| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Příjmení a jméno** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | CELKEM |
| | | | | | | | |

# Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta A

pondělí 6. ledna 2020, 13:00–15:00

MK

**1** (10 bodů)

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y''' + \frac{3}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = \frac{2}{x}$$

s podmínkami $y(1) = \frac{11}{2}$, $y'(1) = -1$, $y''(1) = 12$.

JK

**2** (6 bodů)

Nalezněte všechna $a \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = a\sqrt{x}$ měly v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

vzdálenost rovnou čtyřem.

JK

**3** (6 bodů)

V metrickém prostoru $(\mathbf{R}^2, \varrho)$ je dána množina $A$ (obrys čtverce bez vnitřku – viz obrázek na zadní straně zadání). Okolí vybraného bodu (o poloměru $\varepsilon$) má tvar úsečky z obrázku o délce $2\varepsilon$. Do druhého obrázku vyznačte všechny vnitřní body množiny $A$ a slovně vysvětlete, o co se opírá vaše úvaha. V rámci řešení také vyslovte definici vnitřního bodu!

JK

**4** (9 bodů)

Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 6x^2\mathrm{e}^{2x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \left\{y(x) \in C^3(\mathbf{R}) : \; xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0 \wedge y''' - 4y'' + 4y' = 0\right\}$$

má dimenzi jedna. Jakého tvaru je $\Omega_0$ pro výše uvedenou rovnici třetího řádu?

MK

**5** (9 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$4x + x^2 + 4y + 2xy + 2y^2 - 12z - 6xz - 4yz + 10z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje, a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

10b

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{1}{x}\dot y$ & $y'' = -\frac{1}{x^2}\dot y + \frac{1}{x^2}\ddot y$ & $y''' = \frac{1}{x^3}\dddot y - \frac{3}{x^3}\ddot y + \frac{2}{x^3}\dot y$

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^2$$

$$\dddot y - 3\ddot y + 2\dot y - 3\dot y + 3\ddot y - 2\dot y + 2y = 2e^{2t}$$

$$\dddot y - 3\dot y + 2y = 2e^{2t}$$

$(\lambda^3 - 3\lambda + 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + \lambda - 2$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2$

$-2\lambda + 2$

$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+8}\right) = \frac{1}{2}(-1 \pm 3) = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$$FS_t = \{e^t;\ e^t \cdot t;\ e^{-2t}\}$$

$y_p(t) = \beta e^{2t} \Rightarrow \dot y_p = 2\beta e^{2t}$ & $\ddot y_p = 4\beta e^{2t}$ & $\dddot y_p = 8\beta e^{2t}$

$$(8 - 6 + 2)\beta e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$\beta = 1/2$$

$$y(t) = Ae^t + B \cdot t \cdot e^t + C \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$y(x) = Ax + Bx \cdot \ln x + \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{2}$$

C.u.: $y' = A + B\ln x + B - \frac{2C}{x^3} + x$

$y'' = \frac{B}{x} + \frac{6C}{x^4} + 1$

$$\left\{\begin{aligned} y(1) &= A + C + \tfrac{1}{2} \overset{!}{=} \tfrac{11}{2} \\ y'(1) &= A + B - 2C + 1 \overset{!}{=} -1 \\ y''(1) &= B + 6C + 1 \overset{!}{=} 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A, B, C) = (3, -1, 2)$$

$-1 + 12 + 1$

$y(x) = 3x - x\ln x + \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2}$; Dom(y) $= (0, +\infty)$

6 bodů

$f(x)=\sqrt{x}$ & $g(x)=a\sqrt{x}$

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\,g(x)\,e^{-2x}\,dx$$

V Hilbertově prostoru: $\|h(x)\|^2 := \langle h|h\rangle = \int_0^{+\infty} h^2(x)\,e^{-2x}\,dx$

$$\rho(f,g) := \sqrt{\|f-g\|^2} = \sqrt{\langle f-g|f-g\rangle} = \left(\int_0^{+\infty}(f-g)^2 e^{-2x}\,dx\right)^{1/2}$$

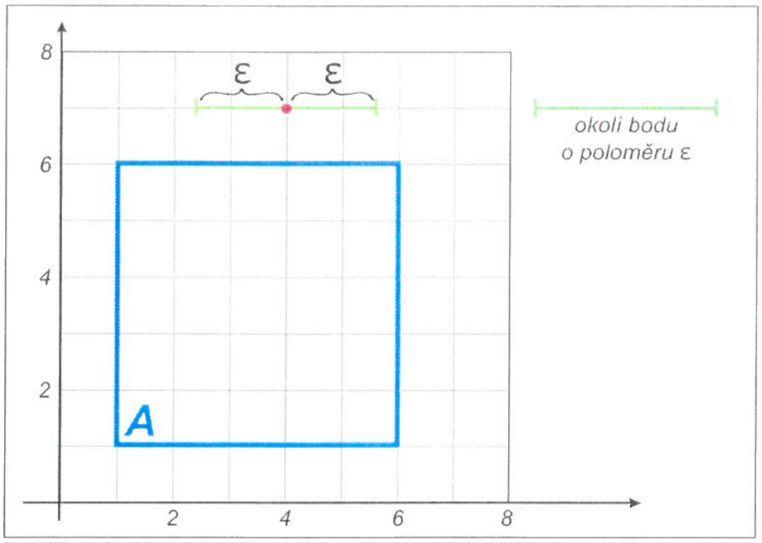
$$\rho^2(\sqrt{x};a\sqrt{x}) = \int_0^{\infty}\left(\sqrt{x}-a\sqrt{x}\right)^2\cdot e^{-2x}\,dx = (1-a)^2\int_0^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx =$$

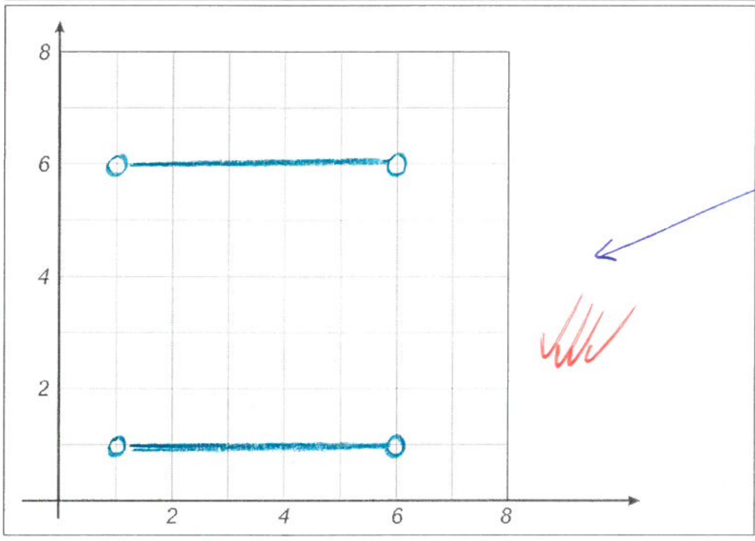
$$= \begin{vmatrix} u=x & v'=e^{-2x} \\ u'=1 & v=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{vmatrix} = (1-a)^2\left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} + (1-a)^2\int_0^{\infty}\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(1-a)^2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}(1-a)^2 \overset{!}{=} 4^2$$

$$|1-a| = 4\cdot 2$$

$a=-7$ $\qquad$ $a=9$



vyznačeny vnitřní body

$$a \in A^{0} \overset{\text{DEF.}}{\iff} \exists\, \varepsilon > 0 : \; U_{\varepsilon}(a) \subset A$$

 společný FS s $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ 9 bodů

In[78]:= DSolve$\left[t''[x] + \left(-4 - \frac{1}{x}\right) * t'[x] + \left(4 + \frac{2}{x}\right) * t[x] == 0, t[x], x\right]$

Out[78]= $\{\{t[x] \to e^{2x} C[1] + \frac{1}{2} e^{2x} x^2 C[2]\}\}$

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 6x^2 e^{2x}$$

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0 \qquad \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda(\lambda-2)^2$$

$$F_S^{(I)} = \{1, e^{2x}, xe^{2x}\}$$

Funkce $f(x) = 1$ rovnici $\hat{L}(y) = 0$ neřeší! Funkce $f(x) = e^{2x}$ ano.
Proto snížíme řád substitucí:

$$y(x) = z(x)\, e^{2x}$$

$$y' = z'e^{2x} + 2ze^{2x} \qquad y'' = z''e^{2x} + 4z'e^{2x} + 4ze^{2x}$$

$$z''x + 4z'x + 4zx - (4x+1)(z'+2z) + (4x+2)z = 6x^2$$

$$z''x + \cancel{4z'x} + \cancel{4zx} - \cancel{4xz'} - \cancel{8xz} - z' \cancel{- 2z} + \cancel{4xz} + \cancel{2z} = 6x^2$$

$$z''x - z' = 6x^2 \qquad w(x) := \frac{dz}{dx}$$

$$w' - \frac{1}{x}w = 6x \quad \Big/ \; e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$w'\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}w = 6$$

$$\left(w \cdot \frac{1}{x}\right)' = (6x + C)'$$

$$w(x) = Cx + 6x^2$$

$$z(x) = Cx^2 + 2x^3 + D$$

$$y(x) = De^{2x} + Cx^2e^{2x} + 2x^3e^{2x} \; ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{R}_0 = [1, e^{2x}, xe^{2x}]_\lambda$$

9 bodů

In[4]:= Expand[(x + y − 3 z)^2 + (y + z)^2 + 4 * (x + y − 3 z)]

Out[4]= $4x + x^2 + 4y + 2xy + 2y^2 - 12z - 6xz - 4yz + 10z^2$ =: Q

$q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xz - 4yz + 10z^2 = (x+y-3z)^2 + (y+z)^2 =$
$=: \xi^2 + \eta^2 + 0 \cdot \lambda^2$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x+y-3z \\ \eta &= y+z \\ \lambda &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \xi - \eta + \lambda + 3\lambda = \xi - \eta + 4\lambda \\ y &= \eta - \lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

$Q(x,y,z) = \xi^2 + \eta^2 + 4\xi = (\xi+2)^2 + \eta^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ normální tvar: $a^2 + b^2 - 1 = 0$ (musí být normalizováno!!!)

název: eliptický válec

$sg(Q) = (2, 0, 1)$

$sG(Q) = (2, 1, 1)$

$\Rightarrow$ převod do normálního tvaru: $\frac{(\xi+2)^2}{4} + \frac{\eta^2}{4} - 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\xi+2}{2} = \frac{\xi}{2} + 1 \\ b &= \frac{\eta}{2} \\ c &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \xi &= 2a-2 \\ \eta &= 2b \\ \lambda &= c \end{aligned}$$

$x = 2a - 2 - 2b + 4c$
$y = 2b - c$
$z = c$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

| Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Příjmení a jméno** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | CELKEM |
| | | | | | | | |

## Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta B

pondělí 6. ledna 2020, 13:00–15:00

P

**1** (6 bodů)

Nalezněte všechna $a \in \mathbf{R}$ tak, aby funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = ax^2$ měly v Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ se skalárním součinem

$$\langle f|g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

vzdálenost rovnou $4\sqrt{6}$.

**2** (9 bodů)

K

Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 24x^3\mathrm{e}^{3x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \left\{y(x) \in C^3(\mathbf{R}) : xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 0 \wedge y''' - 6y'' + 9y' = 0\right\}$$

má dimenzi jedna. Jakého tvaru je $\Omega_0$ pro výše uvedenou rovnici třetího řádu?

K

**3** (6 bodů)

V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \varrho\}$ je dána množina $A$ (obrys čtverce bez vnitřku – viz obrázek na zadní straně zadání). Okolí vybraného bodu (o poloměru $\varepsilon$) má tvar úsečky z obrázku o délce $2\varepsilon$. Do druhého obrázku vyznačte všechny hraniční body množiny $A$ a slovně vysvětlete, o co se opírá vaše úvaha. . V rámci řešení také vyslovte definici hraničního bodu!

P

**4** (9 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$4x + x^2 + 12y + 6xy + 8y^2 + 8z + 4xz + 8yz = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje, a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

P

**5** (10 bodů)

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{5}{x^2}y' + \frac{8}{x^3}y = 6x$$

$x=1$ s podmínkami $y(1) = -1$, $y'(1) = \frac{5}{2}$, $y''(1) = -\frac{7}{2}$.

$x = e^t$

$\dddot{y} - 2\ddot{y} - 4\dot{y} + 8y = 6e^{4t}$ 2

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)$ 3

$FS_t = (e^{2t}, te^{2t}, e^{-2t})$ 4

$y(x) = Ax^2 + Bx^2\ln x + C/x^2 + \frac{x^4}{4}$ 7

$\frac{1}{4}e^{4t}$

$(A, B, C) = (-\frac{1}{4}, 0, -1)$ 9 $y = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{4}$ / $(0, +\infty) = I$ 10

6b

$f(x) = x^2$ & $g(x) = ax^2$

V Hilbertově prostoru: $\|f\|^2 = \langle f|g \rangle = \int_0^\infty f^2(x)\, e^{-x}\, dx$

a také: $\rho(f,g) = \|f-g\|$

$$\Rightarrow \rho^2(f,g) = \|f-g\|^2 = \int_0^\infty (f-g)^2 e^{-x}\, dx$$

$$\rho^2(x^2, ax^2) = \int_0^\infty (x^2 - ax^2)^2 e^{-x}\, dx = (1-a)^2 \int_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}\, dx = \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\beta} \quad \Big/ \ \frac{d^4}{d\beta^4}$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\beta x}\, dx = \frac{4!}{\beta^5}$$

$$\rho^2(x^2, ax^2) = (1-a)^2 \cdot 24 \overset{!}{=} 16 \cdot 6$$

$$(1-a)^2 \cdot 4 = 16$$

$$|1-a| = 2$$

$a = 3$ $\qquad$ $a = -1$

 společný FS (částečně) s rovnicí $y''' - 6y'' + 9y' = 0$ 9b

In[69]:= DSolve$\left[t''[x] + \left(-6 - \frac{1}{x}\right) * t'[x] + \left(9 + \frac{3}{x}\right) * t[x] == 0,\ t[x],\ x\right]$

Out[69]= $\{\{t[x] \to e^{3x} C[1] + \frac{1}{2} e^{3x} x^2 C[2]\}\}$

$$xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 24x^3 e^{3x}$$

$y''' - 6y'' + 9y' = 0$ $\quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2$

$$F_S^{(I)} = \{1, e^{3x}, xe^{3x}\}$$

Rovnici $\hat{L}(y) = 0$ řeší funkce $g(x) = e^{3x}$. Proto snížíme řád substitucí

$$y(x) = z(x) \cdot e^{3x}$$

$y' = z'e^{3x} + 3ze^{3x}$ $\quad y'' = z''e^{3x} + 6z'e^{3x} + 9ze^{3x}$

$$\hat{L}(z) = z''x + 6z'x + 9zx - (6x+1)(z' + 3z) + (9x+3)z = 24x^3$$

$$z''x + \cancel{6z'x} + \cancel{9zx} - \cancel{6xz'} - \cancel{18xz} - z' - \cancel{3z} + \cancel{9xz} + \cancel{3z} = 24x^3$$

$z''x - z' = 24x^3$ $\quad w(x) := \frac{dz}{dx}$

$w' - \frac{1}{x}w = 24x^2 \quad / \ \frac{1}{x} = \text{I.F.}$

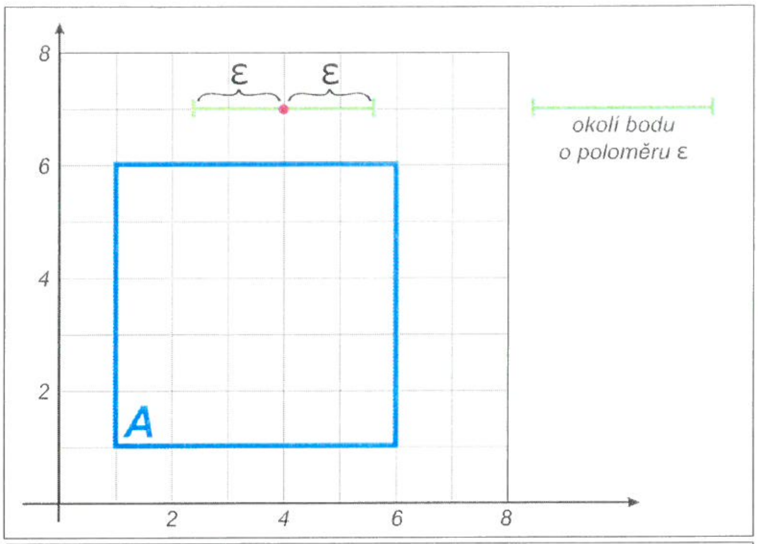
$\left(w \cdot \frac{1}{x}\right)' = 24x$

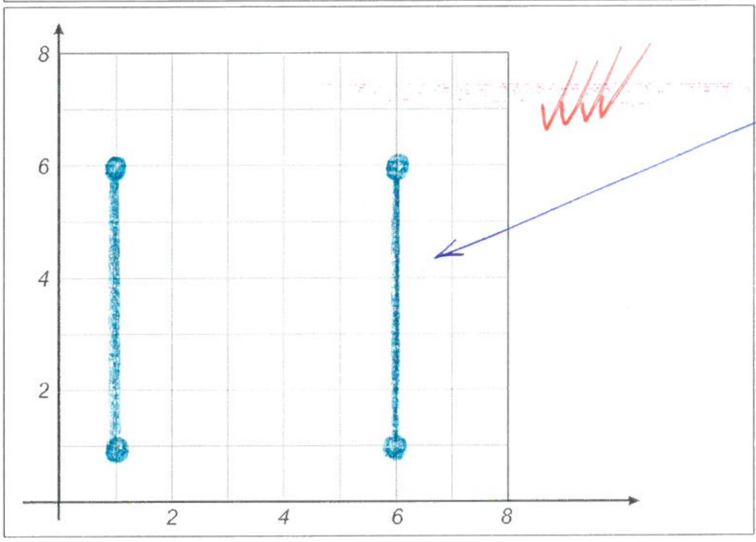
$w = Cx + 12x^3$

$z(x) = Cx^2 + D + 3x^4$

$$y(x) = Cx^2e^{3x} + De^{3x} + 3x^4e^{3x}\ ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathcal{B}_0 = [1, e^{3x}, xe^{3x}]_\lambda$




vyznačený hraniční body

$$a \in bd(A) \overset{DEF.}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists x, y \in U_\varepsilon(a):\ x \in A \wedge y \notin A$$

9b

In[2]:= Expand[(x + 3 y + 2 z)^2 − (y + 2 z)^2 + 4 * (x + 3 y + 2 z)]

Out[2]= $4x + x^2 + 12y + 6xy + 8y^2 + 8z + 4xz + 8yz$

$q(x,y,z) = (x+3y+2z)^2 - (y+2z)^2 =: \xi^2 - \eta^2 + 0\cdot\lambda^2$

$\left.\begin{aligned} \xi &= x+3y+2z \\ \eta &= y+2z \\ \lambda &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{aligned} x &= \xi - 3\eta + 6\lambda - 2\lambda = \xi - 3\eta + 4\lambda \\ y &= \eta - 2\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}}$

$Q(x,y,z) = \xi^2 - \eta^2 + 4\xi = (\xi+2)^2 - \eta^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow$ normální tvar: $a^2 - b^2 - 1 = 0$ (pouze, pokud se skutečně jedná o normalizovaný tvar!!!)

název: hyperbolický válec

$sg(Q) = (1,1,1)$

$SG(Q) = (1,2,1)$ nebo $(2,1,1)$

$\Rightarrow$ převod do normálního tvaru: $\frac{(\xi+2)^2}{4} - \frac{\eta^2}{4} - 1 = 0$

$\Rightarrow \underbrace{a = \frac{\xi+2}{2} = \frac{\xi}{2} + 1}_{\xi = 2a-2} \wedge \underbrace{b = \frac{\eta}{2}}_{\eta = 2b} \wedge \underbrace{c = \lambda}_{\lambda = c}$

$\left.\begin{aligned} x &= 2a - 2 - 6b + 4c \\ y &= 2b - 2c \\ z &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 10b

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\dot y \quad \& \quad y'' = -\frac{1}{x^2}\dot y + \frac{1}{x^2}\ddot y \quad \&$$

$$\& \quad y''' = +\frac{2}{x^3}\dot y - \frac{1}{x^3}\ddot y - \frac{2}{x^3}\ddot y + \frac{1}{x^3}\dddot y \ ✓$$

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 5xy' + 8y = 6x^4$$

$$\dddot y - 3\ddot y + 2\dot y - \dot y + \ddot y - 5\dot y + 8y = 6e^{4t}$$

$$\dddot y - 2\ddot y - 4\dot y + 8y = 6\cdot e^{4t} \ ✓$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda-2)^2(\lambda+2) \ ✓$$

$$FS_t = \{e^{2t};\ te^{2t};\ e^{-2t}\} \ ✓$$

$$y_p(t) = \alpha e^{4t} ✓ \Rightarrow \dot y_p(t) = 4\alpha e^{4t} \quad \& \quad \ddot y_p(t) = 16\alpha e^{4t} \quad \&$$

$$\& \quad \dddot y_p(t) = 64\alpha e^{4t}$$

Dosazení:

$$\alpha(64 - 32 - 16 + 8)e^{4t} = 6e^{4t}$$

$$24\alpha = 6$$

$$y(t) = Ae^{2t} + B\cdot t\cdot e^{2t} + C\cdot e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{4t} ✓; \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

$$y(x) = Ax^2 + Bx^2\ln(x) + \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{4} \ ✓$$

Cauchyova úloha:

$$y' = 2Ax + 2Bx\ln x + Bx - \frac{2C}{x^3} + x^3$$

$$y'' = 2A + 2B\ln x + 2B + B + \frac{6C}{x^4} + 3x^2$$

$$✓ \left\{\begin{array}{l} y(1) = A + C + \frac{1}{4} \overset{!}{=} -1 \\ y'(1) = 2A + B - 2C + 1 \overset{!}{=} \frac{5}{2} \\ y''(1) = 2A + 3B + 6C + 3 \overset{!}{=} -\frac{7}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (A, B, C) = \left(-\frac{1}{4};\ 0;\ -1\right) ✓$$

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x^4}{4}; \quad Dom(y) = (0; +\infty)$$

✓