$z(x), w(x) \in \Omega_q \Rightarrow \hat{L}(z(x)) = q(x) \wedge \hat{L}(w(x)) = q(x)$ 2b

$$\hat{L}(2w(x) - z(x)) = 2\hat{L}(w(x)) - \hat{L}(z(x)) = 2q(x) - q(x) = q(x)$$

$$\Rightarrow \quad z(x), w(x) \in \Omega_q \Rightarrow 2w(x) - z(x) \in \Omega_q$$

(4A) 5b

Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{(2n+1)!!} x^n$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{2n+3} = \frac{3}{2} \checkmark$$

$$R = \frac{2}{3}$$

Krajní řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(2n+1)!!} \left(\pm \frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!!}$ ✓ ← tvar krajních řad

(nejsou-li krajní řady určeny správně, dále se neopravuje!)

Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{2^n \cdot n!}\right) = \lim_{n\to\infty} n \left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\right) =$$

✓ Raabe

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2} \in (0,1) \checkmark$$

$$O = \left\langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \checkmark$$

$$(1+\tau)^{-1/2} \overset{\checkmark}{=} 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\tau^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\tau^n =$$ 7b

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n n!}\tau^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\tau^n \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{y^3+1}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{3n} \checkmark$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^3+1}}\,dy = \int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}y^{3n}\right)dy = x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\frac{y^{3n+1}}{3n+1}\right]_0^x =$$

$$= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)} \checkmark\checkmark$$

jistě pro $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^3+1}}\,dy \doteq x-\frac{1}{8}x^4+\frac{3}{56}x^7 \checkmark\checkmark$$

← body se udělují pouze za správné vyčíslení hledaného prvku v $[1,x,x^2,\dots,x^7]_\lambda$

9 bodů

Jedním řešením diferenciální rovnice

$$x^2y'' + (4x^2 - 7x)y' + (4x^2 - 14x + 15)y = 24xe^{-2x}$$

je funkce $\underbrace{xe^{-2x}(3 + x^2)}$. Jak vypadá celý prostor řešení této rovnice?

$\hookrightarrow$ složenina z funkce z Ω_0 a z partikulárního řešení

Dosazením zjistíme, že: $\hat{L}(3xe^{-2x}) = 24xe^{-2x} \Rightarrow 3xe^{-2x} = y_p(x)$

$\hat{L}(x^3e^{-2x}) = 0 \Rightarrow x^3e^{-2x} \in \Omega_0$ ✓

Proto snížíme řád substitucí: $y(x) = z(x) \cdot x^3 \cdot e^{-2x}$ ✓

✓ $$\begin{cases} y' = z'(x^3e^{-2x}) + z(3x^2 - 2x^3)e^{-2x} \\ y'' = z''x^3e^{-2x} + 2z'(3x^2-2x^3)e^{-2x} + z(6x - 6x^2 - 6x^2 + 4x^3)e^{-2x} \end{cases}$$

Dosadíme! Ale jen do rovnice s nulovou pravou stranou, protože partikulární řešení už známe.

$$z''x^5 + z'(6x^4 - 4x^5) + z'(4x^2-7x)(x^3\cancel{e^{-2x}}) +$$
$$+ z\left[6x^3 - 12x^4 + 4x^5 + (4x^2 - 7x)(3x^2 - 2x^3) + (4x^2 - 14x + 15)x^3\right] = 0$$

$$z''x^5 + z'(6x^4 - \cancel{4x^5} + \cancel{4x^5} - 7x^4) +$$
$$+ z[\cancel{6x^3} - \cancel{12x^4} + \cancel{4x^5} + \cancel{12x^4} - \cancel{8x^5} - \cancel{21x^3} + \cancel{14x^4} + \cancel{4x^5} - \cancel{14x^4} + \cancel{15x^3}] = 0$$

$$z''x^5 - x^4z' = 0 \quad \leftarrow ✓✓$$

$$z'' - \frac{1}{x}z' = 0 \quad / \text{ I.F. } e^{-\ln x} = \frac{1}{x} ✓$$ ← není-li I.F. určen správně, dále se neopravuje

$$\left(z' \cdot \frac{1}{x}\right)' = 0$$

$$z'(x) = \tilde{C}x \Rightarrow z(x) = Cx^2 + D ✓$$

$$y(x) = Cx^5e^{-2x} + Dx^3e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \Omega_y = [x^3e^{-2x}; x^5e^{-2x}]_\lambda + 3xe^{-2x}$$ ✓✓

$Dom(y) = R$

(není-li uveden $Dom(y) \Rightarrow \frac{1}{2}$ bodu dolů)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{(x-1)^{2n}(5-x)^{2n}}{n\cdot 25^n}}_{\triangleq f_n(x)} \quad \text{na} \quad (0,5)$$

9 bodů

& označme: $g_n(x) = (x-1)^{2n}(5-x)^{2n}$

$$g_n'(x) = 2n(x-1)^{2n-1}(5-x)^{2n} - 2n(x-1)^{2n}(5-x)^{2n-1} \stackrel{!}{=} 0$$ ✓

$$(x-1)^{2n-1}\cdot(5-x)^{2n-1}\cdot[5-x-x+1] \stackrel{!}{=} 0$$

$$(x-1)^{2n-1}(5-x)^{2n-1}\cdot(6-2x) \stackrel{!}{=} 0$$ ✓

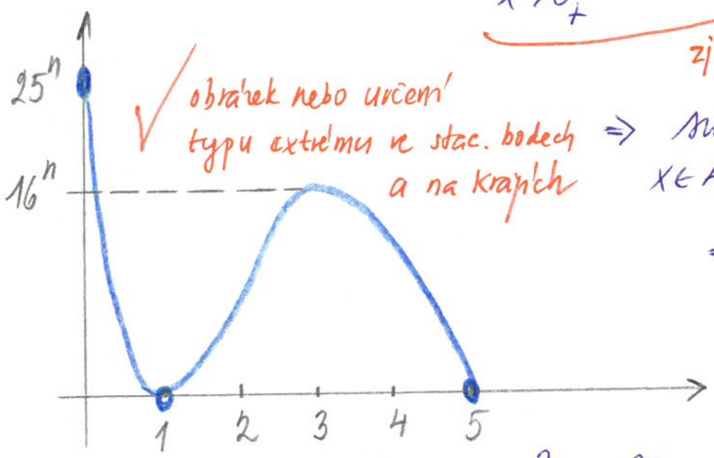
✓ stacionární body

$x=5$ (není v A) $g_n(5)=0$

$x=1$ $g_n(1)=0$

$x=3$ $g_n(3)=4^n\cdot 4^n = 16^n$

$$g_n(x) \geq 0 \ \text{na} \ A=(0,5) \ \& \ \underbrace{\lim_{x\to 0_+} g_n(x) = g_n(0) = 1\cdot 5^{2n} = 25^n}_{\text{zjištěním, že funkce nabývá nejvyšších hodnot na pravém okolí nuly}}$$ ✓



✓ obrázek nebo určení typu extrému ve stac. bodech a na krajích

$$\Rightarrow \sup_{x\in A} (x-1)^{2n}\cdot(5-x)^{2n} = 25^n$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in A} |f_n(x)| = \frac{1}{n\cdot 25^n}\cdot 25^n = \frac{1}{n}$$

$$\forall x\in(0,5): \quad \left|(-1)^n \frac{(x-1)^{2n}(5-x)^{2n}}{n\cdot 25^n}\right| \leq \frac{1}{n}$$ ✓

Jenže řada $\sum \frac{1}{n}$ nekonverguje a lepší majorantu než $\frac{1}{n}$ prostě nalézt nelze ✓ $\Rightarrow$ k rozhodnutí o SK W-kritérium užít nelze ✓

! je-li supremum určeno chybně, nelze již získat žádný další bod !

$$(2x-1)y'' + (4x^2-4x-1)y' = 0 \qquad y(1)=2 \ \& \ y'(1)=3$$

8b

$$y' = z \qquad z' + \frac{4x^2-4x-1}{2x-1} z = 0$$

$$\frac{4x^2-4x-1}{2x-1} + \frac{1}{z} z' = 0$$

↪ rovnice se separovanými proměnnými

$$\int \frac{4x^2-4x-1}{2x-1}\,dx = -\int \frac{dz}{z}$$

$$(4x^2-4x-1):(2x-1) = 2x-1 - \frac{2}{2x-1}$$

$$\begin{array}{l} -4x^2+2x \\ \hline -2x-1 \\ 2x-1 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\int \left(2x-1 - \frac{2}{2x-1}\right) dx = -\int \frac{dz}{z}$$

$$x^2 - x - \ln|2x-1| + C = -\ln|z|$$

$$e^{-x^2} \cdot e^{x} \cdot e^{\ln|2x-1|} \cdot \tilde{D} = z(x)$$

| bod, v němž jsou stanoveny Cauchyovy podmínky je $x_0 = 1 \Rightarrow 2x_0 - 1 > 0$ $\Rightarrow$ proto lze $|\cdot|$ odstranit

$$z(x) = (2x-1)\cdot e^{-x^2+x} \cdot \tilde{D}$$

$$y(x) = E + D\cdot e^{x-x^2}; \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

← s ohledem na původní zadání (viz také níže)

$$\left\{\begin{array}{l} y(1) = E + D \overset{!}{=} 2 \\ y'(1) = (1-2x)\,e^{x-x^2}\cdot D\Big|_{x=1} = -D \overset{!}{=} 3 \end{array}\right\} \Rightarrow (C,D) = (5,-3)$$

$$y(x) = 5 - 3e^{x-x^2}; \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

po dosazení tohoto řešení do původní rovnice vidíme, že $Dom(y) = \mathbb{R}$

Pozn. úlohu lze řešit také metodou integračního faktoru

$z(x), w(x) \in \Omega_g \Rightarrow \hat{L}(z(x)) = g(x) \wedge \hat{L}(w(x)) = g(x) \Rightarrow$ 2b

$\Rightarrow \hat{L}(w(x) - z(x)) = \hat{L}(w(x)) - \hat{L}(z(x)) = g(x) - g(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow w(x) - z(x) \in \Omega_0$

✓✓

8b

$$f_n(x) = \frac{12x^2n^2 - 2xn + 1}{4x^2n^2 - 2xn + 1} \qquad I = (0; +\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 3$$ ... limitní funkcí je funkce konstantní

$$g_n(x) \stackrel{\Delta}{=} f_n(x) - f(x) = \frac{12x^2n^2 - 2xn + 1 - 12x^2n^2 + 6xn - 3}{4x^2n^2 - 2xn + 1} = \frac{4xn - 2}{4x^2n^2 - 2xn + 1}$$

- vyšetříme extrémy funkce $g_n(x)$:

$$g_n'(x) = \frac{\cancel{4n}(4x^2n^2 - 2xn + 1) - (\overset{2}{\cancel{4}}xn - \overset{1}{\cancel{2}})(\overset{4}{\cancel{8}}xn^2 - \cancel{2n})}{(\qquad)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$4x^2n^2 - 2xn + 1 - (2xn - 1)(4xn - 1) = 0$$

$$4x^2n^2 - \cancel{2xn} + \cancel{1} - 8x^2n^2 + \cancel{2xn} + 4xn - \cancel{1} = 0$$

$$-4x^2n^2 + 4xn = 0$$

$$4xn(-xn + 1) = 0$$

$x = 0$ (mimo I) $\qquad x = 1/n$

$$g_n(0) = -2 \qquad g_n(1/n) = \frac{2}{4 - 2 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} |g_n(x)| = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ uvedená posloupnost konverguje ke své limitní funkci $f(x) = 3$ pouze bodově, ale nikoli stejnoměrně

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 9^n}}_{f_n(x)}$$

8 bodů

& označme: $g_n(x) = (x^2-1)^{2n}$; $Dom(g) = I = (-1;2)$

– vyšetříme extrémy funkce $g_n(x)$

$$g_n'(x) = 2n(x^2-1)^{2n-1}\cdot 2x \stackrel{!}{=} 0$$

$x=-1$ (není v I) $g_n(-1)=0$

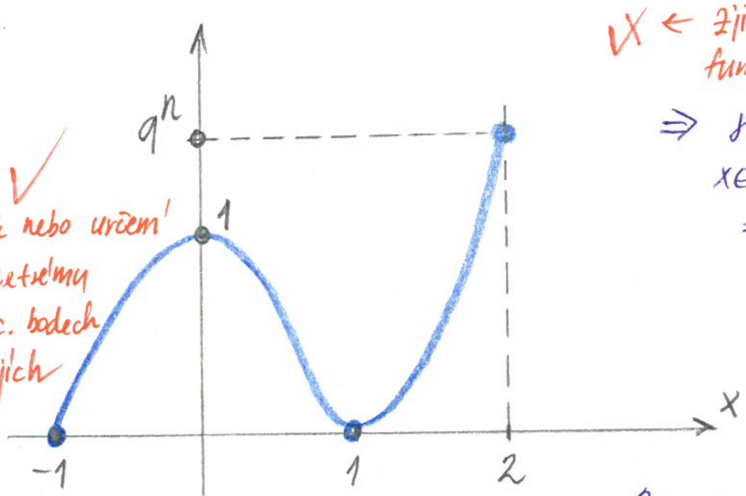
$x=1$ $g_n(1)=0$

$x=0$ $g_n(0)=1$

✓ určení stacionárních bodů

✓ $\left\{ g_n(x) \in C(\mathbb{R}) \wedge \lim_{x\to -1_+} g_n(x) = g_n(-1) = 0 \wedge \lim_{x\to 2_-} g_n(x) = g_n(2) = 9^n \right\}$

✓ obrázek nebo určení typu extrému ve stac. bodech a na krajích



✗ ← zjištění, že funkce nabývá svých nejvyšších funkčních hodnot na levém okolí dvojky

$$\Rightarrow \sup_{x\in I} g_n(x) = 9^n$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{9^n}\cdot 9^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in (-1,2): \left| (-1)^n \frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 9^n} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \checkmark$$

– jenomže majorantní číselná řada $\sum 1/\sqrt{n}$ bohužel nekonverguje a lepší majoranta nalezena být nemůže ✓

$\Rightarrow$ na daný příklad W-kritérium nefunguje ✓

! je-li supremum určeno chybně, nelze již získat žádný další bod !

7b

$$(1+\tau)^{-1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/3}{n} \tau^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\dots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!}\tau^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot(3n-2)}{3^n\, n!}\tau^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!}\tau^n$$

$$(1+y^2)^{-1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!} y^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{y^2+1}}\,dy = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!} y^{2n}\right) dy =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!} \left[\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n\, n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$ $R = 1$ (tj funguje to jistě pro $|x|<1$)

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{y^2+1}}\,dy \doteq x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{4}{18}\frac{x^5}{5} - \frac{7\cdot 4}{27\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7}$$

$$= x - \frac{x^3}{9} + \frac{2}{45}x^5 - \frac{2}{81}x^7$$

body se udělují pouze za konkrétní (a správné) vyčíslení hledaného prvku v $[1, x, x^2, \ldots, x^7]_\lambda$

6 bodů

$$\underbrace{x-2y+1}_{f(x,y)} + y'\underbrace{(5y-2x-4)}_{g(x,y)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2 \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow$$ rovnice splňuje podmínku exaktnosti

Formální řešení:

$$H(x,y) = \int_0^x f(s,y)\,ds + \int_0^y g(0,\tau)\,d\tau = C$$

$$\int_0^x (s-2y+1)\,ds + \int_0^y (5\tau-4)\,d\tau = C$$

$$\frac{x^2}{2} - 2xy + x + \frac{5}{2}y^2 - 4y = C$$

$$x^2 - 4xy + 2x + 5y^2 - 8y = C$$

← tohle jsou všechna formální řešení (jedno z nich je na obrázku)

Křivka na obrázku prochází bodem $(x_0, y_0) = (8,3)$

↑ za nápad, jak určit předpis té křivky z obrázku

$$64 - 96 + 16 + 45 - 24 = C$$
$$C = 5$$

Křivka z obrázku má rovnici:

$$x^2 - 4xy + 2x + 5y^2 - 8y = 5$$

Pozn. těch bodů (x_0, y_0), které mají celočíselné složky je na obrázku poměrně hodně!

5 (bodů)
Rovnici

$$x^2(1-2x)y'' - x(4-11x+4x^3)y' + 2(3-9x+x^2+5x^3-2x^4)y = 2x^4(1+x-2x^2)$$

řeší funkce $\underbrace{x^2(1+e^{-x})}_{z(x)}$ a $\underbrace{x^2(1+2e^{-x})}_{w(x)}$. ~~Nalezněte takové řešení, pro které $y(1) = \frac{3}{e}+1$ a $y'(1) = 2$.~~

9b

$\Rightarrow \quad z(x), w(x) \in \Omega_q \Rightarrow z(x) - w(x) \in \Omega_0$

$\Rightarrow \underbrace{x^2(1+2e^{-x}) - x^2(1+e^{-x})}_{y_p(x) = x^2} = x^2 e^{-x} \in \Omega_0 \Rightarrow$ jedno řešení rovnice s nulovou pravou stranou je $v(x) = e^{-x} \cdot x^2$

- navíc známe i partikulární řešení $\Rightarrow$ není třeba již řešit rovnici s pravou stranou
- snížíme řád: $y(x) = z(x) \cdot x^2 \cdot e^{-x}$

$$\begin{cases} y' = z'x^2e^{-x} + z(2x-x^2)e^{-x} \\ y'' = z''x^2e^{-x} + 2z'(2x-x^2)e^{-x} + z(2-4x+x^2)e^{-x} \end{cases}$$

Dosadíme. Z teorie víme, že po dosazení musí výraz u $z(x)$ vypadnout!

$$z''x^2(x^2-2x^3) + z'[(x^2-2x^3)(4x-2x^2) + x^2(-4x+11x^2-4x^4)] = 0$$

$$z''x^4(1-2x) + z'[\cancel{4x^3} - 2x^4 - 8x^4 + 4x^5 - \cancel{4x^3} + 11x^4 - 4x^6] = 0$$

$$z''x^4(1-2x) + z'(x^4+4x^5-4x^6) = 0$$

$$z''(1-2x) + z'(1+4x-4x^2) = 0$$

$$z'' + \frac{1+4x-4x^2}{1-2x} z' = 0$$

Integrační faktor:

$$\frac{1+4x-4x^2}{1-2x} = -1 + 2x - \frac{2}{-1+2x} \Rightarrow -x + x^2 - \ln(2x-1)$$

$$I.F. = e^{-x} \cdot e^{x^2} \frac{1}{2x-1}$$

$$\left(z' \cdot e^{-x} \cdot e^{x^2} \frac{1}{2x-1}\right)' = c'$$

$$z' = (2x-1) \cdot e^{x-x^2} \cdot c$$

$$z(x) = D e^{x-x^2} + E$$

$$y(x) = Dx^2e^{-x^2} + E \cdot x^2 e^{-x} \quad ; \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

Celkové řešení:

$$y(x) = Dx^2e^{-x^2} + Ex^2e^{-x} + x^2, \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$