

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	
-------------------------	--

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 27. listopadu 2018, 13:20–15:20

1 (9 bodů)

Nalezněte mocninou řadu reprezentující hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy$$

a určete její obor konvergence. Výsledek запиšte do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

2 (8 bodů)

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

3 (6 bodů)

Sestavte lineární diferenciální rovnici, pro níž

$$\Omega_q = [x, x^2, x^2 + 3x]_\lambda - 3x^3.$$

4 (9 bodů)

Nalezněte funkci, která je součtem řady

$$2 - 7(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (x-1)^n,$$

a zároveň řeší diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{3y'}{x} - \frac{3y}{x^2} = 21x^2.$$

Koeficienty a_n nejsou známy.

5 (8 bodů)

Ověřte, zda funkcionální posloupnost, jejímž n -tým členem je funkce

$$g_n(x) = e^{-xn} (1 - e^{-x})^n - e^{-x},$$

stejněměrně konverguje na množině $\langle 0, \infty \rangle$.

Nalezněte mocninovou řadu reprezentující hodnotu integrálu $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy$ a určete její $\mathcal{O}$.
Výsledek zapíšte do tvaru s ukončovými faktoriály.

98

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n$$

$$(1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n$$

$$(1+y^4)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{4n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}} dy = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{4n} \right) dy$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x y^{4n} dy = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$\bar{R}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{4n+1}{4n+5} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{4n+1}{4n+5} = 1 \Rightarrow R=1$$

- v obou krajních bodech má řada tvar $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{4n+1}$

- Raabeovo kritérium

tvar krajních řad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{4n+1}{4n+5} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{8n^2 + 18n + 10 - 8n^2 - 6n - 1}{8n^2 + 18n + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 + 9n}{8n^2 + 18n + 10} = \frac{3}{8} > 1$$

$$\Rightarrow -1 \in \mathcal{O}, 1 \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O} = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{x^2 + n^2} \quad \text{na } \mathbb{R}_0^+$$

86

Dirichletovín kritériom: $f_n(x) = (-1)^n$ a $g_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$ ✓ *členění*

- 1) $\sum (-1)^n$ má omezené částečné součty ✓
- 2) $g_{n+1}(x) < g_n(x) \quad \forall x \in (0; +\infty)$

$$g_{n+1}(x) = \frac{x}{x^2 + (n+1)^2} < \frac{x}{x^2 + n^2} = g_n(x)$$

$$x^2 + n^2 < x^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$0 < 2n + 1 \quad \checkmark$$

$$3) \quad g_n(x) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + n^2} = 0$$

$$G_n = \sup_{x \in \mathbb{R}_0^+} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

$$g'_n(x) = \frac{x^2 + n^2 - 2x^2}{(x^2 + n^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(x^2 + n^2)^2} = 0$$

$$x = n \quad \checkmark$$

✓ se zdůvodněním

$$\left\{ \begin{array}{l} g_n(0) = 0 \quad \wedge \quad g_n(x) \in C(\mathbb{R}^+) \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = 0 \Rightarrow x=n \text{ globální maximum} \\ G_n = g_n(n) = \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n} \end{array} \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0 \Rightarrow \text{ze supremačního kritéria } g_n(x) \stackrel{\mathbb{R}^+}{\rightarrow} 0!$$

$\Rightarrow$ všechny 3 předpoklady Dirichletova kritéria naplněny $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ řada konverguje stejnoměrně na $(0; +\infty)$ ✓

$$\Omega_g = [x, x^2, x^2+3x]_\lambda - 3x^3 \Rightarrow \Omega_0 = [x, x^2, x^2+3x]_\lambda - [x, x^2]_\lambda$$

$$\dim \Omega_0 = 2 \Rightarrow \deg(\vec{1}) = m = 2 \checkmark$$

Obecný tvar LOR 2. řádu: $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0 \checkmark$

$$\begin{aligned} y(x) = x &\Rightarrow y' = 1 \text{ a } y'' = 0 \Rightarrow p(x) + x \cdot r(x) = 0 \\ y(x) = x^2 &\Rightarrow y' = 2x \text{ a } y'' = 2 \Rightarrow 2 + 2x \cdot p(x) + x^2 r(x) = 0 \end{aligned} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x) \\ r(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ -2 & x^2 \end{vmatrix}}{x^2 - 2x^2} = \frac{+2x}{-x^2} = -\frac{2}{x} \quad \text{a} \quad r(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -2 \end{vmatrix}}{-x^2} = \frac{2}{x^2}$$

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0 \checkmark$$

•) $-3x^3$ je particula'm' řešení rovnice $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = q(x)$

$$y_p(x) = 3x^3 \Rightarrow y_p' = 9x^2 \text{ a } y_p'' = 18x$$

Dosazení:

$$q(x) = 18x + 18x - 6x = -6x$$

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = -6x \checkmark \checkmark$$

↑
! Musí to být tvar, kde $P_2(x) = 1$!

$$y'' + \frac{3}{x}y' - \frac{3}{x^2}y = 21x^2$$

$$y(1) = 2 \text{ \& } y'(1) = -7$$

96

přičteno ze dvou Taylorových řad, neboť $a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$

$x_0 = 1$ (střed řady)

Rovnici řeší (tedy rovnici s nulovou pravou stranou) funkce $y(x) = x$.

Uvažujeme řadu: $y(x) = x \cdot z(x) \Rightarrow y' = xz' + z$ \& $y'' = xz'' + 2z'$

Dosazení:

$$2z' + xz'' + \frac{3}{x}(z + xz') - \frac{3}{x}z = 21x^2$$

$$2z' + xz'' + 3z' = 21x^2$$

$$z'' + \frac{1}{x}(3 + \frac{2}{x})z' = 21x \quad / \text{I.F.} = x^5$$

$$(z' \cdot x^5)' = 21x^6$$

$$z' \cdot x^5 = 3x^7 + C$$

$$z' = 3x^2 + \frac{C}{x^5}$$

$$z(x) = x^3 + \frac{C}{x^4} + D$$

$$y(x) = Dx + \frac{C}{x^3} + x^4; \quad \text{dom}(y) = (0; +\infty)$$

Cauchyova úloha:

$$y'(x) = D - \frac{3C}{x^2} + 4x^3$$

$$y(1) = D + C + 1 \stackrel{!}{=} 2$$

$$y'(1) = D - 3C + 4 \stackrel{!}{=} -7$$

$$\Rightarrow (C, D) = (3, -2)$$

$$y(x) = -2x + \frac{3}{x^3} + x^4$$

$$\text{dom}(y) = (0; +\infty)$$

$$g_n(x) = e^{-xn} (1 - e^{-x})^n - e^{-x} \quad M = \langle 0, +\infty \rangle$$

86

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 \cdot 0 - 1 = -1 & x = 0 \\ 0 \cdot 0 - e^{-x} = -e^{-x} & x > 0, \text{ y. } e^{-x} < 1 \end{cases}$$

Šleka sahen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = -e^{-x}; \quad \text{Dom}(g) = D = \langle 0, +\infty \rangle$$

! viraha
0 x=0 !

Oznacme:

$$h_n(x) = g_n(x) - g(x) = e^{-xn} (1 - e^{-x})^n$$

Suprema'lem' kriterium:

$$h'_n(x) = -n e^{-xn} (1 - e^{-x})^n + n e^{-xn} (1 - e^{-x})^{n-1} \cdot e^{-x} = 0$$

$$-1 + e^{-x} + e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2}, \text{ y. } x = \ln 2$$

$$h_n(0) = 0 \text{ \& } h_n(+\infty) = 0 \text{ \& } h_n(x) \in C^1(M)$$

$$\sup_{x \in M} |h_n(x)| = h_n(\ln 2) = \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4^n}$$

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ \& } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$$\Rightarrow g_n(x) \xrightarrow{\langle 0, +\infty \rangle} -e^{-x}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	
------------------	--

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 27. listopadu 2018, 13:20–15:20

1 (8 bodů)

Řešte diferenciální rovnici

$$(x - 3y - 1)(1 - 3y') + yy' = 0.$$

Nalezněte řešení procházející bodem $(x_0, y_0) = (5, 1)$. Má toto řešení nějaké průniky s osou x ? Pokud ano, nalezněte je!

2 (9 bodů)

Nalezněte funkci, která je součtem řady

$$\frac{3}{2}\pi + \left(3 + \frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n,$$

a zároveň řeší diferenciální rovnici

$$x^2 \sin(x) y'' - [2 \sin(x) + x \cos(x)] (xy' - y) = 0.$$

Koeficienty a_n nejsou známy.

3 (8 bodů)

Nalezněte součtovou funkci funkcionální řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + n} x^{2n}$$

a její definiční obor.

4 (9 bodů)

Rozhodněte, zda lze řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{x^2 + n}$$

derivovat na intervalu $(-1, 1)$ člen po členu. Podrobně zdůvodněte!

5 (6 bodů)

Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x) = \sin^2(x),$$

její obor konvergence a dokažte příslušnou rovnost mezi funkcí $g(x)$ a součtem vypočtené řady.

úprava do
stand. tvaru

$$(x - 3y - 1) \cdot (1 - 3y') + yy' = 0$$

$$(x_0, y_0) = (5, 1)$$

86

$$\underbrace{x - 3y - 1}_{f(x, y)} + y' \underbrace{(-3x + 9y + 3 + y)}_{g(x, y)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} = -3 \Rightarrow \text{exaktní DR}$$

$$H(x, y) = \int_5^x (s - 3y - 1) ds + \int_1^y (-3x + 10r + 3) dr =$$

práce
pocatečím
podmínkou

$$= \int_5^x (s - 3y - 1) ds + \int_1^y (-12 + 10r) dr =$$

$$= \left[\frac{s^2}{2} + (3y+1)s \right]_5^x + [-12r + 5r^2]_1^y =$$

$$= \frac{x^2}{2} - (3y+1)x - \frac{25}{2} + (3y+1) \cdot 5 - 12y + 5y^2 + 12 - 5 = 0$$

$$x^2 - 6xy - 2x - 24y + 2(15y+5) + 10y^2 + 14 - 25 = 0$$

$$\hookrightarrow x^2 + 10y^2 - 6xy - 2x + 6y - 1 = 0 \quad \text{Formální řešení}$$

Průsečíky s osou x (tj. $y=0$):

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 2$$

$$|x-1| = \sqrt{2}$$

$$\hookrightarrow \vec{a} = (1 - \sqrt{2}, 0) \quad \& \quad \vec{b} = (1 + \sqrt{2}, 0)$$

1

$$(x-3y-1) + y'(-3x+10y+3) = 0$$

$$\begin{aligned} \xi &= x+x_0 & x_0-3y_0 &= -1 & y_0 &= 0 \\ \eta &= y+y_0 & -3x_0+10y_0 &= 3 & x_0 &= -1 \end{aligned}$$

ALT. 1. HOMOGENNÍ ROVNICE
(po substituci)

$$\xi = x-1 \Rightarrow$$

$$(\xi-3\eta) + \eta'(-3\xi+10\eta) = 0 \quad \text{homog. H. 1}$$

$$\begin{pmatrix} \eta = \xi z \\ \eta' = z + \xi z' \\ z' = \frac{dz}{d\xi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1-3z) + \xi(-3+10z)z' &= 0 \\ 1-3z - 3z + 10z^2 + \xi z'(-3+10z) &= 0 \\ 1-3z - 3z + 10z^2 + \xi z'(-3+10z) &= 0 \\ \xi z'(-3+10z) &= 6z - 10z^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{z'(10z-3)}{10z^2-6z+1} = -\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(20z-6)z'}{10z^2-6z+1} = -\frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{2} \ln |10z^2-6z+1| = -\ln |\xi| + \ln |C|$$

$$10z^2-6z+1 = \frac{C}{\xi^2}$$

$$\begin{aligned} \eta = y = \xi z \\ z = \frac{y}{\xi} \end{aligned} \quad \begin{aligned} 10 \frac{y^2}{\xi^2} - 6 \frac{y}{\xi} + 1 &= \frac{C}{\xi^2} \quad | \cdot \xi^2 \\ 10y^2 - 6\xi y + \xi^2 &= C \end{aligned}$$

$$10y^2 - 6(x-1)y + (x-1)^2 = C$$

$$10y^2 + 6xy + 6y + x^2 - 2x = \tilde{C} \quad \dots \text{zbytek je stejný}$$

ALT 2. EXAKTNÍ R. PŘÍKLAD
VÝPOČET:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= x-3y-1 \\ q(x,y) &= -3x+10y+3 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = -3 \quad \checkmark$$

$$H(x,y) = \int p(x,y) dx = \frac{x^2}{2} - 3xy - x + G(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -3x + G'(y) \stackrel{!}{=} q(x,y) = -3x + 10y + 3 \Rightarrow \begin{aligned} G'(y) &= 10y + 3 \\ G(y) &= 5y^2 + 3y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(x,y) = \frac{x^2}{2} - 3xy - x + 5y^2 + 3y = C \quad \text{je formální řešení}$$

$$\Rightarrow \text{po vyhodnocení 2:} \quad x^2 - 6xy - 2x + 10y^2 + 6y = \tilde{C} \quad \dots \text{stejný kon}$$

$$H(x,y) = \int_0^x f(s,y) ds + \int_0^y g(0,t) dt = \int_0^x (-3y-1) ds + \int_0^y (10t+3) dt$$

ALT. 3. DOSAZENÍ DO VZORCE
 $\int \sin u (x_0, y_0)$

$$= \frac{x^2}{2} - 3xy - x + 5y^2 + 3y = C \Rightarrow \text{stejný výsledek jako ALT. 2}$$

2

$$x^2 \cdot \sin(x) \cdot y'' - (2 \cdot \sin(x) + x \cos(x)) \cdot (xy' - y) = 0$$

96

Pomocí řešící funkce $v(x) = x \Rightarrow$ řád snížíme substitucí $y = x \cdot z(x)$

$$\Rightarrow y' = z + xz' \text{ \& } y'' = 2z' + xz''$$

$$x^2 \sin(x) \cdot (2z' + xz'') - (2 \sin(x) + x \cos(x)) \cdot x^2 \cdot z' = 0$$

$$x^3 \sin(x) \cdot z'' + z' (2x^2 \sin(x) - 2x^2 \sin(x) - x^3 \cos(x)) = 0$$

$$z'' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)} z' = 0 \quad \text{I.F.} = e^{-\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx} = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\frac{1}{\sin(x)} z'' - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} z' = 0$$

$$(z' \cdot \frac{1}{\sin(x)})' = 0$$

$$z'(x) = C \cdot \sin(x)$$

$$z(x) = C \cos(x) + D$$

$$y(x) = C \cdot x \cdot \cos(x) + D \cdot x$$

$\pm$ Taylorovy řady lze přičíst počáteční podmínky pro Cauchyovu úlohu: $y(x_0) = \frac{3}{2}\pi$ \& $y'(x_0) = 3 + \frac{\pi}{2}$ \& $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$y'(x) = C \cdot \cos(x) - C \cdot x \cdot \sin(x) + D$$

$$\left. \begin{aligned} y'(\frac{\pi}{2}) &= -C \cdot \frac{\pi}{2} + D \stackrel{!}{=} 3 + \frac{\pi}{2} \\ y(\frac{\pi}{2}) &= D \cdot \frac{\pi}{2} \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow (C, D) = (-1, 3)$$

$$y(x) = 3x - x \cos(x)$$

$$\dim(y) = \mathbb{R}$$

$$\text{Sum} [(-1)^{(n+1)} \cdot x^{(2n)} / (2n^2 + n), \{n, 1, \text{Infinity}\}]$$

$$\frac{2x - 2 \text{ArcTan}[x] - x \text{Log}[1+x^2]}{1+x^2}$$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{2n^2 + n}$$

$$R(x) = x \cdot y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2 + n} x^{2n+1}$$

$$R'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}$$

$$R''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 2n \cdot x^{2n-1} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-1} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$R=1$ *

$$R'(x) = \ln(1+x^2) + w \quad (\text{ale } w=0, \text{ neboť } R'(0)=0)$$

$$R(x) = \left| \begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \quad v' = 1 \\ u' = \frac{2x}{1+x^2} \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx + c =$$

$$= x \cdot \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx + c =$$

$$= x \cdot \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + c$$

nebylo-li pravda
s integr. konstantami
 $\Rightarrow$ bít dolů!

$$! \quad x=0, \text{ neboť } R(0) = 0 + c = 0$$

ale jedna se o spojitou funkci

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x) = \ln(1+x^2) - 2 + 2 \frac{\arctan x}{x} \quad \text{pro } x \neq 0 \quad (x \in \text{Dom}(y)) \\ y(x) = 0 \quad \text{pro } x = 0 \end{array} \right.$$

Dom(y) = 0 ... jasné je, že $R=1$ (derivována se poloměr nemění) *

- řady v obou krajních bodech mají tvar $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+n}$,
a tudíž konvergují

$$\text{Dom}(y) = \langle -1, 1 \rangle$$

(3)

ALT. POSTUP

(umocnen vzhledy)

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) (-1)^{n+1} x^{2n} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n}}_{\ln(1+x^2)} + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}}_{\text{zřejmě } = 0 \text{ pro } x=0} \dots \left. \begin{array}{l} \text{dále uvaž. } x \neq 0 \\ \downarrow \end{array} \right\}$$

$$= \ln(1+x^2) + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - 2$$

víme: $x^2 \in (-1,1) \Rightarrow x \in (-1,1)$ toto lze pro $x \neq 0$

$$= \ln(1+x^2) + \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} - 2$$

$$= \ln(1+x^2) + \frac{2}{x} \arctan x - 2$$

víme: $x \in (-1,1)$

ZÁVĚR: $y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x=0 \\ \ln(1+x^2) + \frac{2}{x} \arctan x - 2 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases}$

$\sigma = (-1,1)$

(5)

ALT. POSTUP

$g(x) = \sin^2 x$... najít Maclaurinův rozvoj

$$g(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4^n}{(2n)!} x^{2n}$$

původní
postup
viz
níže

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$\sigma = \mathbb{R}$... víme u funkce $\cos x$

Důkaz konvergence k výchozí funkci:

A) víme to o $\cos x$ $\Rightarrow$ konverguje i rozvoj $\cos 2x$

B) $g(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$ a $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{2^{n+1}}{(2n)!} x^{2n} \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$

Rozhodněte, zda lze řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{x^2+n}$ derivovat na intervalu $(-1,1)$ člen po členu. 98

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{x^2+n}$$

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$$

- podle příslušné věty je třeba splnit 3 předpoklady

1) $f_n(x)$ musí být diferencovatelná na $(-1,1)$

2) $\sum f_n(x)$ konverguje alespoň pro jedno $x \in (-1,1)$

- zvolíme $x=0$

$$\text{- řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{0+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

konverguje z Leibnitzova kritéria

3) $\sum f'_n(x)$ musí SK na $(-1,1)$

- zkoumejme tedy řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$

$$g'_n(x) = \frac{\sqrt{x^2+n} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}}{x^2+n} = \frac{x^2+n-x^2}{(x^2+n)^{3/2}} = \frac{n}{(x^2+n)^{3/2}} > 0$$

$\Rightarrow$ funkce je rostoucí $\Rightarrow$ maximum nastává v bodě $x=1$, přesněji

$$\sup_{x \in (-1,1)} |g_n(x)| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

- jelikož $\forall x \in (-1,1)$ platí:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}} \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

... řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje z integrálního kritéria

- z Weierstrassova kritéria tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}} \equiv (-1,1)$

- a proto tedy platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{x^2+n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$$

(4)

POZNÁMKY :

- 1) Při použití Weierstrassova kritéria lze majorantu najít bez výpočtu suprema modulů u odhadem :

$$g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$$

$$\forall x \in (-1,1) \text{ platí } |g_n(x)| = \frac{1}{n} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+n}} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{0+n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

- 2) Pro důkaz stejnoměrné konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$

lze snadno použít i Abelova kritéria:

opět použijeme f_n, g_n jako ve formulaci Abelova krit.

$$\text{tedy } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$$

potom $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ zřejmě (ústejná řada, Leibnizovo k.)

a $g_n(x)$ je zřejmě pro každé x monotónní (klesající)

a platí $(\forall x \in (-1,1)) (|g_n(x)| \leq 1)$.. tj. je stejnoměrně omezená

$$g(x) = \operatorname{erf}(x)$$

$$g'(x) = 2 \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erf}(2x) \checkmark = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \checkmark$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} =$$

$$- \left| \begin{array}{l} m = n+1 \end{array} \right| = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{2} \frac{2^{2m}}{(2m)!} x^{2m} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{4^m}{(2m)!} x^{2m} \checkmark$$

$$\tilde{R}^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{4^n} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

$$G = (-\infty, +\infty) \checkmark$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}) : |g^{(n)}(x)| < 2$$

... všechny derivace omezené $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{řada } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ je Maelaurinova}$$

řadou funkce $g(x)$, t.j.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n} ; x \in \mathbb{R}$$

