x$ v bodě 0 dostáváme řadu
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$
- Pro důkaz rovnosti
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ \forall x \in \mathbb{R}$$
použijeme Taylorův vzorec $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$ a Lagrangeův tvar zbytku
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
kde $\xi$ leží mezi středem rozvoje (tj. nulou) a $x$. Maclaurinova řada v bodě $x$ konverguje k $f(x)$, právě když $\lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(x) = 0$. V našem případě tomu tak je pro každé $x \in \mathbb{R}$, protože $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1$ nezávisle na $n$ a $x$ a dále
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R},$$
což lze zjistit snadno např. podílovým kritériem pro limity posloupností.
- Z uvedeného již víme, že obor konvergence je $\mathbb{R}$, ale lze jej zjistit i výpočtem poloměru konvergence. Při označení $t = x^2$ máme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n$$
a
$$L_t = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 \implies R_t = +\infty \implies t \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{R}.$$
- Maclaurinovu řadu funkce $g(x) = \operatorname{arctan} x$ odvodíme z tvaru geometrické řady s kvocientem $q = -x^2$. Platí
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \ \forall x \in (-1,1).$$
- Podle věty o integraci řady člen po členu platí rovnost
$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = g(x) + C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \ \forall x \in (-1,1),$$
protože poloměr konvergence se integrací člen po členu nemění.
- Dosazením $x = 0$ dostáváme $C = 0$.
- Rovnost máme tedy již dokázánu a z jednoznačnosti Taylorova rozvoje plyne, že se skutečně jedná o Maclaurinovu řadu funkce $g$.
- Z Leibnizova kritéria plyne, že oborem konvergence zintegrované řady je $\langle -1, 1\rangle$.
- V krajních bodech plyne rovnost řady a funkce $g$ ze spojitosti $g$ i součtu řady na celém oboru konvergence.

# Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB3

25. května 2016, 9:00 – 11:00

## 1 (11 bodů)

Řešte Cauchyovu úlohu

$$x^4y''' - 2x^3y'' - 8x^2y' + 20xy = 72, \qquad y(1) = 8, \qquad y'(1) = -2, \qquad y''(1) = 64.$$

*Nápověda:* Možná vám pomůže číslo 2.

---

**Řešení:**

- Vydělíme rovnici $x$, abychom dostali Eulerovu rovnici

$$x^3y''' - 2x^2y'' - 8xy' + 20y = \frac{72}{x}$$

- Vzhledem k zadání počátečních podmínek v bodě $x = 1$ použijeme substituci pro $x \in (0, +\infty)$, tj.

$$x = e^t, \; t = \ln x.$$

- Vypočítáme derivace

$$y' = \dot{y}\frac{1}{x}, \; y'' = \frac{1}{x^2}(\ddot{y} - \dot{y}), \; y''' = \frac{1}{x^3}\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right).$$

- Dosazením získáme lineární DR

$$\dddot{y} - 5\ddot{y} - 4\dot{y} + 20y = 72e^{-t}.$$

- Charakteristický polynom je

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$$

  a jeden jeho kořen je $\lambda_1 = 2$ (viz nápověda). Vydělením

$$\left(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 4\lambda + 20\right) : (\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 10$$

  pak snadno dostaneme zbylé kořeny $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -2$.
- Fundamentální systém je tedy

$$\mathrm{FS} = \left\{e^{2t}, e^{5t}, e^{-2t}\right\}.$$

- Řešení rovnice s pravou stranou lze získat použitím vět o speciálním tvaru pravé strany. Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(t) = ae^{-t}.$$

  Snadno dostáváme

$$\dot{y}_p(t) = -ae^{-t}, \; \ddot{y}_p(t) = ae^{-t}, \; \dddot{y}_p(t) = -ae^{-t}$$

  a dosazením do rovnice máme

$$a(-1 - 5 + 4 + 20)e^{-t} = 72e^{-t} \implies 18a = 72 \implies a = 4.$$

- Obecné řešení LDR je tedy

$$y(t) = Ce^{2t} + De^{5t} + Ee^{-2t} + 4e^{-t}$$

  a po přechodu zpět k proměnné $x$ dostáváme

$$y(x) = Cx^2 + Dx^5 + \frac{E}{x^2} + \frac{4}{x}; \; x > 0.$$

- Zbývá určit integrační konstanty. Zderivujeme

$$y' = 2Cx + 5Dx^4 - 2E\frac{1}{x^3} - 4\frac{1}{x^2},$$
$$y'' = 2C + 20Dx^2 + 6E\frac{1}{x^4} + 8\frac{1}{x^3}.$$

a dosazením do počátečních podmínek získáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C + D + E + 4 &= 8, \\ 2C + 5D - 2E - 4 &= -2, \\ 2C + 20D + 6E + 8 &= 64 \end{aligned}$$

s řešením $(C, D, E) = (-1, 2, 3)$. Řešením úlohy je tedy funkce

$$y(x) = -x^2 + 2x^5 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x};\ x > 0.$$

# Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB3

25. května 2016, 9:00 – 11:00

## 2 (11 bodů)

Vypočítejte

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 x^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^4} \mathrm{d}x.$$

Nezapomeňte ověřit, že všechny provedené úpravy jsou platné.
*Nápověda:* Platí $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

---

**Řešení:**

- Kdyby bylo možné zaměnit integrál a sumu, platilo by

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n^4 x^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^4} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} n^4 x^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^7} \mathrm{d}x = \frac{4}{7^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{+\infty} \frac{7}{4} n^4 x^4 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^7} 7n^4x^3 \mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \frac{7}{4}n^4x^4 \\ \mathrm{d}u = 7n^4x^3\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{4}{7^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{4}{7^2} \frac{\pi^4}{90} \left( [-u\mathrm{e}^{-u}]_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u \right) = \frac{4}{7^2} \frac{\pi^4}{90} = \frac{2}{49} \frac{\pi^4}{45}.$$

- Nyní ověříme předpoklady postačující podmínky záměnnosti sumy a integrálu, tj. stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 x^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^4}$$

na intervalu $(0, +\infty)$.

- Použijeme Weierstrassovo kritérium a najdeme konvergentní číselnou majorantu k této řadě. Bude to dokonce nejlepší možná majoranta

$$a_n = \max_{(0,+\infty)} f_n(x) \text{ kde } f_n(x) = n^4 x^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^4}.$$

- Zřejmě $f_n(x) \geq 0$, $f_n(0) = 0$ a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, takže hledané maximum bude lokálním extrémem $f$ na $(0, +\infty)$.
- Zderivujeme

$$f_n'(x) == n^4 \left( 7x^6 - x^7 \cdot \frac{7}{4} n^4 4x^3 \right) \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4x^3} = 0,$$

$$1 - x^4n^4 = 0,$$

$$x = \frac{1}{n}.$$

- Platí tedy

$$a_n = \max_{(0,+\infty)} f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) = n^4 \left(\frac{1}{n}\right)^7 \mathrm{e}^{-\frac{7}{4}n^4\left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{1}{n^3}\mathrm{e}^{-\frac{7}{4}}$$

a majorantní řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je zřejmě konvergentní (např. dle integrálního kritéria). Tím je platnost záměny sumy a integrálu potvrzena.

# Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB3

25. května 2016, 9:00 – 11:00

## 3 (12 bodů)

Rozhodněte, zda kvadratická forma

$$q(x,y,u,v) = -2v^2 + 2uv + 5u^2 - 6ux + 2x^2 - 4uy - 8vy + 2xy - y^2$$

může mít polární bázi ve tvaru

$$B_P = \left\{(1,0,1,0)^T, (2,1,2,-1)^T, (7,2,5,-1)^T, \boldsymbol{w}\right\}.$$

Pokud ano, určete neznámý vektor $\boldsymbol{w}$ a stanovte signaturu formy $q$.
*Poznámka:* Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují!

---

**Řešení:**

- Kvadratická forma $q(x,y,u,v) = (x,y,u,v)\,\mathbf{A}\,(x,y,u,v)^T$ má matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Nejprve ověříme, zda zadané vektory splňují podmínky $q$-ortogonality a $q$- normalizační podmínky. Platí

$$(1,0,1,0)\,\mathbf{A}\,(2,1,2,-1)^T = 0, \qquad (1,0,1,0)\,\mathbf{A}\,(1,0,1,0)^T = 1,$$
$$(1,0,1,0)\,\mathbf{A}\,(7,2,5,-1)^T = 0, \qquad (2,1,2,-1)\,\mathbf{A}\,(2,1,2,-1)^T = 1,$$
$$(2,1,2,-1)\,\mathbf{A}\,(7,2,5,-1)^T = 0, \qquad (7,2,5,-1)\,\mathbf{A}\,(7,2,5,-1)^T = 1,$$

- Podmínky jsou tedy splněny a už nyní je vidět, že forma $q$ v normálním tvaru obsahuje alespoň 3 kladné čtverce, tj. kladný index setrvačnosti je alespoň 3. Pro určení signatury zbývá určit koeficient před posledním čtvercem a jak se ukáže, nebude kvůli tomu nutné provádět Lagrangeův algoritmus.
- Poslední vektor polární báze $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ musí splňovat podmínky $q$-ortogonality, tj.

$$(1,0,1,0)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = -w_1 - w_2 + 2w_3 + w_4 = 0,$$
$$(2,1,2,-1)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = -w_1 + w_2 + w_3 = 0,$$
$$(7,2,5,-1)\,\mathbf{A}\boldsymbol{w} = w_1 - w_2 - w_3 - w_4 = 0.$$

  *Tento výpočet lze provést před ověřováním podmínek výše a pak dosadit za* $\boldsymbol{w}$ *příslušné vektory, čímž si ušetříme opakované násobení maticí* $\mathbf{A}$ *a všechny podmínky lze ověřit v podstatě z hlavy.*
- Sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme $w_4 = 0$, z první a druhé rovnice pak $w_3 = 2w_2$, $w_1 = 3w_2$. Vektor $\boldsymbol{w}$ má tedy tvar

$$\boldsymbol{w} = (3,1,2,0)\,w_2.$$

- Dosazením do normalizační podmínky dostáváme

$$q(\boldsymbol{w}) = (3,1,2,0)\,w_2\mathbf{A}\,(3,1,2,0)^T\,w_2 = -w_2^2 = -1.$$

  Z tvaru $q(\boldsymbol{w})$ je zřejmé, že pravá strana může být rovna pouze $-1$. Pochopitelně nemůže být rovna 1 a nemůže být ani nulová, protože pak by vyšlo $w_2 = 0$ a z toho $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$.
- Známe tedy znaménko posledního čtverce a můžeme uzavřít

$$\operatorname{sg}(q) = (3,1,0).$$

vč. zdůvodnění lib. způsobem

- Platí $w_2 = \pm 1$ a tedy

$$\boldsymbol{w} = \pm(3,1,2,0).$$

# Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB3

25. května 2016, 9:00 – 11:00

## ❹ (10 bodů)

V metrickém prostoru $\left(\mathbb{R}^2, \rho_J\right)$ s modifikovanou skokovou (jump) metrikou definovanou jako

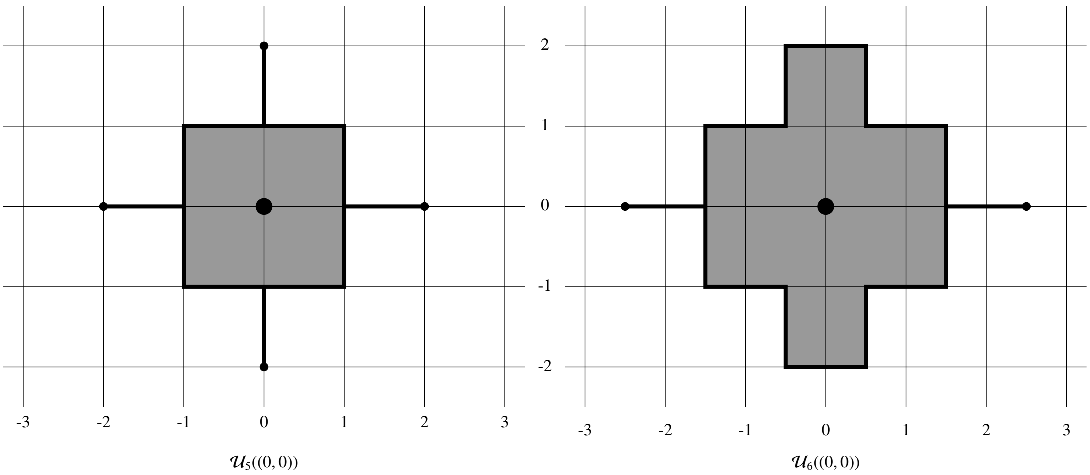
$$\rho_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lceil 2\,|x_1 - y_1| \rceil + 2\,\lceil |x_2 - y_2| \rceil$$

vykreslete tvary okolí $\mathcal{U}_5((0,0))$ a $\mathcal{U}_6((0,0))$ a rozhodněte, zda jsou to v tomto prostoru množiny otevřené či uzavřené.

---

**Řešení:**

- Hodnoty metriky $\rho_J$ se mění při překročení celočíselných hodnot na ose $x_2$ a při překročení násobků $\frac{1}{2}$ na ose $x_1$(pozor na to!). Při hledání bodů, které patří do daných okolí, lze postupovat např. takto:
  - Hledáme body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , pro které
  $$\rho_J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \lceil 2\,|x_1| \rceil + 2\,\lceil |x_2| \rceil < 5, \text{ resp. } 6.$$
  - Okolí je symetrické vzhledem k zrcadlení podél osy $x_1$ i $x_2$, můžeme se tedy omezit jen na kladný kvadrant.
  - Pro $x_2 = 0$ je hodnota druhého sčítance nejmenší, a to 0. Řešíme tedy nerovnost
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 5, \\ 2x_1 &\le 4, \\ x_1 &\le 2, \end{aligned}$$
  respektive
  $$\begin{aligned} \lceil 2x_1 \rceil &< 6, \\ 2x_1 &\le 5, \\ x_1 &\le \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
  - Pro $x_2 \in (0, 1\rangle$ je hodnota druhého sčítance rovna 2. Řešíme tedy nerovnost
  $$\lceil 2x_1 \rceil + 2 < 5, \text{ atd.}$$
- Výsledný tvar okolí je vidět na obrázku.




- Pro každý bod $\boldsymbol{x}$ existuje okolí, např $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})$, v němž leží jen on sám.
  - Z toho plyne, že všechny body libovolné množiny se do ní vejdou i se svým okolím, tj. leží také v jejím vnitřku. Libovolná množina v prostoru $\left(\mathbb{R}^2, \rho_J\right)$ je tedy otevřená.
  - Ze stejného důvodu je hranice libovolné množiny prázdná (z definice hraničního bodu $M$, kde v každém jeho okolí leží nějaký bod z $M$ a nějaký mimo $M$). Z definice $\bar{M} = M \cup \mathrm{bd}(M)$ je tedy každá množina zároveň i uzavřená.

# Zkoušková písemná práce č. 7 z předmětu 01MAB3

25. května 2016, 9:00 – 11:00

## 5 (6 bodů)

Označme symbolem $\mathcal{A}$ množinu všech omezených funkcí $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí:

(1) Zobrazení

$$N(f) := \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |f(x)|$$

je normou na $\mathcal{A}$.

(2) Bilineární forma

$$H(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

je skalárním součinem na $\mathcal{A}$.

Svá tvrzení detailně odůvodněte.

---

**Řešení:**

(1) Ověříme axiomy normy:

- nulovost

$$N(f) = 0 \iff \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |f| = 0 \iff (\forall x \in \langle -1, 1\rangle)(|f(x)| \le 0) \iff (\forall x \in \langle -1, 1\rangle)(f(x) = 0),$$

- homogenita

$$N(\alpha f) = \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |\alpha f| = \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |\alpha|\,|f| \overset{\text{snadno z def. suprema}}{=} |\alpha| \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |f| = |\alpha|\, N(f),$$

- trojúhelníková nerovnost

$$N(f+g) = \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} |f(x) + g(x)| \overset{\triangle\text{-nerovnost pro abs. hodnotu}}{=} \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} \Big( \underbrace{|f(x)|}_{\le N(f)} + \underbrace{|g(x)|}_{\le N(g)} \Big)$$

$$\le \sup_{x\in\langle -1,1\rangle} (N(f) + N(g)) = N(f) + N(g).$$

Zobrazení $N : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ je tedy normou na $\mathcal{A}$.

(2) Ověříme axiomy skalárního součinu:

- Je zřejmé, že není splněn axiom nulovosti skalárního součinu. Např. pro nenulovou funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}$$

platí

$$H(f,f) = \int_{-1}^{1} f^2(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Zobrazení $H : \mathcal{A}\times\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tedy není skalárním součinem na $\mathcal{A}$.