Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

22. května 2017, 9:00–11:00

MK

1 (8 bodů)
Vypočítejte integrál

$$\int_B (x^2 + y^2)|z|\,\mathrm{d}(x, y, z),$$

kde

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leqslant x^2 + y^2\right\}.$$

JK

2 (7 bodů)
Kolik procent plochy zabírá elipsa $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leqslant 1$ v obdélníku $\langle -a; a\rangle \times \langle -b; b\rangle$? Vytvořujícími funkcemi v obou dimenzích nechť je funkce $g(\tau) = \tau^3$.

3 (8 bodů)
Nechť $a > 0$ je zvoleno pevně. Vypočítejte integrál

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a^{2/5} - y^{2/5}}} \frac{1}{\sqrt{x^{6/5} + y^{6/5}}}\,\mathrm{d}\mu_c(x, y),$$

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : x, y \geqslant 0 \wedge \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/5} + \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{1/5} = 1\right\}$$

4 (10 bodů)
Užitím věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\beta \cdot \operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

MK

5 (7 bodů)
Nechť $H = \langle -1; 2)$ a

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 2 & x > -1, \\ x + 1 & x \leqslant -1, \end{cases}$$

je vytvořující funkce Lebesgueovy míry. Vypočítejte $\mu(H)$ a $\mu(H^\circ)$. Jaký další výsledek (pro míru jisté množiny) lze odvodit z aditivity míry? Vysvětlete a aplikujte.

8b

$$\left[\begin{aligned} x &= \rho\cos\vartheta\cos\varphi \\ y &= \rho\cos\vartheta\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\vartheta \end{aligned}\right]$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq x^2+y^2$$

$$\rho^4 \leq \rho^2\cos^2\vartheta$$

$$\underbrace{\left[\ \rho \leq \cos\vartheta\ \right]}$$

$$\Rightarrow \vartheta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$(x^2+y^2)\cdot|z| = \rho^2\cos^2\vartheta\cdot\rho\,|\sin\vartheta|$$

$$\det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)}\right) = \underbrace{\rho^2\cos\vartheta}$$

nejsou-li meze pro ρ určeny správně, dále se neopravuje!

$$\int_B (x^2+y^2)|z|\,d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\vartheta} \rho^3\cos^2\vartheta\,|\sin\vartheta|\cdot\rho^2\cos\vartheta\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\vartheta)\cdot|\sin\vartheta|\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\cos\vartheta} d\vartheta\,d\varphi = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^9(\vartheta)\cdot|\sin\vartheta|\,d\vartheta\,d\varphi =$$

absolutní hodnota

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^9(\vartheta)\sin(\vartheta)\,d\vartheta = \left|\begin{aligned} u &= \cos\vartheta \\ du &= -\sin\vartheta\,d\vartheta \end{aligned}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot\int_0^1 u^9\,du = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{10} = \frac{\pi}{15}$$

$\varphi(x) = x^3$ & $\psi(y) = y^3$

7

$O = \langle -a; a\rangle \times \langle -b; b\rangle \Rightarrow \mu_2(O) = \left| \begin{matrix}\text{vytvořující funkce}\\ \text{spojité}\end{matrix} \right| = \mu_2(\langle -a;a\rangle \times \langle -b;b\rangle) =$

$= (a^3 - (-a)^3)\cdot(b^3-(-b)^3) = 2a^3 2b^3 = 4a^3b^3$

• DISKUSE, PROČ LZE TUTO VĚTU UŽÍT

$$\mu_2(E) = \int_E 1 \, d\mu_2(x,y) = \int_E \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}\, d\lambda_2(x,y) = \int_E 9x^2y^2\, d(x,y) =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \\ d(x,y) = ab\rho\, d(\rho,\varphi) \end{matrix} \right| = 9\int_0^{2\pi}\int_0^1 a^2\rho^2\cos^2\varphi\, b^2\rho^2\sin^2\varphi\, ab\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= 9a^3b^3\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\, d\varphi\cdot\int_0^1\rho^5\, d\rho = 9a^3b^3\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2(2\varphi)\, d\varphi\cdot\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{3}{8}a^3b^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}\, d\varphi = \frac{3}{8}a^3b^3\cdot\frac{1}{2}\left[2\pi - 0\right] = \frac{3}{8}\pi a^3b^3$$

Kolik procent?

cca

$$\frac{\frac{3}{8}\pi a^3b^3}{4a^3b^3} = \frac{3\cdot\pi}{32} \doteq \frac{3}{32}\cdot\frac{22}{7} = \frac{33}{16\cdot 7} = \frac{33}{112} \doteq \frac{33}{111} = \frac{11}{37} \doteq 30\%$$

v procentech !

Kladičky?

$$\frac{\pi ab}{4ab} = \frac{\pi}{4} \doteq 80\%$$

86

$$\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{a^{2/5}-y^{2/5}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^{6/5}+y^{6/5}}}\, d\mu_e(x,y)$$

$$x,y \geq 0 \ \wedge \ \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/5}+\left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{1/5}=1$$

Parametrizace křivky: $\vec{x}(s) = (a\cos^5(s);\ a\sin^5(s))$ $\quad s\in\langle 0;\pi/2\rangle$

$$a^{2/5}-y^{2/5} = a^{2/5} - a^{2/5}\sin^2(s) = a^{2/5}\cos^2(s)$$

$$x^{6/5}+y^{6/5} = a^{6/5}(\cos^6(s)+\sin^6(s))$$

$$\dot{\vec{x}}(s) = (-5a\cos^4(s)\sin(s);\ 5a\sin^4(s)\cdot\cos(s))$$

$$\|\dot{\vec{x}}(s)\|^2 = 25a^2\cos^8(s)\sin^2(s)+25a^2\sin^8(s)\cos^2(s) = 25a^2\cos^2(s)\cdot\sin^2(s)\cdot[\cos^6(s)+\sin^6(s)]$$

$$\int_\Omega f(x,y)\, d\mu_e(x,y) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^{1/5}\cancel{\cos(s)}}\cdot\frac{1}{a^{3/5}\cancel{\sqrt{\cos^6(s)+\sin^6(s)}}}\cdot 5a\cancel{\cos(s)}\sin(s)\cancel{\sqrt{\cos^6(s)+\sin^6(s)}}\, ds$$

$$= 5a^{1/5}\int_0^{\pi/2}\sin(s)\, ds = \underline{5a^{1/5}}$$

krácení

$$F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$$

10b

$F(0) = 0$

$x \mapsto \dfrac{\operatorname{arctg}(a\cdot\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}$ měřitelná $\Leftarrow$ spojitá na $(0; \pi/2)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2\cdot\operatorname{tg}^2 x}\right| \leq 1 \in \mathcal{L}(0; \pi/2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{tg} x & x = \operatorname{arctg} u \\ & dx = \frac{1}{1+u^2}\, du \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{Ax+B}{1+a^2u^2}\, du + \int_0^{+\infty} \frac{Cu+D}{1+u^2}\, du = \left| \begin{array}{l} (A, C) = (0; 0) \\ B = \frac{a^2}{a^2-1} \quad D = \frac{-1}{a^2-1} \end{array} \right| =$$

parc. zlomky

$$= \frac{a^2}{a^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2u^2}\, du - \frac{1}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\, du =$$

$$= \frac{a^2}{a^2-1}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(au)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a^2-1}\left[\operatorname{arctg} u\right]_0^{\pi/2} = \frac{a}{a^2-1}\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a^2-1}\,\frac{\pi}{2} =$$

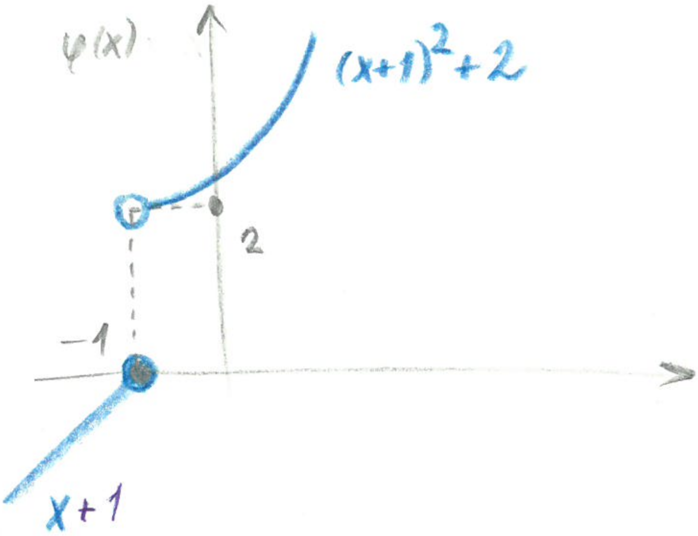
$$= \frac{\pi}{2}\,\frac{a-1}{a^2-1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a+1}$$

$$F(a) = \frac{\pi}{2}\ln(a+1) + C \quad \wedge \quad F(0) = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\cdot\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\, dx = \frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)\operatorname{sgn}(a)$$

$\frac{\pi}{2}\ln(1+a) \leftarrow a \geq 0$

$H = \langle -1; 2)$ 7b



$H^0 = (-1; 2)$

$\mu(H) = \varphi(2) - \varphi(-1) = 11 - 0 = 11$

$\langle 0,1) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \langle \frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}) \Rightarrow K_n := \langle \frac{3}{n+1} - 1; \frac{3}{n} - 1)$

$F(K_n) = (\frac{3}{n} - 1)^3 - (\frac{3}{n+1} - 1)^3$ $\quad H^0 = \biguplus_{n=1}^{\infty} K_n$

$\mu(H^0) = \sum_{n=1}^{\infty} F(K_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(K_k) =$

$\lim_{n\to\infty} \left[8 \cancel{- \frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}} - 0 + \dots + \cancel{(\frac{3}{n} - 1)^3} - (\frac{3}{n+1} - 1)^3 \right] =$

$= \lim_{n\to\infty} \left[8 - (\frac{3}{n+1} - 1)^3 \right] = 8 + 1 = 9$

$H^0 \uplus \{-1\} = H \quad \Leftrightarrow \quad (-1, 2) \uplus \{-1\} = \langle -1, 2)$

$\Downarrow$

$\mu(-1,2) + \mu(\{-1\}) = \mu(\langle -1, 2))$

$9 + \mu(\{-1\}) = 11$

$\mu(\{-1\}) = 2$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

OK

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

22. května 2017, 9:00–11:00

1 (10 bodů)
Nechť $a > 0$ a $b > 0$ jsou zvoleny pevně. Vypočtěte plošný integrál

$$\iint_S xyz \, \mathrm{d}\mu_s(x,y,z),$$

kde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y > 0 \wedge (x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \wedge 0 < z < b\right\}.$$

2 (6 bodů)
Nechť $H = \langle -2; 0)$ a

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x+7 & x > 0, \\ -x^2+4 & x \leqslant 0, \end{cases}$$

je vytvořující funkce Lebesgueovy míry. Vypočítejte $\mu(H)$ a $\mu(\overline{H})$.

3 (7 bodů)
Nechť jsou parametry $a, b > 0$ zvoleny pevně. Kolik procent plochy zabírá množina

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : (ax)^2 + (by)^2 \leqslant (ab)^2\right\}$$

v obdélníku $\langle -b; b\rangle \times \langle -a; a\rangle$? Vytvořujícími funkcemi v obou dimenzích nechť je funkce $\varkappa(s) = s|s|$.

4 (8 bodů)
Pro $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ vypočtěte

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^4} - \mathrm{e}^{-\beta x^4}}{x} \, \mathrm{d}x.$$

5 (9 bodů)
Vypočítejte $\iint_U xy \, \mathrm{d}(x,y)$, kde

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \geqslant 4 \wedge (x^2+y^2)^2 \leqslant 16xy \wedge x,y \geqslant 0\right\}.$$

Množinu U pečlivě načrtněte!

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

10b

$$\rho^2 = a^2\cos(2\varphi)$$

$\wedge\ \varphi \in (0; \pi/2)$

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\varphi)} \Rightarrow \cos(2\varphi) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi \in \left(0; \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\vec{\rho}(\varphi, h) = \left(a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\cos\varphi;\ a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\sin\varphi;\ h\right)$$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi} = \left(-a\frac{\sin2\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}\cos\varphi - a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\sin\varphi;\ -a\frac{\sin2\varphi}{\sqrt{\cos2\varphi}}\sin\varphi + a\sqrt{\cos2\varphi}\cdot\cos\varphi;\ 0\right)$$

$$\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial h} = (0, 0, 1)$$

$$\left\langle\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi} \,\middle|\, \frac{\partial\vec{\rho}}{\partial\varphi}\right\rangle = \left(\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\right)^2\cdot\Big[\sin^2(2\varphi)\cos^2\varphi + \cos^2(2\varphi)\sin^2\varphi + 2\sin(2\varphi)\cos(2\varphi)\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$+ \sin^2(2\varphi)\sin^2\varphi + \cos^2(2\varphi)\cos^2\varphi - 2\sin(2\varphi)\cos(2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\Big] = \frac{a^2}{\cos(2\varphi)}$$

$$\left\langle\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial h} \,\middle|\, \frac{\partial\vec{\rho}}{\partial h}\right\rangle = 1$$

$$\left\langle\frac{\partial\vec{\rho}}{\partial h} \,\middle|\, \frac{\partial\vec{\rho}}{\partial v}\right\rangle = 0 \qquad \Delta_G = \frac{a^2}{\cos(2\varphi)} \Rightarrow \sqrt{\Delta_G} = \frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}$$

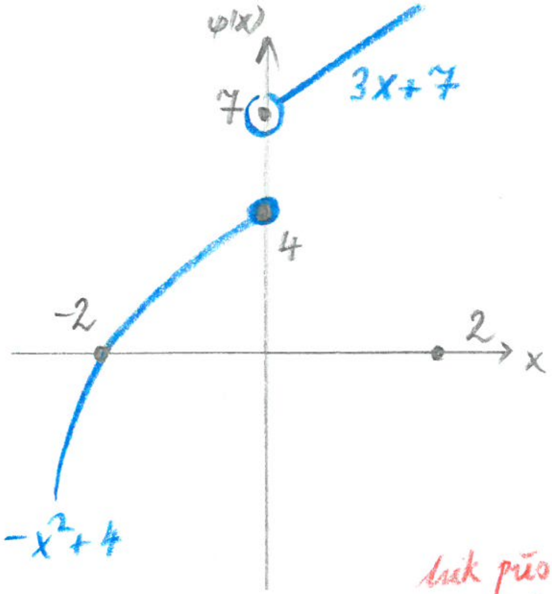
je-li tu $\pi/2$, dále se neopravuje (meze musejí být OK!)

$$I = 4\int_0^H\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi \cdot a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi\cdot h\cdot\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\,d\varphi\,dh = 4a^3\int_0^H h\,dh\cdot\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\varphi)}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 4\frac{a^3}{2}\left[\frac{h^2}{2}\right]_0^H\cdot\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(2\varphi)\,d\varphi = \left|\begin{aligned} w &= \cos(2\varphi) \\ dw &= -\sin(2\varphi)\cdot 2\end{aligned}\right| =$$

$$= \frac{a^3}{8}H^2\int_0^1\sqrt{w}\,dw = \frac{1}{8}a^3H^2\left[\frac{2}{3}w^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}a^3H^2$$

6b



$H = \langle -2, 0)$

$\bar{H} = \langle -2, 0 \rangle$

$\mu(H) = \varphi(0) - \varphi(-2) = 4 - 0 = \underline{4}$

$\mu(\{0\}) = \mu_0^{(e)}(\{0\}) =$

tak pro množinu $\{0\}$

$= \inf\{\mu_0(S) : S \supset \{0\} \wedge S \in \mathcal{S}_1\} =$

$= \inf\limits_{\varepsilon > 0} \{\mu_0(\langle 0; \varepsilon))\} =$

$= \inf\limits_{\varepsilon > 0} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) =$

$= \inf\limits_{\varepsilon > 0} (3\varepsilon + 7 - 4) = \inf\limits_{\varepsilon > 0} (3\varepsilon + 3) = \underline{3}$

$\langle -2, 0) \uplus \{0\} = \langle -2, 0 \rangle$ / aditivita

$\mu(\langle -2, 0)) + \mu(\{0\}) = \mu(\langle -2, 0 \rangle)$

$\mu(\langle -2, 0 \rangle) = 4 + 3 = \underline{7}$

$$(ax)^2 + (by)^2 \leq (at)^2$$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 \leq 1 \quad \dots \quad E \qquad\qquad O = \langle -b, b\rangle \times \langle a, a\rangle}$$

zjevně $E \subset O$, tj. celá elipsa E leží v obdélníku O!

$x(s) = s|s|$ je spojitě diferencovatelná, neboť mimo $s=0$ je to easy a v $s=0$ platí:

$$x'(0_+) = \lim_{h\to 0_+} \frac{x(h)-x(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h^2}{h} = 0 \;\;\&\;\; x'(0_-) = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h^2}{h} = 0$$

$$\Rightarrow x'(0) = 0 \Rightarrow x'(s) = |2s|$$

$\Rightarrow$ je možno užít příslušnou větu $\Rightarrow$

$$\mu_2(E) = \int_E 1 \, d\mu_2(x,y) = \int_E \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}\, d\lambda_2(x,y) = 4\int_E |xy| \, d(x,y) =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = b\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{matrix} \quad d(x,y) = ab\rho \, d(\rho,\varphi) \right| = 4a^2b^2 \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3 |\cos\varphi \sin\varphi| \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= a^2b^2 \int_0^{2\pi} |\cos\varphi\sin\varphi| \, d\varphi = 4a^2b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\, d\varphi = 2a^2b^2 \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2a^2b^2$$

Poměr plochy:

$$\underbrace{\frac{\mu_2(E)}{\mu_2(O)} = \frac{2a^2b^2}{(b^2 \cdot b^2)\cdot(a^2+a^2)}} = \frac{2a^2b^2}{2b^2\cdot 2a^2} = \frac{1}{2} = 50\%$$

← mám dát v %!

1.

8b

$$H(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^4} - e^{-\beta x^4}}{x}\,dx$$

1) $H(\alpha = \beta) = 0$

2) integrand měřitelný ∈ ji spojitý na $\langle 0; +\infty)$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to 0_+} \frac{e^{-\alpha x^4} - e^{-\beta x^4}}{x} \overset{LH}{=}$

$$\overset{LH}{=} \lim_{x\to 0_+} \left(-4\alpha x^2 e^{-\alpha x^4} + 4\beta x^2 e^{-\beta x^4}\right) = 0$$

3) $\left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right| = \left|\frac{-x^4 e^{-\alpha x^4}}{x}\right| = x^3 e^{-\alpha x^4} \in \mathcal{L}(0, +\infty)$

$\Nearrow$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^4}\,dx = \left|\begin{matrix} y = x^4 \\ dy = 4x^3\,dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-\alpha y}\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha y}\right]_0^\infty = \frac{1}{4\alpha} \in \mathbb{R}$$

!

•) jenže: $x^3 e^{-\alpha x^4}$ je sice integrabilní majoranta, ale závisí na α $\Rightarrow$ problém

Proto za majorantu volíme: $x^3 e^{-\omega x^4}$, kde $0 < \omega$

- a výsledek platí pro $\alpha > \omega$
- pouze pro takové α platí:

$$x^3 e^{-\alpha x^4} \leq x^3 e^{-\omega x^4} \in \mathcal{L}(0, +\infty)$$

Výpočet:

$$\frac{dH}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{\partial h(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx = -\int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^4}\,dx \overset{\text{viz výše}}{=} -\frac{1}{4\alpha}$$

$$\Rightarrow H(\alpha) = -\frac{1}{4}\ln\alpha + C$$

Kalibrace konstanty:

$H(\alpha = \beta) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad H(\beta) = -\frac{1}{4}\ln\beta + C \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{4}\ln\beta$

Finální výsledek:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^4} - e^{-\beta x^4}}{x}\,dx = \frac{1}{4}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

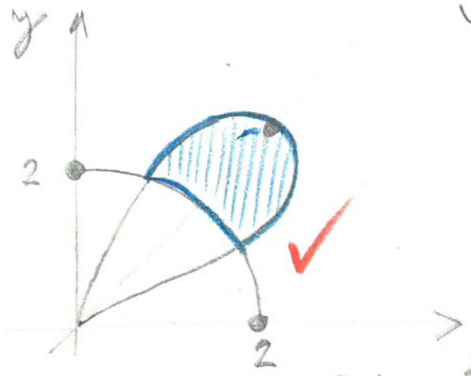
9b

$x = \rho\cos\varphi$
$y = \rho\sin\varphi$

$x^2+y^2 \geq 4$ $\qquad$ $(x^2+y^2)^2 \leqq 16xy$ $\qquad$ $x,y \geq 0$

$\rho^2 \geq 4$ $\qquad$ $\rho^4 \leqq 16\rho^2\cos\varphi\sin\varphi$ $\qquad$ $\varphi \in (0; \pi/2)$

$\underbrace{\rho \geq 2 \qquad \rho^2 \leqq 8\sin(2\varphi)}$



$8\sin(2\varphi) > 4$

$\sin(2\varphi) > 1/2$

$\varphi \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right)$!

Jsou-li chybně určeny meze pro φ, dále se NEOPRAVUJE!

$$\int_U xy\, d(x,y) = \int_{\pi/12}^{5\pi/12}\int_2^{\sqrt{8\sin(2\varphi)}} \rho^2\cos\varphi\sin\varphi\,\rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \cos\varphi\sin\varphi\,(64\sin^2(2\varphi)-16)\,d\varphi =$$

$$= 16\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \frac{1}{2}\sin^3(2\varphi)\,d\varphi - 4\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\sin(2\varphi)\,d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \cos(2\varphi) \\ du = -\sin(2\varphi)\cdot 2\cdot d\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= 4\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} (1-u^2)\,du + [\cos(2\varphi)]_{\pi/12}^{5\pi/12} = 4\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 8\left[u\left(1-\frac{u^2}{2}\right)\right]_0^{\sqrt{3}/2} - \sqrt{3} = 8\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{3}{8}\right) - \sqrt{3} =$$

$$= 4\sqrt{3}\cdot\frac{5}{8} - \sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}\,\frac{3}{2}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2017, 9:00–11:00

MICHAL

1 (bodů)
Nechť

$$3\Theta(\tau)\left(1-(2\tau+1)\mathrm{e}^{-2\tau}\right)$$

je vytvořující funkce Lebesgueovy míry v obou dimenzích. Nechť $X = \langle 1;+\infty) \times \langle 0;+\infty)$. Vypočítejte $\mu(H)$.

8 **2** (bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2+y^2}\,\mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2+y^2+9 = 6(x+y)\right\}.$$

ONDRA

3 (bodů)
Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte

$$\iint_S (x+y+z; x^3+y^3+z^3; x-y-z)\,\mathrm{d}\mu_s(x,y,z),$$

kde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

Přitom $a, b, c > 0$ nechť jsou pevně zvolené parametry.

8 **4** (bodů)
Nechť je Lebesgueova míra generována vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \frac{6x^2}{1+2x^2}.$$

Podle prvního nebo druhého kroku konstrukce Lebesgueovy míry vypočtěte míru nosiče funkce

$$f(x) = \Theta(x)\frac{x}{1+x^2}.$$

JITKA

7 **5** (bodů)
Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\cos(\beta x)-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

7b

$$\varphi(x) = 3\,\Theta(x)\,\big(1-(2x+1)\,e^{-2x}\big)$$

$$\varphi'(x) = 3\Theta(x)\cdot[-2+4x+2]\,e^{-2x} = 12\,\Theta(x)\cdot x\,e^{-2x}$$

$$\int_X 1\,d\mu_2(x,y) = \int_X \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}\,d\lambda_2(x,y) = \int_X 12\,\Theta(x)\cdot x\cdot e^{-2x}\cdot 12\cdot\Theta(y)\,y\,e^{-2y}\,d(x,y) =$$

$$= 144\int_X \Theta(x,y)\cdot x\cdot y\,e^{-2x}e^{-2y}\,d(x,y) = \left|\; X\subset\langle 0,+\infty)^2 \;\right| =$$

$$= 144\int_X xy\,e^{-2x}e^{-2y}\,d(x,y) = 144\int_1^{\infty}\int_0^{\infty} xy\,e^{-2x}e^{-2y}\,dy\,dx = \left|\text{věta o separabilitě}\right| =$$

$$= 144\int_1^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx\cdot\int_0^{\infty} y\,e^{-2y}\,dy = \left|\begin{array}{l} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} \quad / \frac{d}{d\alpha} \\ -\int_0^{\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha^2} \end{array}\right| =$$

výpočet

$$= 144\int_1^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx\cdot\frac{1}{4} = 36\int_1^{\infty} x\,e^{-2x}\,dx = \left|\begin{array}{l} \int_1^{\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha} \quad / \frac{d}{d\alpha} \\ -\int_1^{\infty} x\,e^{-\alpha x}\,dx = \left(-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha} \end{array}\right| =$$

$$= 36\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)e^{-2} = \frac{36}{4}\cdot 3e^{-2} = \underline{27\,e^{-2}}$$

[6.] (5 bodů) 8b.

Vypočtěte integrál

$$I \equiv \int_B \sqrt{(x-3)^2+y^2}\,\mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde B je kružnice

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2+y^2+9 = 6(x+y)\}.$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 + 3\cos t \\ y &= 3 + 3\sin t \end{aligned}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = (-3\sin t;\ 3\cos t) \Rightarrow \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| = 3$$

$$(x-3)^2 + y^2 = 9\cos^2 t + 9 + 18\sin t + 9\sin^2 t = 18(1+\sin t)$$

$$I = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2}\sqrt{1+\sin t}\cdot 3\,dt = 9\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt + 9\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt =$$

$$= 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt = 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt =$$

$$= 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt = \left|\begin{aligned} \xi &= \sin t \\ d\xi &= \cos t\,dt \end{aligned}\right| = 18\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\,d\xi =$$

$$= 18\sqrt{2}\left[-2\sqrt{1-\xi}\right]_{-1}^{1} = 18\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\cdot 18 = \underline{72}$$

$$\iint_S (x+y+z;\ x^3+y^3+z^3;\ x-y-z)\, d\mu_S(x,y,z)$$ 10 b

$$\vec{F} = (x+y+z;\ x^3+y^3+z^3;\ x-y-z) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = 1 + 3y^2 - 1 = 3y^2$$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} \leq 1$$

$$I = \iiint_V 3y^2\, dx\, dy\, dz$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\varrho\sqrt{\cos\vartheta}\cos\varphi \\ y &= b\varrho\sqrt{\cos\vartheta}\sin\varphi \\ z &= c\varrho\sqrt{\sin\vartheta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varrho \leq 1$$

$$\Delta_J = \frac{1}{2}abc\varrho\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}$$

↳ pozor: $\sin\vartheta > 0$!
(nutno rozdělit na $z>0$
a $z<0$)

$$I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3b^2\varrho^2\cos\vartheta\sin^2\varphi\,\frac{1}{2}abc\frac{1\cdot\varrho}{\sqrt{\sin\vartheta}}\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

věta o separabilitě

$$= 3ab^3c\int_0^1 \varrho^3\, d\varrho \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}\, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{aligned} u &= \sin\vartheta \\ du &= \cos\vartheta\, d\vartheta \end{aligned} \right| = 3ab^3c\cdot\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du \cdot \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 3ab^3c\,\frac{1}{4}\cdot\left[\sqrt{u}\cdot 2\right]_0^1 \cdot \pi = \frac{3}{4}ab^3c\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{3}{2}\pi ab^3c}}$$

$$\varphi(x) = \frac{6x^2}{1+2x^2} \qquad f(x) = \Theta(x)\frac{x}{1+x^2}$$

8b

$$\operatorname{supp}(f) = (0;+\infty) \qquad \operatorname{supp}(f) \notin \mathcal{X}_1$$

$$\mu(\operatorname{supp}(f)) = \mu(\langle 0;+\infty)) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\langle n-1;n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\langle n-1;n)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\mu(\langle n-1;n)) = \lim_{k\to\infty}\underbrace{\left(\cancel{\frac{6}{3}}-\cancel{\frac{6}{3}}+\cancel{\frac{24}{9}}-\cancel{\frac{24}{9}}+\ldots+\frac{6k^2}{1+2k^2}-\cancel{\frac{6(k-1)^2}{1+2(k-1)^2}}\right)}.$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{6k^2}{1+2k^2} = \underline{\underline{3}}$$

$(0;+\infty) \notin \mathcal{X}_1 \Rightarrow$ nelze užít $\mu(0;+\infty) = \varphi(+\infty) - \varphi(0)$!

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos(\beta x) - 1}{x} \, dx$$

2x per partes 7b.

$$\frac{dJ}{d\beta} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{-x \sin(\beta x)}{x} \, dx = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin(\beta x) \, dx = -\frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$J(\beta) = -\frac{1}{2} \ln|\beta^2 + \alpha^2| + C_\alpha$$

$$\beta = 0 \Rightarrow J(\beta) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln \alpha^2 + C_\alpha = 0$$

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \ln \alpha^2$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos(\beta x) - 1}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

a) $J(\beta)$ konverguje pro $\beta = 0$

b) $x \mapsto e^{-\alpha x} \frac{\cos(\beta x) - 1}{x}$ spojité na $(0, +\infty) \Rightarrow$ měřitelná

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{e^{-\alpha x}(\cos \beta x - 1)}{x} \overset{LH}{=} \lim_{x \to 0_+} -\alpha e^{-\alpha x}(\cos \beta x - 1) +$$

$$+ \lim_{x \to 0_+} e^{-\alpha x}(-\beta) \sin \beta x = 0 + 0 = \underline{0}$$

extra bod

c)

$$\left| \frac{df}{d\beta} \right| \leq \left| -e^{-\alpha x} \sin \beta x \right| \leq e^{-\alpha x} \in \mathcal{L}(0, +\infty)$$

$$(S) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$$