

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4-\lambda & 0 \\ 9 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 9) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 9) \cdot (16 + 8\lambda + \lambda^2 - 4) = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 8\lambda + 12) =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda + 3)(\lambda + 2)(\lambda + 6)$$

$$\Rightarrow \text{vektorne' dila joru: } 3, -3, -2, -6 \checkmark$$

Vektorove' spektrum:

$$\vec{\sigma}(q) = (3; -2; -3; -6) \checkmark$$

Typ determinantsi: indekivitu', tj. $g(x, y, R, w) \Delta \Delta 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(3m-1)!!!}{m!} (x+1)^m$$

$$\bar{R}^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(3m+2)!!!}{(m+1)!} \frac{(m)!}{(3m-1)!!!} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3m+2}{m+1} = 3$$

$$R = \frac{1}{3}$$

$$I = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

Levá krajní řada: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(3m-1)!!!}{m!} \left(-\frac{1}{3}\right)^m = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(3m-1)!!!}{m! \cdot 3^m}$

Pravá krajní řada: $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(3m-1)!!!}{m! \cdot 3^m}$

Konvergence v krajních bodech: Raabeovo kritérium

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \frac{(3m+2)!!!}{(m+1)! \cdot 3^{m+1}} \frac{m! \cdot 3^m}{(3m-1)!!!} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \frac{3m+2}{3(m+1) \cdot 1} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \cdot \frac{3m+3-3m-2}{3m+3} = \frac{1}{3} \in (0, 1) \end{aligned}$$

Závěr:

$$O = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$$

Norma vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ se podle zadání počítá podle vzorce

$$\|\vec{x}\| = (2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2)^{1/2}$$

6b

tak ale vypadá skalární součin, který takovou normu generuje:

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \quad \checkmark$$

Tedy totiž: $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$

Úhel se počítá takto:

$$\varphi = \arccos \frac{|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle|}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \quad \checkmark$$

$$\vec{x} = (1, -1, 0) : \|\vec{x}\|^2 = 2 + 2 + 2 = 6 \Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{6}$$

$$\vec{y} = (0, 1, 0) : \|\vec{y}\|^2 = 2 \Rightarrow \|\vec{y}\| = \sqrt{2}$$

$$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 0 - 1 - 2 = -3$$

$$\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{3}{\sqrt{3} \cdot 2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

$$\underline{\varphi = 30^\circ} \quad \checkmark$$

n řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n} (-1)^{n+1}$ a množinu $L = \langle 0, +\infty \rangle$

12 bodů

- a) rozhodněte, zda splňuje nutné podmínky SK;
b) rozhodněte, zda konverguje na L stejnoměrně

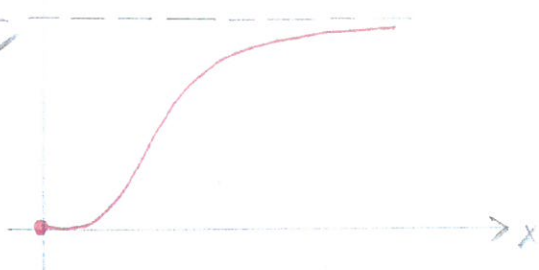
a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n} = 0$ *explicitně uvedení* Δ $h_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n}$

$h'_n(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{x^2+n^2} \left(\sqrt{x^2+n^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0$

$x^2+n^2 - x^2 \stackrel{!}{=} 0$ (to ale nemáme nikdy)

$h_n(x) \wedge$

$\frac{1}{n}$



$\sup_{x \in L} h_n(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h_n(x) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow G_n = \frac{1}{n} \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1)^n \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n} \xrightarrow{L} 0$

b) Dirichletovo kritérium: $f_n(x) = (-1)^{n+1}$ & $g_n(x) = h_n(x)$

1) řada $\sum f_n(x) = \sum (-1)^{n+1}$ má omezenou부분wise částec. součtu

2) $g_n(x) \xrightarrow{L} 0$ (bylo dokázáno v části nutná podmínky)

3) n -monotonie

$\frac{x}{\sqrt{x^2+(n+1)^2}} \frac{1}{n+1} < \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n}$

$n(x^2+n^2) < (n+1)(x^2+n^2+2n+1)$

$\cancel{nx^2 + n^3} < \cancel{nx^2 + n^3} + \underline{2n^2 + n} + \underline{x^2 + n^2 + 2n + 1}$

$0 < 3n^2 + 3n + x^2 + 1$

Závěr:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \xrightarrow{L}$

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

2 (10 bodů)

Mezi formálními řešeními diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} - 3}{3\frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} - 3}$$

je i kružnice o poloměru $R = 5$. Nalezněte její střed.

Řešení:

- Zadaná diferenciální rovnice je **homogenní stupně nula** a její řešení budeme hledat rovnou pomocí obecné substituce

$$y(x) = xz(x),$$

protože lineární řešení nemůže být kružnice.

- Dosadíme do rovnice $y = xz$, $y' = z'x + z$.

$$z'x + z = \frac{3z^2 - 6z - 3}{3z^2 + 6z - 3} = \frac{z^2 - 2z - 1}{z^2 + 2z - 1}$$

- Separujeme proměnné

$$z'x = \frac{z^2 - 2z - 1 - z(z^2 + 2z - 1)}{z^2 + 2z - 1} = \frac{-z^3 - z^2 - z - 1}{z^2 + 2z - 1},$$

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} z' = -\frac{1}{x}.$$

- Před integrací provedeme rozklad na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli má kořen $z = -1$ (uhodneme: jediní kandidáti na celočíselné kořeny jsou dělitelé absolutního členu 1, tj. ± 1). Po vydělení zjistíme $z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^2 + 1)$ a platí tedy

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{A}{z + 1} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}.$$

- Najdeme A, B, C :

$$Az^2 + A + Bz^2 + Bz + Cz + C = z^2 + 2z - 1,$$

z čehož vychází soustava

$$A + B = 1, \quad B + C = 2, \quad A + C = -1,$$

jejímž řešením je $(A, B, C) = (-1, 2, 0)$.

- Nyní integrujeme

$$\int \frac{-1}{z + 1} dz + \int \frac{2z}{z^2 + 1} dz = - \int \frac{1}{x} dx,$$

$$\ln \left| \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right| = \ln \frac{C}{|x|} \text{ kde } C > 0,$$

$$\frac{z^2 + 1}{z + 1} = \frac{C}{x} \text{ kde } C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Přejdeme k původním proměnným a dostaneme formální řešení

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x} \left(\frac{y}{x} + 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \left(x - \frac{C}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{C}{2} \right)^2 = \frac{C^2}{2},$$
$$x^2 + y^2 = C(x + y),$$

což je kružnice se středem $\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2} \right)$ a poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}}$.

- Kružnice s poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}} = 5$ má tedy střed $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}} \right)$.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{9+x^2})$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}}{x + \sqrt{9+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} = (9+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2\right)^{-1/2}$$

9b

$$g(y) = (1+y)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} y^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-m+1)}{m!} y^m =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2^m \cdot m!} y^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m \cdot m!} y^m$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m \cdot m!} \left(\frac{x}{3}\right)^{2m} = \frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{18^m \cdot m!} x^{2m}$$

$$f(x) = \frac{x}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{18^m \cdot m!} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \alpha$$

$$f(0) = \ln 3 \Rightarrow \alpha = \ln 3$$

$$f(x) = \ln 3 + \frac{x}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{18^m \cdot m!} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$

$$R_x^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m+1)!!}{18^{m+1} \cdot (m+1)!} \cdot \frac{2m+1}{2m+3} \cdot \frac{18^m \cdot m!}{(2m-1)!!} = \frac{1}{18} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m+3} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{m+1} =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot 2 = \frac{1}{9} \Rightarrow R_x^2 = 9 \Rightarrow R_x = 3$$

Krajní body oboru konvergence: $x = \pm 3$

Krajní body:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{18^m \cdot m!} \frac{3 \cdot 9^m}{2m+1} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m \cdot m!} \frac{1}{2m+1}$$

Raabe:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1} \cdot (m+1)!} \cdot \frac{2m+1}{2m+3} \cdot \frac{2^m \cdot m!}{(2m-1)!!} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} m \left(1 - \frac{(2m+1)^2}{2(m+1)(2m+3)} \right) =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} m \frac{4m^2 + 10m + 6 - 4m^2 - 4m - 1}{4m^2 + 10m + 6} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow O = \langle -3; 3 \rangle$$

$f'(x)$ je analytická (uz tabulka element. analyt. funkci) $\Rightarrow f(x)$ je analytická

$$y' = \frac{y^2 - 5x^2}{2xy + 4x^2} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 5}{2\frac{y}{x} + 4} \Rightarrow \text{homogenní DR}$$

96

$$a) y = \alpha x \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha^2 - 5}{2\alpha + 4} \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = \alpha^2 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \text{v } \mathbb{R} \text{ nemá řešení}$$

$$b) y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow y' = z + xz'$$

$$z + xz' = \frac{z^2 - 5}{2z + 4} \Rightarrow xz' = \frac{z^2 - 5 - 2z^2 - 4z}{2z + 4}$$

$$xz' = -\frac{z^2 + 4z + 5}{2z + 4}$$

$$\frac{2z + 4}{z^2 + 4z + 5} \cdot z' = -\frac{1}{x} \checkmark$$

$$\int \frac{2z + 4}{z^2 + 4z + 5} dz = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|z^2 + 4z + 5| = -\ln|x| + \beta \checkmark$$

$$z^2 + 4z + 5 = \frac{\beta}{x} \checkmark$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 5 = \frac{\beta}{x} \quad | \cdot x^2$$

$$y^2 + 4xy + 5x^2 - \beta x = 0 \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \beta/2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \beta/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{s} = \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta/2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

zadání bylo opraveno, tj. se jine než bylo 16.1. 2019

$$\beta = -12$$

$$y^2 + 4xy + 5x^2 + 12x = 0 \checkmark$$

báze: $g_1(x); g_2(x); \dots; g_m(x)$

76

χ ortonorma'lní $\Rightarrow \langle g_i | g_k \rangle = \delta_{ik}$

všechny prvky $\in \chi$ lze naskombinovat z báze, tj.

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(x) \quad / \quad |g_k\rangle$$

skalární násobení
vektorem báze

$$\langle f | g_k \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle g_i | g_k \rangle = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = \alpha_k$$

o) analogicky: $h(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i g_i(x) \Rightarrow \beta_k = \beta_k$

$$\begin{aligned} \rho^2(f, h) &= \|f - h\|^2 = \langle f - h | f - h \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^m (\alpha_i - \beta_i) g_i(x) \mid \sum_{k=1}^m (\alpha_k - \beta_k) g_k(x) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m (\alpha_i - \beta_i) (\alpha_k - \beta_k) \langle g_i | g_k \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^m (\alpha_k - \beta_k)^2 \cdot 1 = \left| \begin{array}{l} \alpha_k - \beta_k = -1 \\ \text{(ze zadání)} \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^m 1 = m$$

$$\Rightarrow \rho(f, h) = \sqrt{m}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{(2n+1)!!} \left(\underbrace{\frac{2x}{\sqrt{n^2+9x^2}}}_{h_n(x)} \right)^n \quad A = \langle 0; +\infty \rangle$$

9b-

✓ ← stačí pracovat s vnitřkem zálohy!

$$h_n(x) = \frac{2}{n^2+9x^2} \left(\sqrt{n^2+9x^2} - x \frac{\frac{1}{2} \cdot 18x}{\sqrt{n^2+9x^2}} \right) = 2 \frac{n^2+9x^2-9x^2}{(n^2+9x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2n^2}{(n^2+9x^2)^{3/2}} > 0 \Rightarrow \text{funkce } h_n(x) \text{ je na } A \text{ rostoucí (nemá stac. bod)}$$

$h_n(x) < \frac{2}{3}$

ze
súadnice
odhad

$n^2 > 0$

ve

gnerov...

$$h_n(0) = 0 \wedge h_n(x) \in C^1(A) \wedge h_n'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup h_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\forall x \in A: \left| \frac{(3n-2)!!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{2x}{\sqrt{n^2+9x^2}} \right)^n \right| \leq \frac{(3n-2)!!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

•) Konvergence řady $\sum_n \frac{(3n-2)!!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

explicitní
zápis!

•) Raabe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(3n+1)!!!}{(2n+3)!!} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^n \frac{(2n+1)!!}{(3n-2)!!!} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3n+1}{2n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{6n+2}{6n+9} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{6n+9-6n-2}{6n+9} = \frac{7}{6} \quad (\text{těsně :))}$$

•) Majorantní úslňá řada konverguje, a proto podle Weierstrassova kritéria konverguje řada ze zadání stejnoměrně na A .

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{3^n n!} (3x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1) \cdot (3n-4) \dots 8 \cdot 5 \cdot 2}{3^n n!} (3x)^n = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3}) \dots (+\frac{1}{3}-n)}{n!} (-1)^n (3x)^n = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3}) \dots (-\frac{2}{3}-n+1)}{n!} (-3x)^n = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-2/3}{n} (-3x)^n = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2/3}{n} (-3x)^n = \\
 &= (1-3x)^{-2/3} - 1 = \rho(x)
 \end{aligned}$$

(✓) ← nějaký smyčkový krok!

$$\bar{R}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)!!!}{(n+1)!} \frac{n!}{(3n-1)!!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)}{n+1} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{1}{3}}}$$

krajní řady: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-1)!!!}{(3n)!!!}$ ✓ ← je-li krajní řada určena chybě, další se neopravuje!

Raabe: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{(3n+2)!!!}{(3n+3)!!!} \frac{(3n)!!!}{(3n-1)!!!} \right) =$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3n+2}{3n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{3n+3-3n-2}{3n+3} = \frac{1}{3} \in (0, 1)$

$\text{Dom}(\rho) = G = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$ ✓

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda(\lambda - 2)^2$$

96

$$y(x) \in [1, e^{2x}, xe^{2x}]_{\lambda} = \mathbb{R}_0$$

$w(x) = 1$ rovnici zjevně nenáší, ale $u(x) = e^{2x}$ i $v(x) = xe^{2x}$ ji nášejí!

Snazší bude směřit řád takto:

$$y(x) = e^{2x} \cdot R(x)$$

$$y' = 2e^{2x}R + e^{2x}R'$$

$$y'' = 4e^{2x}R + 4e^{2x}R' + e^{2x}R''$$

$$y''' = (8R + \underbrace{4R'}_{12R'} + \underbrace{8R'}_{6R''} + 4R'' + 2R'' + R''')e^{2x}$$

Poznam:

$$x(8R + 12R' + 6R'' + R''') + (3 - 6x)(4R + 4R' + R'') + (12x - 12)(2R + R') + (12 - 8x)R = 0$$

$$x(12R' + 6R'' + R''') + (3 - 6x)(4R' + R'') + (12x - 12)R' = 0$$

$$xR''' + R''(6x + 3 - 6x) + R'(12x + 12 - 24x + 12x) = 0$$

$$xR''' + 3R'' + 12R' = 0$$

$$R''' + \frac{3}{x}R' = 0 \quad | \cdot x^3 = I.F.$$

$$(R'' \cdot x^3)' = 0$$

$$R'' = \frac{C}{x^3}$$

$$R' = \frac{D}{x^2} + E$$

$$R = \frac{A}{x} + Ex + B$$

$$y(x) = \frac{A}{x} e^{2x} + E \cdot x \cdot e^{2x} + B \cdot e^{2x}; \quad \text{Dom}(y) = \mathbb{R}$$

← mus' být zela správně!

6 (bodů)

Jaké jsou signatury kvadriky

Numerické chyby netolerovat!

$$-2wz + x^2 + 2xy + 2xz - 4x + 6yz - 2z^2 - 12z - 1 = 0?$$

78

$$(x+y+z)^2 - y^2 - 3z^2 + 4yz - 2wz =$$

$$= (x+y+z)^2 - (y-2z)^2 + z^2 - 2wz =$$

$$= \underbrace{(x+y+z)^2}_{\alpha} - \underbrace{(y-2z)^2}_{\beta} + \underbrace{(z-w)^2}_{\eta} - \underbrace{w^2}_{\delta} = \alpha^2 + \beta^2 + \eta^2 - \delta^2$$

✓
7nni
doplňem!

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = x+y+z \\ \beta = y-2z \\ \eta = z-w \\ \delta = w \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \alpha + \beta + 2\eta + 2\delta - \eta - \delta = \alpha - \beta - 3\eta - 3\delta \\ y = \beta + 2\eta + 2\delta \\ z = \eta + \delta \\ w = \delta \end{array}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 + \eta^2 - \delta^2 - 4\alpha + 4\beta + 12\eta + 12\delta - 12\eta - 12\delta - 1 = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha - \beta^2 + 4\beta + \eta^2 - \delta^2 = 1$$

druhe'
doplňem! ✓

$$(\alpha - 2)^2 - (\beta - 2)^2 + \eta^2 - \delta^2 = 1 + 4 - 4 = 1$$

$$\lambda^2 - \mu^2 + \omega^2 - \xi^2 = 1 \quad \checkmark \text{ norm. tvar}$$

$$\begin{array}{l} \text{sg}(Q) = (2, 2, 0) \checkmark \\ \text{PG}(Q) = (3, 2, 0) \checkmark \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} s_1 \geq s_2 \\ s_1 \geq s_2 \end{array} \right\} \text{ Pozn.}$$

$$y''' + 2y'' - 3y' = 12e^{-3x}$$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = \lambda(\lambda+3)(\lambda-1)$$

$$\Omega_0 = [1, e^{-3x}, e^x]_{\lambda}$$

*) Ale zadaná z funkce prostoru Ω_0 druhou rovnici řešit nemůžeme, protože pak by ji musel řešit i α násobek dané funkce, což by odpovídalo zadání (společné řešení ji jin JEDNO)

$$*) L(y) = 12e^{-3x}$$

*) ale $\beta = -3$ je jednoduchý kořen $\ell(\lambda) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ předpokládáme řešení $y_p(x) = f \cdot x \cdot e^{-3x}$

$$y_p' = f(1-3x)e^{-3x} \quad y_p'' = f(-3-3+9x)e^{-3x} = f(-6+9x)e^{-3x}$$

$$y_p''' = f(9+18-27x)e^{-3x}$$

$$\text{Dosazení: } f(27-27x-12+18x-3+9x)e^{-3x} \stackrel{!}{=} 12e^{-3x}$$

$$f = 1$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x e^{-3x}$$

A právě tato funkce řeší první ODR $\Rightarrow$ řád snižujeme substitucí $y = x \cdot z \cdot e^{-3x}$

$$y' = (z + x \cdot z' - 3xz) e^{-3x}$$

$$y'' = (\underline{z' + z'} + xz'' - \underline{3z - 3xz'} - \underline{3z - 3xz'} + 9xz) e^{-3x}$$

Dosazení:

$$x^2(\underline{2z' + xz''} - \underline{6z} - \underline{6xz'} + \underline{9xz}) + (6x^2 + 2x)(\underline{z + xz'} - \underline{3xz}) + (9x^2 + 6x - 2)xz = 0$$

$$x^3 z'' + z'(2x^2 - 6x^3 + 6x^3 + 2x^2) + z(\underline{6x^2} + \underline{9x^3} + \underline{6x^2} + \underline{2xz} - \underline{18x^3} - \underline{6x^2} + \underline{9x^3} + \underline{6x^2} - \underline{2xz}) = 0$$

$$x^3 z'' + 4x^2 z' = 0$$

$$z'' + \frac{4}{x} z' = 0 \quad | \text{ I.F. } (x^4)$$

$$(z' \cdot x^4)' = 0$$

$$z'(x) = \frac{C}{x^4}$$

$$z(x) = \frac{D}{x^3} + E \Rightarrow y(x) = \frac{D}{x^2} e^{-3x} + E \cdot x \cdot e^{-3x}$$

Druhá rovnice:

$$y(x) = \alpha + \beta e^{-3x} + f e^x + x e^{-3x}$$

$$\text{Dom}(y) = \mathbb{R}$$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) e^{-x} dx$$

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \quad \& \quad \|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(x) e^{-x} dx \right)^{1/2} \quad 76$$

$$(h_n(x))_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{x^n}{n!} e^{-x} \right)_{n=1}^{\infty}$$

-) Chceme-li dokazovat konvergenci, potřebyme aspiranta na limitní funkci. Pomůžeme si klasickou limitou. Protože víme, že funkcionální řada $\sum \frac{x^n}{n!}$ konverguje všude v $\mathbb{R}$, musí nutně splňovat nutnou podmínku, totiž že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ na $\mathbb{R}$. Proto vyslovujeme podezření:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{x^n}{n!} e^{-x} = 0$$

-) Co je třeba dokázat?

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \rho(h_n, 0) = \|h_n - 0\| < \varepsilon$$

označíme-li $\omega_n = \rho(h_n, 0)$, je toto tvrzení
faktně rovnou tvrzení $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \int_0^{\infty} (h_n, 0)^2 = \|h_n\|^2 = \int_0^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} e^{-x} \right)^2 \cdot e^{-x} dx = \frac{1}{(n!)^2} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-3x} dx \\ \omega_n^2 &= \frac{1}{(n!)^2} \frac{(2n)!}{3^{2n+1}} \Rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{(2n)!}}{3^n \cdot n!} \end{aligned}$$

-) Rozhodnutí, zda $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$: ukážeme, že řada $\sum \omega_n$ konverguje, a pak bude muset být splněna nutná podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$

Podílové kritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n+2)!}}{(2n)!} \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n+2)(2n+1)}}{3 \cdot (n+1)} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0 \Rightarrow \frac{x^n}{n!} e^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sylvesterovo kritérium

Symetne: $\mu = \omega$ ✓

✓ 1. První tři subdeterminanty jsou zjevně pozitivní

2. Čtvrtý minor:

$$-\omega \begin{vmatrix} 0 & 0 & \omega \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot 24 > 0 \quad \checkmark$$

$$\omega^2 \cdot 6 < 4 \cdot 24$$

$$\omega^2 < 4$$

$$\omega \in (-2, 2) \text{ \& } \mu = \omega \quad \checkmark$$

→ Pro tato ω je uvedený předpis skalárním součinem.

106

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= (x+2)^{-1/2} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2} (x+2)^{-3/2} \\ f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (x+2)^{-5/2} \\ f'''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} (x+2)^{-7/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k} (x+2)^{-\frac{2k+1}{2}}$$

$$\underline{f^{(k)}(2) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^{2k+1}}}$$

$$\underline{(x+2)^{-1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} (x-2)^k}$$

$$\bar{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} \cdot \frac{2^k \cdot k!}{(2k-1)!!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)}{2 \cdot (k+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4$$

Interval konvergence:

$$\underline{I = (-2, 6)} \quad \checkmark \leftarrow \text{správne krajné body!}$$

Řady v krajních bodech:

$$\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} (-1)^k} \quad \checkmark$$

Raabe:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1} (k+1)!} \cdot \frac{2^k \cdot k!}{(2k-1)!!} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(1 - \frac{2k+1}{2k+2} \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2} \in (0, 1) \end{aligned} \quad \checkmark \checkmark$$

Závěr:

$$\underline{U = (-2; 6)} \quad \checkmark$$

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 8xz - 16yz + 32z^2 = (x - y + 4z)^2 + y^2 + 16z^2 - 8yz = 106 \\ = (x - y + 4z)^2 + (y - 4z)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = x - y + 4z \\ \mu = y - 4z \\ \omega = z \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = \mu + 4\omega \\ z = \omega \end{array}$$

$$Q = \lambda^2 + \mu^2 + 2 - 2(\lambda + \mu) + 2\omega = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \mu^2 - 2\mu + 1 + 2\omega = 0$$

$$\underline{(\lambda - 1)^2 + (\mu - 1)^2 + 2\omega = 0}$$

$$a^2 + b^2 - 2c = 0 \quad \leftarrow \text{normální tvar}$$

$$SG(Q) = (3, 1, 0)$$

$$og(Q) = (2, 0, 1)$$

název: eliptický paraboloid

normální tvar: $a^2 + b^2 - 2c = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \lambda - 1 \\ b = \mu - 1 \\ c = -\omega \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = a + 1 \\ \mu = b + 1 \\ \omega = -c \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = a + b + 2 \\ y = b + 1 - 4c \\ z = -c \end{array}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(n^4x + x^3 + 1)}{n^4 + x^2} \right)$$

sk na $\mathbb{R}$

9b.

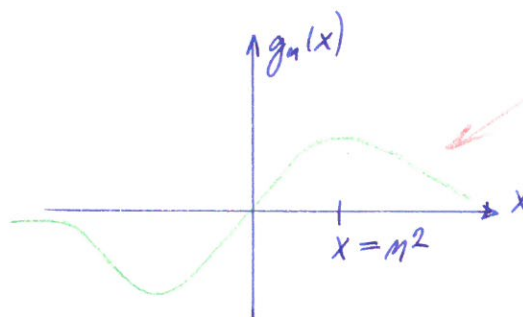
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \frac{n^4x + x^3 + 1}{n^4 + x^2} = x^2 = f(x) \quad \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

$$g_n(x) = f_n(x) - x^2 = \frac{n^4x^2 + x^4 + x}{n^4 + x^2} - x^2 = \frac{n^4x^2 + x^4 + x - n^4x^2 - x^4}{n^4 + x^2} = \frac{x}{n^4 + x^2}$$

$$\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{n^4 + x^2} \right|$$

$$g_n'(x) = \frac{n^4 + x^2 - 2x^2}{(n^4 + x^2)^2} = \frac{n^4 - x^2}{(n^4 + x^2)^2} = 0$$

Graf funkce $g_n(x)$



jen obrátek

$x = n^2 \dots$ stac. bod $\Rightarrow$ bod maxima

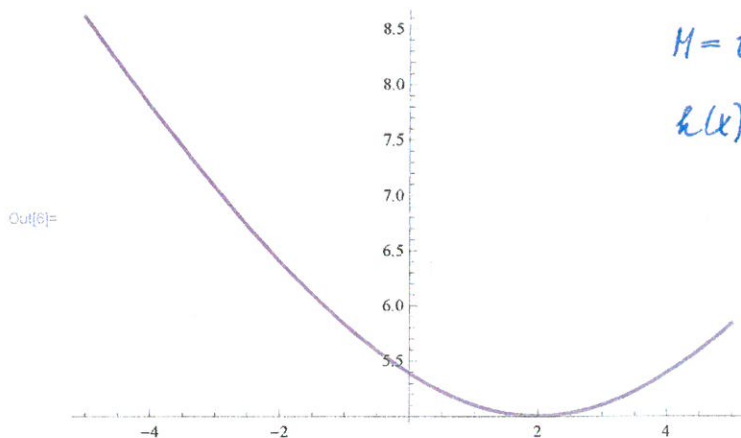
$$\sigma_n = g_n(n^2) = \frac{n^2}{n^4 + n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{posloupnost konverguje na } \mathbb{R} \text{ stejnoměrně}$$

zdrav

$$u(1) = 29 - 4a + a^2$$

```
In[2]:= Plot[Sqrt[29 - 4 a + a^2], {a, -5, 5}]
```



$$M = \{g_a(x) = \sqrt{6a^2x^2 - 20ax + 116} : a \in \mathbb{R}\}$$

$$h(x) = 0$$

$$\phi(h, M) = ?$$

$$\rho(h, M) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \rho(h, g_a)$$

$$\rho(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_0^1 x^3 (f - g)^2 dx}$$

$$\rho(h; g_a) = \sqrt{\int_0^1 x^3 (6a^2 x^2 - 20ax + 116) dx} = \sqrt{[a^2 x^6]_0^1 - [4ax^5]_0^1 + [29x^4]_0^1} = \sqrt{a^2 - 4a + 29}$$

$$g(h, u) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \sqrt{a^2 - 4a + 29} = \inf_{a \in \mathbb{R}} \sqrt{(a-2)^2 + 25} \stackrel{a=2}{=} \sqrt{25} = 5$$

extrema

108

$$y'' - 2 \frac{y}{x^2} = 3$$

$$y(1) = 2 \quad \& \quad y'(1) = 14$$

In[6]:= DSolve[y''[x] - 2 y[x] / x^2 == 3, y[x], x]

Out[6]:= {{y[x] -> x^2 C[1] + \frac{C[2]}{x} + \frac{1}{3} (-x^2 + 3 x^2 Log[x])}}

Říšení:

In[7]:= A x^2 + \frac{B}{x} + x^2 Log[x] /. x -> 1

Out[7]:= A + B

In[8]:= D[A x^2 + \frac{B}{x} + x^2 Log[x], {x, 1}] /. x -> 1

Out[8]:= 1 + 2 A - B

In[10]:= A + B /. {A -> 5, B -> -3}

Out[10]:= 2

In[11]:= 1 + 2 A - B /. {A -> 5, B -> -3}

Out[11]:= 14

$$x^2 y'' - 2 y = 3 x^2$$

•) *Gulivna*
 $x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$
 $y' = \dot{y} \frac{1}{x} \quad \& \quad y'' = \ddot{y} \frac{1}{x^2} - \dot{y} \frac{1}{x^2}$

•) Dozorem:

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 3e^{2t}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$FS = \{ e^{2t}, \bar{e}^t \}$$

•) Partikulární řešení: $y_p(t) = At \cdot e^{2t}$

$$y_p' = A(1+2t)e^{2t} \quad \& \quad y_p'' = A(2+2+4t)e^{2t}$$

Dozorem: $A(4+4t-1-2t-2t) \stackrel{!}{=} 3$
 $3A \stackrel{!}{=} 3$
 $A = 1$

•) Celkové řešení:

$$y(t) = \alpha e^{2t} + \beta \bar{e}^t + t \cdot e^{2t}$$

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} + x^2 \ln(x); \quad \text{Dom}(y) = (0; +\infty)$$

•) Řešení Cauchyovy úlohy:

$$y'(x) = 2\alpha x - \frac{\beta}{x^2} + 2x \ln(x) + x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(1) = \alpha + \beta \stackrel{!}{=} 2 \\ y'(1) = 2\alpha - \beta + 1 \stackrel{!}{=} 14 \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (5, -3)$$

$$y(x) = 5x^2 - \frac{3}{x^2} + x^2 \ln(x); \quad \text{Dom}(y) = (0; +\infty)$$

hledíme supremum zobrazení $x \mapsto \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^4+x^4}}}{\sqrt{n^4+x^4}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^4+x^4}} =: g_n(x)$

106.

$$\frac{dg_n}{dx} = \frac{\sqrt{n^4+x^4} - x \cdot \frac{1}{2} \frac{4x^3}{\sqrt{n^4+x^4}}}{n^4+x^4} = \sqrt{n} \frac{n^4+x^4-2x^4}{(n^4+x^4)^{3/2}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$n^4 - x^4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$x = n \quad \leftarrow \text{na } \mathbb{R}_0^+$$

konkretizace ✓

snadno lze zderivovat, že $\sigma_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_0^+} |g_n(x)| = g_n(n) = \frac{\sqrt{n} \cdot n}{\sqrt{n^4+n^4}} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$

Tedy:

$\forall x \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^4+x^4}}}{\sqrt{n^4+x^4}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \quad \checkmark \leftarrow \text{zápis bez sum!}$$

– genomže číselná řada $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2n}}$ je divergentní $\Rightarrow$ W-kritérium užít nelze!

b) Abelovo kritérium

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

$$h_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{n^4+x^4}}$$

členění ✓

a) $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ SK na $(0, +\infty)$ ✓

b) zvolme pevně $x=c$ a zkoumejme n -monotonii posloupnosti $\frac{nc}{\sqrt{n^4+c^4}}$

$$\frac{nc}{\sqrt{n^4+c^4}} \geq \frac{(n+1)c}{\sqrt{(n+1)^4+c^4}}$$

$$n^2[(n+1)^4+c^4] \geq (n+1)^2(n^4+c^4)$$

$$n^2(n+1)^4 + n^2c^4 \geq n^4(n+1)^2 + (n+1)^2c^4$$

$$n^2(n+1)^2[(n+1)^2-n^2] \geq c^4[(n+1)^2-n^2]$$

$$(2n+1)[n^2(n+1)^2-c^4] \geq 0$$

$$n(n+1) \geq c^2 \quad (\text{od určitého indexu } n_0 \text{ splněno})$$

c) $|h_n(x)| = \left| \frac{\sqrt{n} \cdot x}{\sqrt{n^4+x^4}} \cdot \sqrt{n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓ omezenost

$$\Rightarrow \sum_n f_n(x) h_n(x) \stackrel{\mathbb{R}_0^+}{=} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \bar{R}^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3}}}{\frac{3^n}{\sqrt{n}} + \frac{2^n}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{(n+1)^3}} \cdot \frac{(n+1)3^{n+1} + 2^{n+1}}{n \cdot 3^n + 2^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^{n+1} + 2^{n+1}}{n \cdot 3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n+1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{R = \frac{1}{3}}}$$

✓ *je-li poloměr určen chybně,
dále se neopravuje!*

Řady v krajních bodech $x = \pm \frac{1}{3}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \cdot (\pm 1)^n$

•) $x = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \& \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ diverguje}$$

$\Rightarrow$ ze srovnávacího kritéria: $\frac{1}{3} \notin \mathcal{O}$

•) $x = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ konverguje (Leibnitz)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \text{ konverguje} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{n^3}} \left(\frac{2}{3} \right)^n \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

$$\& \quad \sum_n \left(\frac{2}{3} \right)^n \text{ konverguje}$$

& součet dvou konvergentních řad je konvergentní

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \in \mathcal{O}$$

Závěr:

$$\underline{\underline{\mathcal{O} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)}}$$

$$2x(2y+x)y' = 2y^2 - x^2 \quad y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy + 2x^2}$$

10b

•) homogenní rovnice (lineární řešení)

$$y = \alpha x \quad \& \quad y' = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\alpha^2 - 1}{4\alpha + 2} \Rightarrow 4\alpha^2 + 2\alpha - 2\alpha^2 - 1 = 0$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad \alpha_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} \notin \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ lineární řešení neexistuje

•) racionální řešení $y(x) = x \cdot w(x) \Rightarrow y' = w + xw'$

$$w + xw' = \frac{2x^2w^2 - x^2}{4xwx + 2x^2} = \frac{2w^2 - 1}{4w + 2}$$

$$xw' = \frac{2w^2 - 1 - 4w^2 - 2w}{4w + 2} = -\frac{2w^2 + 2w + 1}{4w + 2}$$

$$-\int \frac{4w + 2}{2w^2 + 2w + 1} dw = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\ln|2w^2 + 2w + 1| = \ln|x| + C$$

$$2w^2 + 2w + 1 = \frac{C}{x}$$

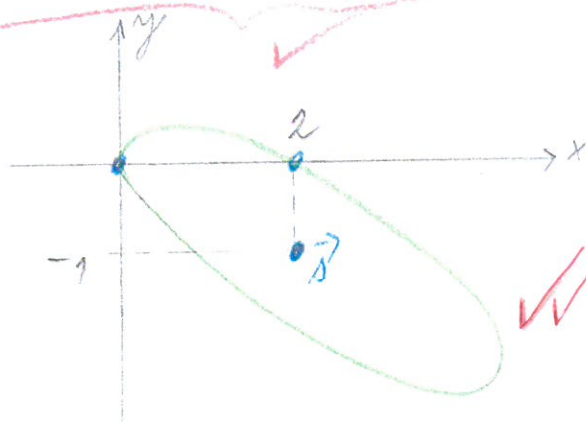
$$2\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} + 1 = \frac{C}{x} \Rightarrow 2y^2 + 2xy + x^2 = Cx$$

$$y(2) = 0 \Rightarrow 2^2 = C \cdot 2 \Rightarrow C = 2$$

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x = 0$$

jde o kvadratickou rovnici v $\mathbb{R}^2$

$$(x+y)^2 + y^2 - 2x = 0 \rightarrow \text{elipsa}$$



obráz: $\vec{a} = (1, -1)$

$$\{\mathbb{R}^2; |x_1 - y_1| + \sqrt{|x_2 - y_2|}\} \quad H_\varepsilon(\vec{0}) = ? \quad \varepsilon = 2$$

$$H_\varepsilon(\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2: |x_1| + \sqrt{|x_2|} < \varepsilon\}$$

$$|x_2| < (\varepsilon - |x_1|)^2 \quad \& \quad \varepsilon - |x_1| \geq 0$$

*) Díky symetrii kolem středu $\vec{a} = (0,0)$, lze vyšetřovat okolí pouze v I. kvadrantu $Q_I = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}$. Zde má hraniční křivka otok tvaru:

$$x_2 = (\varepsilon - x_1)^2 \quad \& \quad \varepsilon \geq x_1 \geq 0$$

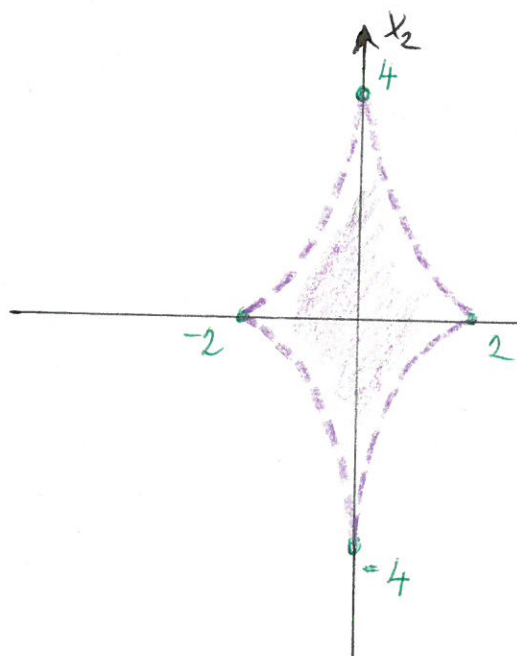
$$\text{Ziegnu' body: } x_2(0) = \varepsilon^2 \quad \& \quad x_2(\varepsilon) = 0$$

Detekce konvexnosti/konkávnosti:

$$x_2' = -2(\varepsilon - x_1) \quad \& \quad x_2'' = 2 > 0 \Rightarrow \text{konvexní}$$

Nauč:

$$x_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{4}$$



✓ "krajní body"

✓ ~~ne~~ nekonvexnost okolí

✓ hranice out & vnitřek in

Kontrola:

$$H_2(\vec{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + \sqrt{|y|} < 2 \right\}$$

hraniční křivka v 1. kvadrantu

$$\text{je to parabola } y = (x-2)^2$$

... to by měl zvládnout
nabídnit suet body :-)

In[2] = Sum[8^(n+1) x^(3n) / ((3n)!), {n, 0, Infinity}]

$$\text{Out[2]} = \frac{8}{3} e^{-x} (e^{3x} + 2 \cos[\sqrt{3} x])$$

In[6] = DSolve[{y'''[x] - 8 y[x] == 0, y[0] == 8, y'[0] == 0, y''[0] == 0}, y[x], x] // FullSimplify

$$\text{Out[6]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{8}{3} e^{-x} (e^{3x} + 2 \cos[\sqrt{3} x]) \right\} \right\}$$

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^{n+1} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

$$\rho'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 8^{n+1} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \stackrel{m=n-1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} 8^{m+2} \frac{x^{3m}}{(3m)!}$$

$$\text{ODR: } \rho''' = 8\rho \Rightarrow \underline{\rho''' - 8\rho = 0}$$

Cauchy: $\rho(0) = 8$ & $\rho'(0) = 0$ & $\rho''(0) = 0$

Char. rovnice: $\lambda^3 - 8 = 0$ $\lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$

* λ -li probléma $\lambda = 2$ za *trivialní* koreni, opravovali konci dělení polynomu koř. činitelem

$$\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow F_0 = \{e^{2x}, e^{-x} \cos(\sqrt{3}x), e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)\}$$

$$\underline{\rho(x) = C e^{2x} + D e^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + E e^{-x} \sin(\sqrt{3}x)}$$

$$\rho'(x) = 2C e^{2x} - e^{-x} (D \sin \sqrt{3}x + E \cos \sqrt{3}x) + e^{-x} (-D \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x + \sqrt{3} E \cos \sqrt{3}x)$$

$$\rho''(x) = 4C e^{2x} + e^{-x} (D \cos \sqrt{3}x + E \sin \sqrt{3}x + D \sqrt{3} \cos \sqrt{3}x - \sqrt{3} E \sin \sqrt{3}x) + e^{-x} (D \sqrt{3} \sin \sqrt{3}x - E \sqrt{3} \cos \sqrt{3}x - D 3 \cos \sqrt{3}x - 3E \sin \sqrt{3}x)$$

$$C + D \stackrel{!}{=} 8$$

$$2C - D + \sqrt{3}E \stackrel{!}{=} 0$$

$$4C + D - \sqrt{3}E - \sqrt{3}E - 3D \stackrel{!}{=} 0$$

$$\left. \begin{array}{l} C + D \stackrel{!}{=} 8 \\ 2C - D + \sqrt{3}E \stackrel{!}{=} 0 \\ 4C + D - \sqrt{3}E - \sqrt{3}E - 3D \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (C, D, E) = \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 0 \right)$$

$$\underline{y(x) = \frac{8}{3} e^{2x} + \frac{16}{3} e^{-x} \cos(\sqrt{3}x); \text{Dom}(y) = \mathbb{R}}$$

$$y'' - 8y' + 16y = \frac{e^{4x}}{x} + e^{4x}$$

a) $L(y) = 0 \quad \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 \Rightarrow F_5 = \{e^{4x}; e^{4x} \cdot x\}$ ✓

b) $L(y) = \frac{e^{4x}}{x}$ metoda variasi konstant

$$W = \begin{vmatrix} e^{4x} & x e^{4x} \\ 4e^{4x} & (1+4x)e^{4x} \end{vmatrix} = e^{8x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & 1+4x \end{vmatrix} = e^{8x}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{4x} \\ \frac{e^{4x}}{x} & (1+4x)e^{4x} \end{vmatrix} = -e^{8x}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & \frac{e^{4x}}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} e^{8x}$$

$$f_1 = \frac{A_1}{W} = -1 \quad f_2 = \frac{1}{x}$$

$$F_1(x) = -x + C_1 \quad F_2(x) = \ln(x) + C_2$$

$$y_{P1}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} - x e^{4x} + x \cdot \ln(x) e^{4x}$$

c) $L(y) = e^{4x}$ metoda predika partikularnih resen

$$y_{P2}(x) = \alpha e^{4x} \cdot x^2 \quad y'_{P2} = \alpha (2x + 4x^2) e^{4x}$$

$$y''_{P2} = \alpha (2 + 8x + 8x + 16x^2) e^{4x}$$

Preverimo:

$$\alpha (2 + 16x + 16x^2 - 16x - 32x^2 + 16x^2) = 1$$

$$2\alpha = 1$$

$$y_{P2}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{4x}$$

d) metoda superpozicije:

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x} + x \cdot \ln(x) e^{4x}$$

$$I = (0; +\infty)$$

~~metoda~~

$$\sum_n \frac{\beta^n}{n^2} \frac{x \cdot n!}{n^2 + x^2}$$

$$h_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

$$\beta \in \mathbb{R}^+$$

9

$$h'_n(x) = \frac{n^2 + x^2 - 2x^2}{(n^2 + x^2)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm n \quad \text{lok. extrém. bod}$$

zjednodušení

$$\left\{ \begin{array}{l} h_n(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} h_n(x) = 0 \\ h_n(x) \in C([0, +\infty)) \end{array} \right\} \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x)| = h_n(n) = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n}$$

✓

(Lobachevsky's test)

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \left| \frac{\beta^n}{n^2} \frac{x \cdot n!}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{\beta^n}{n^2} n! \frac{1}{2n} \leq \frac{\beta^n}{n^2} (n-1)!$$

Otázka je, zda $\sum_n \frac{\beta^n}{n^2} (n-1)!$ konverguje

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n!}{(n-1)!} \frac{n^n}{\beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ = \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n = \beta \cdot \frac{1}{e} < 1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ pro $\beta \in (0, e)$ W-kritérium užitečné ✓
a pro $\beta > e$ W-kritérium užitečné ✓ } dokladují jeden fakt

• Co ale $\beta = e$? : $\sum_n \frac{(n-1)!}{n^n} \cdot e^n \quad \left| \quad e \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \leq n! \right.$

$$e \frac{(n-1)^{n-1}}{e^{n-1}} \frac{e^n}{n^2} \leq \frac{(n-1)! e^n}{n^2} =: B_n$$

$$\frac{e^2}{n} \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n < B_n$$

$$\frac{1}{4(n-1)} < \frac{e^2}{n-1} \frac{1}{4} < \frac{e^2}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n < B_n$$

• řada $\sum \frac{1}{4(n-1)}$ diverguje $\Rightarrow \sum B_n$ diverguje k^o

ke dokladu
1. podmínky

$\Rightarrow$ W-kritérium lze užít pouze pro: $\beta \in (0, e)$

V prostoru $\mathbb{R}^3$ sestavte polární bázi $\mathcal{B}_p$, generovanou kvadratickou formou

$$q(\bar{x}) = -2x^2 - y^2 - 20z^2 - 4xy - 14xz - 10yz = 0$$

splňující následující požadavky:

a) $(1, 3, -1) \in \mathcal{B}_p$

b) $\exists \bar{u} \in \mathcal{B}_p : \langle (0, 0, 1) | \bar{u} \rangle = 0$

Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$, které zadanou kvadratickou formu převedí na její normální tvar. Tuto proveďte.

• $q(1, 3, -1) = -2 - 9 - 20 - 12 + 14 + 30 = -43 + 44 = 1$ ✓

• $\bar{u} = (x, y, z) = ?$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -2 & -1 & -5 \\ -7 & -5 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -x - 2z = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{✓} \\ x=0 \end{array} \right\}$$

$$\langle (0, 0, 1) | \bar{u} \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x=0=z \Rightarrow y=?$$

$$q(0, y, 0) = -y^2 = -1 \Rightarrow y = 1 \text{ např.}$$

$$\bar{u} = (0, 1, 0) \quad \text{✓}$$

• $\bar{v} = (x, y, z) = ?$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -2 & -1 & -5 \\ -7 & -5 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -x - 2z = 0 \quad \text{✓} \quad (x, y, z) \begin{pmatrix} -2 & -2 & -7 \\ -2 & -1 & -5 \\ -7 & -5 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2x - y - 5z = 0 \quad \text{✓}$$

$$z = \alpha \quad x = -2\alpha \quad y = 4\alpha - 5\alpha = -\alpha$$

$$q(-2\alpha, -\alpha, \alpha) = \alpha^2 (-8 - 1 - 20 - 8 + 28 + 10) = \alpha^2 = 1 \Rightarrow \bar{v} = (-2, -1, 1) \quad \text{✓}$$

• $\mathcal{B}_p = \{(1, 3, -1), (0, 1, 0), (-2, -1, 1)\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \xi - 2\lambda \\ y = 3\xi + \eta - \lambda \\ z = -\xi + \lambda \end{array} \right\} \quad \text{✓}$$

$$q(\xi, \eta, \lambda) = \xi^2 - \eta^2 + \lambda^2 \quad \text{✓}$$

$$y' + \frac{4x+3y}{9y+6x} = \frac{y}{2x}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

11

- hledáme nelineární formální řešení $\Rightarrow y(x) = x \cdot w(x) \Rightarrow y' = w + xw'$

$$y' + \frac{4+3\frac{y}{x}}{9\frac{y}{x}+6} = \frac{1}{2} \frac{y}{x} \Rightarrow w + xw' + \frac{4+3w}{9w+6} = \frac{1}{2} w$$

$$xw' = \frac{-4-3w}{9w+6} - \frac{w}{2}$$

$$xw' = \frac{-8-6w-9w^2-6w}{18w+12}$$

$$\frac{18w+12}{9w^2+12w+8} w' = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|9w^2+12w+8| = -\ln|x| + C$$

$$9w^2+12w+8 = \frac{C}{x}$$

$$9\frac{y^2}{x^2} + 12\frac{y}{x} + 8 = \frac{C}{x}$$

$$9y^2 + 12xy + 8x^2 = Cx$$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} +C/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$8x^2 + 12xy + 9y^2 + 24x = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{9}{8}y^2 + 3x = 0$$

$$(x + \frac{3}{4}y)^2 + \frac{9}{16}y^2 + 3x = 0 \Rightarrow \text{jde skutečně o elipsu}$$

4 její významné body:

a) střed $(-3; 2)$

b) průsečík s osou $x=0$: $(0, 0)$

c) průsečík s osou $y=0$: $x^2 + 3x = 0$

d) průsečík s osou $y=2$:

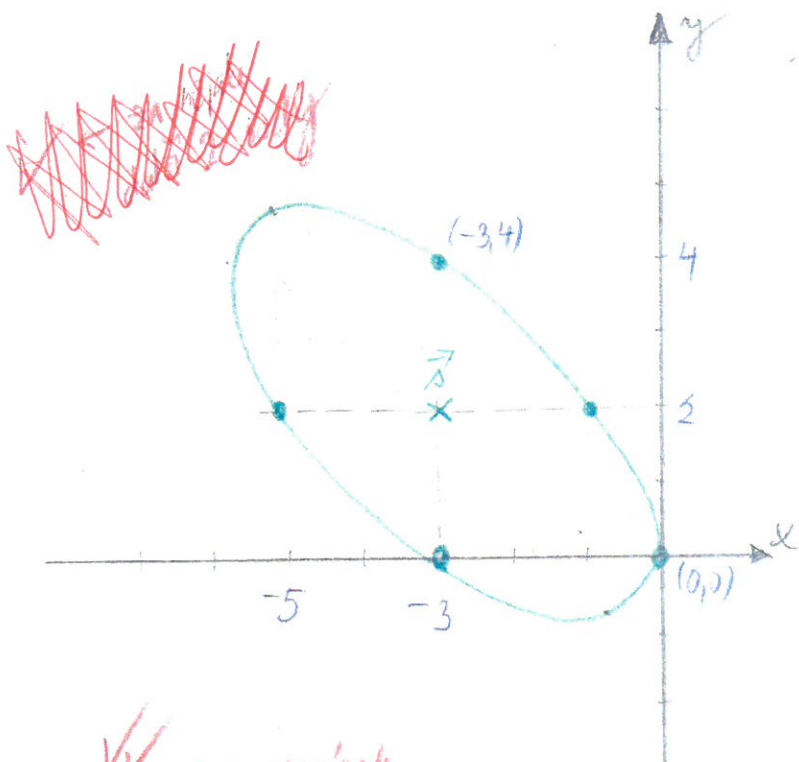
$$8x^2 + 24x + 36 + 24x = 0$$

$$x^2 + 6x + \frac{9}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}(-6 \pm \sqrt{36-18}) = \frac{1}{2}(-6 \pm 3\sqrt{2}) =$$

$$= -3 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \leftarrow -5.12$$

✓
všechny hodnoty
některých důležitých
bodů



$$8x^2 + 12xy + 9y^2 + 24x = 0$$

✓✓ za obrátek

(ne za výpočty nebo numerické hodnoty bodů)

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 x^2 f(x) g(x) dx$$

$$\mathcal{X} = [1, x, x^2]_{\lambda}$$

5

a) $h_1(x) = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$

b) $h_2(x) = \beta x + \gamma \quad (\beta \neq 0)$

$$\langle h_1 | h_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \alpha (\beta x + \gamma) dx = \alpha \beta \int_{-1}^1 x^3 dx \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow h_2(x) = \gamma$$

c) $h_3(x) = \lambda x^2 + \mu x + \omega \quad (\lambda \neq 0)$

$$\langle h_1 | h_3 \rangle = \int_{-1}^1 \alpha (\lambda x^2 + \mu x + \omega) x^2 dx = \alpha \left(\frac{2\lambda}{5} + \frac{2\omega}{3} \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\lambda}{5} = -\frac{\omega}{3} \Rightarrow 3\lambda = -5\omega$$

$$\langle h_2 | h_3 \rangle = \alpha \beta \int_{-1}^1 x^3 (\lambda x^2 + \mu x + \omega) dx \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \mu \stackrel{!}{=} 0$$

$$h_3(x) = -5\omega x^2 + 3\omega$$

Normalizace:

$$\langle h_1 | h_1 \rangle = \alpha^2 \int_{-1}^1 x^2 dx \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha^2 \frac{2}{3} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\langle h_2 | h_2 \rangle = \beta^2 \int_{-1}^1 x^4 dx \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \beta^2 \frac{2}{5} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\begin{aligned} \langle h_3 | h_3 \rangle &= \omega^2 \int_{-1}^1 (3 - 5x^2)^2 x^2 dx = 2\omega^2 \int_{-1}^1 (9x^2 - 30x^4 + 25x^6) dx = \\ &= 2\omega^2 \left(3 - 6 + \frac{25}{7} \right) = 2\omega^2 \frac{25-21}{7} = \omega^2 \frac{8}{7} \stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}}$$

Závěr:

3 prvky báze:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$h_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} x$$

$$h_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{2}} (3 - 5x^2)$$