❷ (bodů)

6 bodů

Jakou jedinou množinu Y je třeba doplnit do soustavy

$$\mathscr{B} = \left\{\emptyset, Y, \{\blacktriangledown\}, \{\spadesuit, \star\}, \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\}\right\},$$

aby tato byla polookruhem? Na $\mathscr{B}$ je míra definována výčtem

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots \quad X = \emptyset \\ 6 & \dots \quad X = \{\blacktriangledown\} \\ 3 & \dots \quad X = \{\spadesuit, \star\} \\ 7 & \dots \quad X = \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\} \end{cases}$$

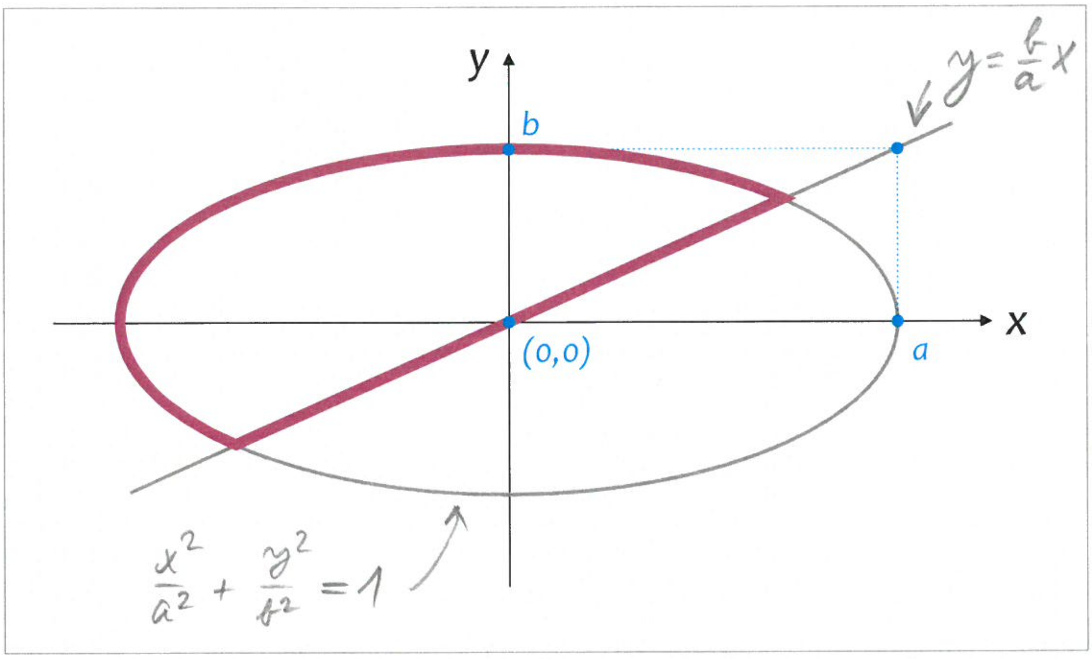
Jak vypadá minimální okruh $\mathscr{O}$ generovaný soustavou $\mathscr{B}$? A jakou míru mají množiny z $\mathscr{O}$?

$Y = \{\lozenge, \bullet\}$ ✓ $\quad F(Y) = 7 - 6 = 1$ ✓

$$\mathscr{O} = \mathscr{B} \cup \Big\{ \{\blacktriangledown, \spadesuit, \ast\} ; \{\blacklozenge, \bullet, \spadesuit, \ast\} ; \{\blacklozenge, \bullet, \blacktriangledown, \spadesuit, \ast\} \Big\} \leftarrow ✓✓$$

$$9 \qquad\qquad 4 \qquad\qquad 10 \leftarrow ✓$$

Množiny z $\mathscr{O}$, které již byly původně v $\mathscr{B}$, mají míru nezměněnou ✓



8b
+ 1 navíc

- křivka je jednoduchá, uzavřená a po částech HR
- $\vec{G}(x,y) = (y^2; x) \in \mathcal{C}^2(E^2)$

} lze užít Greenovu větu } ✓ ověření podmínek

$$\int_A (y^2; x)\, ds_c(x,y) = \int_\Omega \left(\overbrace{\frac{\partial G_2}{\partial x}}^{1} - \overbrace{\frac{\partial G_1}{\partial y}}^{2y} \right) d(x,y) ✓ = I$$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \wedge y \ge \frac{b}{a} x \right\}$$

✓ ✓

$$\left.\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi \\ y &= b\rho\sin\varphi \end{aligned}\right\}$$

$$\rho^2 \le 1 \quad \wedge \quad \rho\sin\varphi \ge \rho\cos\varphi$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi \ge 1 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{4}; 5\frac{\pi}{4} \right\rangle$$

$$I = \int_\Omega (1 - 2y)\, d(x,y) = ab \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^1 (1 - 2b\rho\sin\varphi) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = ✓✓$$

$$= ab \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^1 \rho \, d\rho \, d\varphi - 2ab^2 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi = \boxed{✓}$$

← smysluplné výpočty

$$= \frac{ab}{2}\left(\frac{5-1}{4}\pi\right) - \frac{2}{3}ab^2\left[-\cos(\varphi)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = \underline{\frac{\pi ab}{2} + ab^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}} ✓$$

✓ ← za úplně přesnou numerickou hodnotu!

f h 10b

5 (bodů)
Nechť je na množině $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \underbrace{x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 - 4yz + 3z^2 = 1}_{f} \wedge \underbrace{\sqrt{2}x = 1}_{h}\}$ dána funkce $g(x,y,z) = xy\cancel{z}$. Rozhodněte, zda je bod

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

! Pozor! Není jasné, že $\vec{a}$ je stacionární! !

bodem lokálního vázaného maxima či minima?

$$L(x,y,z) = xy + \lambda(x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 - 4yz + 3z^2 - 1) + \mu(\sqrt{2}x - 1)$$

← Lagrangeova fce se dvěma parametry $\lambda; \mu$!

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2\lambda y - 2\lambda z + \sqrt{2}\mu + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2\lambda x + 4\lambda y - 4\lambda z \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -2\lambda x - 4\lambda y + 6\lambda z \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\vec{a} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{splňují obě vazby}}$$

musí být ověřeno!

Kolik jsou λ & μ?

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\lambda - 2\lambda + 2\lambda) + \sqrt{2}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + 1 + 2\mu = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\lambda + 4\lambda - 4\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + 1 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\lambda - 4\lambda + 6\lambda) = 0$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \ \& \ \mu = 0$$

tohle se technicky rovná ověření, že $\vec{a}$ je stacionární!

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 6\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2\lambda + 1 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = -2\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = -4\lambda$$

$$d^2L_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = -dx^2 - 2dy^2 - 3dz^2 + 2\,dx\,dz + 4\,dy\,dz$$

Redukce vazeb:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x + 2y - 2z \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2x + 4y - 4z \quad \frac{\partial h}{\partial z} = -2x - 4y + 6z$$

$$\left.\begin{aligned} dh_{\vec{a}}(dx, dy, dz) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(2dx + 2dy) \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ dy = -dx \\ df_{\vec{a}}(dx, dy, dz) &= \sqrt{2}\,dx \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ dx = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (dx, dy) = \vec{0}$$

$$d^2L_{\vec{a}}^{(red)}(dz) = -3dz^2 \lhd 0 \quad v \ E^1$$

← musí tam být zřetelně vidět, že typ definitnosti beru s ohledem na dimenzi

$\Rightarrow$ v $\vec{a}$ nastává ostré lokální vázané maximum

❹ 8 + 1 navíc (bodů)

Nechť je Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^2\operatorname{sgn}(\tau)$ platné pro obě dimenze. Nalezněte těžiště množiny

$$X = \left\{(x,y)\in \mathbf{E}^2 : y>0 \wedge \sqrt{\left|\frac{x}{a}\right|} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1\right\}.$$

lze ji užít jen v 1. kvadrantu

$$\left.\begin{aligned} x &= a\rho\cos^4(\varphi) \\ y &= b\rho\sin^4(\varphi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \det\left(\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right) = 4ab\rho\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi$$

$$\mu_2(X) = \int_X 1\, d\mu(x) = \int_X |2x|\cdot|2y|\, d(x,y) = 4\int_X |xy|\, d(x,y)$$

$$x_T = \frac{1}{\mu_2(X)}\int_X x\, d\mu(x,y) = \frac{4}{\mu_2(X)}\int_X x\cdot|xy|\, d(x,y) = 0$$

← musí být zdůvodněno

$$y_T = \frac{4}{\mu_2(X)}\int_X |x|\cdot y^2\, d(x,y)$$

•)

$$\mu_2(X) = 8\int_{\substack{X\\x>0}} ab\rho^2\cos^4(\varphi)\cdot\sin^4(\varphi)\cdot 4ab\rho\cos^3(\varphi)\cdot\sin^3(\varphi)\, d(\rho,\varphi) = \left|\text{věta o separabilitě}\right| =$$

$$= 32a^2b^2\int_0^1\rho^3\, d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^7(\varphi)\cdot\sin^7(\varphi)\, d\varphi = 8a^2b^2\frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(8)} = 8a^2b^2\frac{6\cdot6}{2\cdot7!} =$$

$$= \frac{1}{35}a^2b^2$$

•)

$$y_T = \frac{4\cdot35}{a^2b^2}\cdot 2\int_{\substack{x>0\\X}} 4a^2b^3\rho^4\cos^7(\varphi)\cdot\sin^{11}(\varphi)\, d(\rho,\varphi) = \frac{8\cdot4\cdot35}{a^2b^2}a^2b^3\int_0^1\rho^4\, d\rho\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^7(\varphi)\sin^{11}(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 8\cdot4\cdot35\, b\cdot\frac{1}{5}\,\frac{\Gamma(4)\cdot\Gamma(6)}{2\cdot\Gamma(10)} = 4\cdot4\cdot7\cdot b\,\frac{6\cdot5!}{9!} = \frac{4\cdot4}{9\cdot8} = \frac{2}{9}b$$

← za úplně správnou (numericky) hodnotu $y_T = \frac{2}{9}b$

❻ (7 bodů) 7b

Vypočítejte hodnoty všech integrálů tvaru

$$\int_\mu^\infty (x-\mu)^n \mathrm{e}^{-a(x-\mu)}\,\mathrm{d}x.$$

Uvažte, jak vám při jejich vyčíslování může být nápomocna technika derivování integrálu podle parametru.

$$\int_\mu^{+\infty} (x-\mu)^n e^{-a(x-\mu)}\,dx = \left| y = x-\mu \right| = \int_0^{+\infty} y^n e^{-ay}\,dy$$

$$\boxed{n=0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ay}\,dy = \left[-\frac{1}{a} e^{-ay}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}}$$

Dílčí závěr:

$$\int_0^{\infty} e^{-ay}\,dy = \frac{1}{a} \quad \Big/ \frac{d}{da}$$

$$-\int_0^{\infty} y e^{-ay}\,dy = -\frac{1}{a^2} \quad \Big/ \frac{d}{da}$$

$$\int_0^{\infty} y^2 e^{-ay}\,dy = \frac{2}{a^3} \quad \Big/ \frac{d}{da}$$

$$-\int_0^{\infty} y^3 e^{-ay}\,dy = \frac{6}{a^4} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty} y^n e^{-ay}\,dy = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

nápad, jak se dobrat k výsledku $\forall n \in \mathbb{N}$

Závěr:

$$\int_\mu^{+\infty} (x-\mu)^n e^{-a(x-\mu)}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Proč zde lze derivovat? Podle věty o derivaci integrálu podle parametru:

1) $y e^{-ay}$ je spojitá $\Rightarrow$ je měřitelná

2) $y e^{-ay} \in \mathcal{L}(0;+\infty)$ alespoň pro jedno $a \in \mathbb{R}^+$ (což je zřejmé, neboť např. $y e^{-y} \in \mathcal{L}(0;+\infty)$)

3) integrabilní majoranta k derivaci $\frac{d}{da}\left(y e^{-ay}\right)$ nezávislá na a

$$\left|\frac{d}{da}\left(y \cdot e^{-ay}\right)\right| = \left|-y^2 e^{-ay}\right| \leq y^2 e^{-\beta y}, \text{ kde } 0<\beta<a$$

a funkce $y^2 e^{-\beta y}$ pro $\beta>0$ zjevně je integrabilní (viz ✉)