Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ na množině

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : 2x + 3y + 4z = 9 \wedge x,y,z > 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x,y > 0 \wedge \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

3 (8 bodů)
Greenovou větou vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (-xy^2; x^2y)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

4 (7 bodů)
Nechť je jednodimenzionální Lebesgueova míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = 7\,\Theta(x) + 5\,\Theta(x-1) + 3\,\Theta(x-2) + \Theta(x-3).$$

Vypočítejte $\mu(\mathbf{N})$ a $\int_{\mathbf{N}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$, kde symbol $\mathbf{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel a $\Theta(x)$ Heavisideovu skokovou funkci. Výpočet doprovoďte vysvětlujícím komentářem.

5 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 + 9 = 6(x+y)\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ na množině

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : 2x + 3y + 4z = 9 \wedge x,y,z > 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x,y > 0 \wedge \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

3 (8 bodů)
Greenovou větou vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (-xy^2; x^2y)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

4 (7 bodů)
Nechť je jednodimenzionální Lebesgueova míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = 7\,\Theta(x) + 5\,\Theta(x-1) + 3\,\Theta(x-2) + \Theta(x-3).$$

Vypočítejte $\mu(\mathbf{N})$ a $\int_{\mathbf{N}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$, kde symbol $\mathbf{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel a $\Theta(x)$ Heavisideovu skokovou funkci. Výpočet doprovoďte vysvětlujícím komentářem.

5 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 + 9 = 6(x+y)\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ na množině

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : 2x + 3y + 4z = 9 \wedge x,y,z > 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x,y > 0 \wedge \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

3 (8 bodů)
Greenovou větou vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (-xy^2; x^2y)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

4 (7 bodů)
Nechť je jednodimenzionální Lebesgueova míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = 7\,\Theta(x) + 5\,\Theta(x-1) + 3\,\Theta(x-2) + \Theta(x-3).$$

Vypočítejte $\mu(\mathbf{N})$ a $\int_{\mathbf{N}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$, kde symbol $\mathbf{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel a $\Theta(x)$ Heavisideovu skokovou funkci. Výpočet doprovoďte vysvětlujícím komentářem.

5 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2 + y^2 + 9 = 6(x+y)\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

27. května 2019, 13:00–15:00

Z

1 (8 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ na množině

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 \,:\, 2x + 3y + 4z = 9 \wedge x,y,z > 0\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x,y > 0 \wedge \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

ju

3 (8 bodů)
Greenovou větou vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathbf{bd}(A)} (-xy^2; x^2y)\,\mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 \,:\, \left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{\frac{5}{12}} \leqslant \frac{x}{a} \wedge x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\right\}.$$

4 (7 bodů)
Nechť je jednodimenzionální Lebesgueova míra $\mu(X)$ zadána vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = 7\,\Theta(x) + 5\,\Theta(x-1) + 3\,\Theta(x-2) + \Theta(x-3).$$

Vypočítejte $\mu(\mathbf{N})$ a $\int_{\mathbf{N}} x^2 \mathrm{d}\mu(x)$, kde symbol $\mathbf{N}$ reprezentuje množinu všech přirozených čísel a $\Theta(x)$ Heavisideovu skokovou funkci. Výpočet doprovoďte vysvětlujícím komentářem.

5 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\,\mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 \,:\, x^2 + y^2 + 9 = 6(x+y)\right\}.$$

8b

$F(x,y) = (-xy^2; x^2y)$ $\qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2xy + 2xy = 4xy$

$x = a\rho\sqrt{\cos\varphi}$
$y = b\rho\sqrt{\sin\varphi}$

$$\det\left(\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right) = \frac{1}{2}ab\rho\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}}$$

$$(\rho^4)^{5/12} \leqq \rho\sqrt{\cos\varphi}$$
$$\rho \leqq (\cos\varphi)^{3/4}$$

$$x \geqq 0 \wedge y \geqq 0 \wedge \cos\varphi > 0 \Rightarrow \varphi \in (0, \pi/2)$$

$$I \overset{\text{green}}{=} \iint_A 4xy\,dx\,dy = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{(\cos\varphi)^{3/4}} \frac{1}{2}ab\rho\,\frac{ab\rho^2\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}}\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2a^2b^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{(\cos\varphi)^{3/4}} \rho^3\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2b^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \left|\begin{matrix} w = \sin\varphi \\ dw = \cos\varphi\,d\varphi\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}a^2b^2\int_0^1(1-w^2)\,dw = \frac{1}{2}a^2b^2\left[w - \frac{w^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}a^2b^2\left(1-\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}a^2b^2$$

9b

$x = a\rho\cos\vartheta\cos^2\varphi$
$y = b\rho\cos\vartheta\sin^2\varphi$
$z = c\rho\sin\vartheta$ ✓

$$(\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta)^{7/2} \leqq \rho^4\cos^4\vartheta - \rho^4\sin^4\vartheta$$

$$\rho^7 \leqq \rho^4(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)$$

$$\rho^3 \leqq \cos(2\vartheta) \checkmark$$

$$\Downarrow$$

$$\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \ \& \ \underbrace{\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)}_{\Leftarrow\ x, y > 0}$$

nejsou-li meze správně, dále se neopravuje!

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt[3]{\cos 2\vartheta}} 2abc\rho^2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}abc \int_{0}^{\pi/2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\vartheta)\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi \, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}abc \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\,d\varphi \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1-2\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta =$$

✓ věta o separabilitě ✓ (nebo jiný úspěšný postup)

$$= \left| \begin{matrix} u = \sin\vartheta \\ du = \cos\vartheta\, d\vartheta \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}abc\left[-\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right]_0^{\pi/2} \cdot \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1-2u^2)\,du =$$

$$= \frac{1}{3}abc \cdot \left[u - \frac{2}{3}u^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} \cdot 2 = \frac{2}{3}abc\,\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{2}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}abc\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{2}\,abc \checkmark$$

$f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ $\qquad M = \{(x,y,z) \in E^3 : 2x+3y+4z = 9 \wedge x,y,z>0\}$ $\qquad$ 8b.

$$L = x^2y^3z^4 + \lambda(2x+3y+4z)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2xy^3z^4 + 2\lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 + 3\lambda = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + 4\lambda = 0$$

$$\underbrace{\lambda = -xy^3z^4 \qquad \lambda = -x^2y^2z^4}_{x=y=z} \qquad \lambda = -x^2y^3z^3$$

$$\vec{a} = (1,1,1) \qquad \lambda = -1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2y^3z^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 6x^2yz^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 12x^2y^3z^2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 6xy^2z^4 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 12x^2y^2z^3 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 8xy^3z^3$$

$$d^2L_{\vec{a}}(dx,dy,dz) = 2dx^2 + 6dy^2 + 12dz^2 + 12dxdy + 24dydz + 16dxdz$$

$$g(x,y,z) = 2x+3y+4z-9=0$$

$$dg(dx,dy,dz) = 2dx + 3dy + 4dz = 0$$

$$\Rightarrow \quad dx = -2dz - \frac{3}{2}dy$$

$$d^2L^{(red)}_{\vec{a}}(dy,dz) = 2\left(4dz^2 + 6dzdy + \frac{9}{4}dy^2\right) + 6dy^2 + 12dz^2 +$$

$$+ 12\left(-2dz - \frac{3}{2}dy\right)dy + 24dydz - 16\left(2dz + \frac{3}{2}dy\right)dz =$$

$$= 8dz^2 + 12dydz + \frac{9}{2}dy^2 + 6dy^2 + 12dz^2 - 24dydz - 18dy^2 +$$
$$+ 24dydz - 32dz^2 - 24dydz = -12dz^2 - \frac{15}{2}dy^2 - 12dydz =$$
$$= -12\left[dz + dzdy\right] - \frac{15}{2}dy^2 = -12\left[\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 - \frac{dy^2}{4}\right] - \frac{15}{2}dy^2 =$$
$$= -12\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 + 3dy^2 - \frac{15}{2}dy^2 = -12\left(dz + \frac{dy}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}dy^2 < 0$$

$\Downarrow$

$\vec{a} = (1,1,1)$ ... vázané lokální maximum

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 7 bodů

$$\mu(\{1\}) = \mu_{\sigma}^{(ex)}(\{1\}) = \inf_{\varepsilon > 0} \mu_{\sigma}(\langle 1; 1+\varepsilon)) = \inf_{\varepsilon > 0} F(\langle 1; 1+\varepsilon)) =$$

$$= \inf_{\varepsilon > 0} (\varphi(1+\varepsilon) - \varphi(1)) = \inf_{\varepsilon > 0} (12 - 7) = 5$$

z analogie

$$\mu(\{2\}) = \inf_{\varepsilon > 0} (\varphi(2+\varepsilon) - \varphi(2)) = \inf (15 - 12) = 3$$

$$\mu(\{3\}) = \inf (\varphi(3+\varepsilon) - \varphi(3)) = \inf (16 - 15) = 1$$

$$\mu(\{4\}) = \inf (\varphi(4+\varepsilon) - \varphi(4)) = \inf (16 - 16) = 0$$

$$\mu(\{5\}) = \mu(\{6\}) = \dots = 0$$

✓✓ za vysvětlení, jak se počítají míry jednoprvkových množin v Lebesgueově smyslu ✓

$$\Rightarrow \quad \mu(\mathbb{N}) = 5 + 3 + 1 + \sum_{k=4}^{\infty} 0 = 9$$ ✓✓

$$\int_{\mathbb{N}} x^2 \, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \mu(\{k\}) = 1 \cdot \mu(\{1\}) + 4 \cdot \mu(\{2\}) +$$

$$+ 9 \cdot \mu(\{3\}) + 16 \cdot \mu(\{4\}) + 25 \cdot \mu(\{5\}) + \dots =$$

$$= 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 16 \cdot 0 + 25 \cdot 0 + \dots =$$

$$= 5 + 12 + 9 = 26$$ ✓

✓✓ za vysvětlení, co a jak se počítá

8 8b.

[6.] (~~5~~ 8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$I \equiv \int_B \sqrt{(x-3)^2+y^2}\, \mathrm{d}\mu_c(x,y),$$

kde B je kružnice

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x^2+y^2+9 = 6(x+y)\}.$$

$$x^2-6x+9+y^2-6y+9=9$$

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3+3\cos t \\ y = 3+3\sin t \end{array}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

$$\dot{\vec{\varphi}}(t) = (-3\sin t;\ 3\cos t) \Rightarrow \|\vec{\varphi}'(t)\| = 3$$

$$(x-3)^2+y^2 = 9\cos^2 t + 9 + 18\sin t + 9\sin^2 t = 18(1+\sin t)$$

$$I = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{2}\sqrt{1+\sin t}\cdot 3\,dt = 9\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt + 9\sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt =$$

$$= 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1+\sin t}\,dt = 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{|\cos t|}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt =$$

$$= 18\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}}\,dt = \left|\begin{array}{l} \xi = \sin t \\ d\xi = \cos t\,dt \end{array}\right| = 18\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi}}\,d\xi =$$

$$= 18\sqrt{2}\left[-2\sqrt{1-\xi}\right]_{-1}^{1} = 18\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\cdot 18 = \cancel{62}\ 72$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (7 bodů)
Dvoudimenzionální míra $\mu(X)$ je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí:

$$\psi(y) = y^3 \quad \& \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0, \\ x^2 & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Určete obsah elipsy

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(b^2 + x^2)}{c^2 + x^2} \, dx.$$

3 (6 bodů)
Nechť $a > 0$. Vypočtěte těžiště křivky

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \wedge y > 0 \right\}.$$

4 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = 8 \sin(3x) \sin(y) \sin(2z)$$

na množině

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x, y, z > 0 \wedge 6x + 2y + 4z = \pi \right\}.$$

5 (9 bodů) Nechť a, b, c jsou pozitivní parametry. Vypočtěte třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} \right)^2 = \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (7 bodů)
Dvoudimenzionální míra $\mu(X)$ je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí:

$$\psi(y) = y^3 \quad \& \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0, \\ x^2 & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Určete obsah elipsy

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(b^2 + x^2)}{c^2 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3 (6 bodů)
Nechť $a > 0$. Vypočtěte těžiště křivky

$$W = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \wedge y > 0\right\}.$$

4 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = 8\sin(3x)\sin(y)\sin(2z)$$

na množině

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x,y,z > 0 \wedge 6x + 2y + 4z = \pi\right\}.$$

5 (9 bodů) Nechť a, b, c jsou pozitivní parametry. Vypočtěte třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c}\right)^2 = \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

27. května 2019, 13:00–15:00

1 (7 bodů)
Dvoudimenzionální míra $\mu(X)$ je zadána prostřednictvím dvou vytvořujících funkcí:

$$\psi(y) = y^3 \quad \& \quad \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0, \\ x^2 & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Určete obsah elipsy

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\}.$$

2 (9 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou kladné parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(b^2 + x^2)}{c^2 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

3 (6 bodů)
Nechť $a > 0$. Vypočtěte těžiště křivky

$$W = \left\{ (x, y) \in \mathbf{E}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{a}\right)^{2/3} = 1 \ \wedge \ y > 0 \right\}.$$

4 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

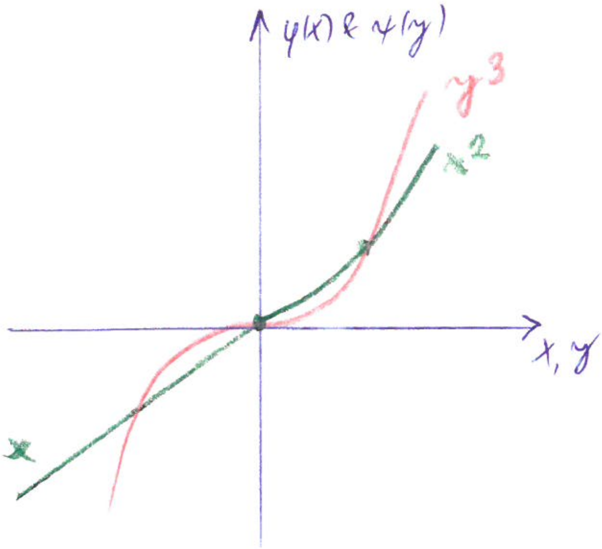
$$f(x, y, z) = 8 \sin(3x) \sin(y) \sin(2z)$$

na množině

$$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x, y, z > 0 \ \wedge \ 6x + 2y + 4z = \pi \right\}.$$

5 (9 bodů) Nechť a, b, c jsou pozitivní parametry. Vypočtěte třírozměrnou Lebesgueovu míru tělesa ohraničeného plochou

$$\left(\frac{|x|}{a} + \frac{|y|}{b} + \frac{|z|}{c} \right)^2 = \frac{|x|}{a} - \frac{|y|}{b}.$$



7b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \quad \dots \quad E$$

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1 \wedge x<0\right\}$$

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad -\|- \quad \wedge\ x=0\right\}$$

$$C = \left\{ \quad -\|- \quad \wedge\ x>0\right\}$$

$$E = A \uplus B \uplus C$$

$$\Rightarrow \int_E d\mu(x,y) = \int_A d\mu(x,y) + \underbrace{\int_B d\mu(x,y)}_{=0 \text{ (viz níže)}} + \int_C d\mu(x,y)$$ ✓ dělení

✓ transformace na klasický integrál

$$\Rightarrow \int_E d\mu(x,y) = \int_A d\mu(x,y) + \int_C d\mu(x,y) = \int_A 3y^2\, d(x,y) + \int_C 2x\cdot 3y^2\, d(x,y) =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi\end{matrix}\right| = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 3b^2\rho^2\sin^2(\varphi)\, ab\rho\, d\rho\, d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 6\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi \cdot a^2b^3\rho\, d\rho\, d\varphi =$$

✓ subst.

✓ provedení substituce

$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^1 3ab^3\rho^3\sin^2(\varphi)\, d\rho\, d\varphi + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 6a^2b^3\rho^4\cos\varphi\cdot\sin^2(\varphi)\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}ab^3\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sin^2(\varphi)\, d\varphi + \frac{6}{5}a^2b^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(\varphi)\cdot\sin^2(\varphi)\, d\varphi =$$ ✓ dílčí kroky výpočtu

$$= \frac{3}{4}ab^3\,\frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{6}{5}a^2b^3\left[\frac{\sin^3(\varphi)}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{3}{8}ab^3\cdot\pi + \frac{2}{5}a^2b^3\cdot 2 = \frac{3}{8}ab^3\pi + \frac{4}{5}a^2b^3$$ ✓ ✓

$$\int_B d\mu(x,y) = \int_{\{0\}\times\langle -b,b\rangle} d\mu(x,y) = \int_{\{0\}} d\mu_1(x)\cdot\int_{\langle -b,b\rangle} d\mu_2(y) = 0\cdot 2b^3 = 0$$

✓* (bonus bod)

2.

9 bodů

$a, b, c > 0 \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2) - \ln(b^2+x^2)}{c^2+x^2}\,dx$

- $I\big|_{a=b} = 0 \quad \Leftarrow \quad a=b \Rightarrow I=0$
- $x \mapsto f(x,a,b,c)$ měřitelná
- $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{(c^2+x^2)(a^2+x^2)}\right| \leqq \frac{2a}{c^2+x^2} \leqq \frac{2\alpha}{c^2+x^2} \quad \Downarrow \quad a \leqq \alpha < +\infty$

$\frac{2\alpha}{c^2+x^2} \in \mathcal{L}(0,+\infty)$

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{2a}{(c^2+x^2)(a^2+x^2)}\,dx = \int_0^\infty \frac{A + \Omega x}{c^2+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{B + \Phi x}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} (\Omega, \Phi) = (0,0) & A(a^2-c^2) = 2a \;\wedge\; B = -A \\ A(a^2+x^2) + B(c^2+x^2) = 2a & \\ Aa^2 + Bc^2 = 2a \;\wedge\; A+B=0 & A = -B = \frac{2a}{a^2-c^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{c^2+x^2}\,dx - \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{c^2(1+\frac{x^2}{c^2})}\,dx - \frac{2a}{a^2-c^2}\int_0^\infty \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}\,dx =$$

$$= \frac{2a}{a^2-c^2}\left[\frac{1}{c}\operatorname{arctg}\frac{x}{c} - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{2a}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{c}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{a}\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi a}{a^2-c^2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\pi a}{a^2-c^2}\,\frac{a-c}{ac} = \frac{\pi}{c}\,\frac{1}{a+c}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{c}\ln(a+c) + C \Rightarrow a=b \Rightarrow \frac{\pi}{c}\ln(b+c) + C = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2) - \ln(b^2+x^2)}{c^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{c}\ln\frac{a+c}{b+c}$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{\cancel{b}\,a}\right)^{2/3} = 1 \qquad y>0$$

6 bodů

3.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t \\ y &= a\sin^3 t \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{\varphi}'(t) = (-3a\cos^2 t\,\sin t\,;\ 3a\sin^2 t\cos t)$$

$$\|\vec{\varphi}'\|^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

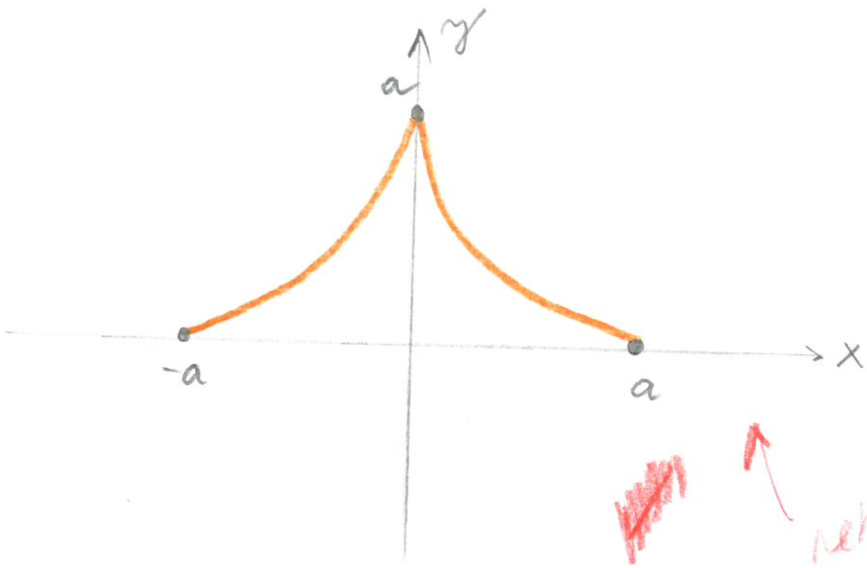
$$l = \int_0^{\pi} 3a\,|\cos t\cdot\sin t|\,dt = \int_0^{\pi/2} 3a\cos t\sin t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} 3a\cos t\sin t\,dt =$$

$$= 6a\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt = \frac{1}{2}6a\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = 3a$$

$$x_T = \frac{1}{3a}\int_0^{\pi} 3a\,|\cos t|\sin t\cdot a\cos^3 t\,dt = a\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\,dt - a\int_{\pi/2}^{\pi}\cos^4 t\sin t\,dt = 0$$

$$y_T = \frac{1}{3a}\int_0^{\pi} 3a\,|\cos t|\sin t\; a\sin^3 t\,dt = a\int_0^{\pi/2}\cos t\cdot\sin^4 t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos t\cdot\sin^4 t\,dt =$$

$$= \left|\begin{aligned}\xi &= \sin t\\ d\xi &= \cos t\,dt\end{aligned}\right| = a\int_0^1\xi^4\,d\xi - \int_1^0 a\cdot\xi^4\,d\xi = 2a\int_0^1\xi^4\,d\xi = \frac{2}{5}a$$



nehodnotí se

$f(x,y,z) = 8 \sin(3x) \sin(y) \sin(2z)$ $\qquad 6x+2y+4z=\pi$ $\qquad$ 4. $\qquad$ 9

$$L(x,y,z) = 8\sin(3x)\sin(y)\sin(2z) + \lambda(6x+2y+4z-\pi)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 24\cos(3x)\sin(y)\sin(2z) + 6\lambda = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 8\sin(3x)\cos(y)\sin(2z) + 2\lambda = 0\\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 16\sin(3x)\sin(y)\cos(2z) + 4\lambda = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos(3x)\sin(y) = \sin(3x)\cos(y)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sin(3x-y)=0\\ \wedge\ &\sin(2z-y)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{y}{3} \wedge z =$$

$$2y + 2y + 2y = \pi$$
$$y = \pi/6$$

$$\bar{a} = \left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{12}\right); \quad \lambda = -\sqrt{3}/2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -9 f(x,y,z) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -f(x,y,z) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -4 f(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 24\cos(3x)\cos(y)\sin(2z) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 48\cos(3x)\sin(y)\cos(2z)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 16\sin(3x)\cos(y)\cos(2z)$$

$$f(\bar{a}) = 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -9 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(\bar{a}) = -1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(\bar{a}) = -4$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(\bar{a}) = 24\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} = 24\cdot\frac{3}{8} = 9 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(\bar{a}) = 48\,\frac{3}{8} = 18 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(\bar{a}) = 16\,\frac{3}{8} = 6$$

$$d^2L_{\bar{a}}(dx,dy,dz) = -9dx^2 - dy^2 - 4dz^2 + 18\,dx\,dy + 36\,dx\,dz + 12\,dy\,dz$$

Redukce:

$$G(x,y,z) = 6x + 2y + 4z - \pi = 0$$

$$dG_{\bar{a}} = 6dx + 2dy + 4dz = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = -3dx - 2dz$$

$$d^2L_{\bar{a}}^{(red)}(dx,dz) = -9dx^2 - \cancel{9dx^2} - 8dz^2 - 12\,dx\,dy - 54dx^2 - \cancel{36\,dx\,dz} + \cancel{36\,dx\,dz} - 36\,dx\,dz - 24\ldots$$

$\cancel{dy}$ o.k.

$$d^2L_{\bar{a}}^{(red)}(dx,dy) = -72dx^2 - 32dz^2 - 48\,dx\,dz$$

$$\frac{1}{8}\,d^2L_{\bar{a}}^{(red)}(dx,dy) = -9dx^2 - 4dz^2 - 6\,dx\,dz$$

$$\begin{pmatrix}9 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix} \ldots \text{pozitivně definitní} \Leftarrow \Delta_1 = 9 > 0 \wedge \Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

nebo: $\quad -4\left[dz^2 + \frac{3}{2}dx\,dz + \frac{9}{4}dx^2\right] = -4\left[\left(dz + \frac{3}{4}dx\right)^2 - \frac{9}{16}dx^2 + \frac{36}{16}dz^2\right]$

$\Downarrow$

negativně definitní $\qquad$ zřetelné rozhodnutí

V bodě $\bar{a} = \left(\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{12}\right)$ má funkce lokální vázané maximum

$$\left(\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}+\frac{|z|}{c}\right)^2=\frac{|x|}{a}-\frac{|y|}{b}$$

9 bodů

reg. + prostá na
$\rho\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$
$\vartheta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} x=\rho\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\cdot a\\ y=\rho\cos^2\vartheta\sin^2\varphi\cdot b\\ z=\rho\sin^2\vartheta\cdot c\end{cases}$$

$$\Delta_J=4\rho^2\cos^3\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\cdot abc$$

$$\rho^2=|\rho|\cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

$$\rho=\cos^2\vartheta\cdot\cos 2\varphi$$

$\cos 2\varphi\geqq 0$ $\qquad\varphi\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})\ \vee\ \varphi\in(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

V prvním kvadrantu: $\varphi\in(0;\frac{\pi}{4})$

$$\lambda^3(M_1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos^2\vartheta\cos2\varphi}4\rho^2\cos^3\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\,abc\;d\rho\,d\vartheta\,d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}abc\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\cos^6\vartheta\cos^3 2\varphi\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\vartheta\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}abc\int_0^{\pi/2}\cos^9\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_0^{\pi/4}\cos^3 2\varphi\,\sin 2\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}t=\cos\vartheta\\ dt=-\sin\vartheta\,d\vartheta\end{array}\right|=$$

separace

$$=\frac{2}{3}abc\int_0^1 t^9\,dt\cdot\int_0^{\pi/4}\cos^3 2\varphi\cdot\sin 2\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{l}u=\cos 2\varphi\\ du=2\sin 2\varphi\,d\varphi\end{array}\right|=$$

← nějaké smysluplné kroky výpočtu

$$=\frac{2}{3}abc\cdot\frac{1}{10}\int_0^1\frac{1}{2}\cdot u^3\,du=\frac{1}{30}abc\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{120}abc$$

$$\lambda^3(M)=8\,\lambda^3(M_1)=\frac{1}{15}abc$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a,b,c>0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{E}^3:\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\frac{z^2}{c^2}\leqslant\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{y}{b}}\ \wedge\ x,y,z\geqslant 0\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ na množině

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:36x^2+4y^2+9z^2=36\ \wedge\ x,y,z\geqslant 0\right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{10}+y=x,\quad y=0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a,b,c>0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\int_S (x|z|;y|z|;x|y|)\,\mathrm{d}\mu_S(x,y,z),$$

kde

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{E}^3:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1\right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a,b\geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1+a^2x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geqslant 0 \right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \wedge x, y, z \geqslant 0 \right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} \right)^{10} + y = x, \quad y = 0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\int_S (x|z|; y|z|; x|y|) \, \mathrm{d}\mu_S(x, y, z),$$

kde

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1 \right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a, b \geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1 + a^2 x^2)} \, \mathrm{d}x.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \wedge x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{10} + y = x, \quad y = 0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\iint_S (x|z|; y|z|; x|y|) \, d\mu_s(x, y, z),$$

kde

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a, b \geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1 + a^2x^2)} \, dx.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x,y,z \geqslant 0\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \wedge x,y,z \geqslant 0\right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{10} + y = x, \quad y = 0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\int_S (x|z|; y|z|; x|y|)\, \mathrm{d}\mu_S(x,y,z),$$

kde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a, b \geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1 + a^2x^2)}\, \mathrm{d}x.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta N

30. května 2019, 9:00–11:00

1 (8 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(X)$ množiny

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge x,y,z \geqslant 0\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ na množině

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \wedge x,y,z \geqslant 0\right\}.$$

3 (7 bodů)
Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{10} + y = x, \quad y = 0.$$

4 (6 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$ jsou parametry. Gaussovou-Ostrogradského větou vypočtěte plošný integrál

$$\int_S (x|z|;\, y|z|;\, x|y|)\, \mathrm{d}\mu_S(x,y,z),$$

kde

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}.$$

5 (9 bodů)
Nechť $a, b \geqslant 0$. Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1 + a^2x^2)}\, \mathrm{d}x.$$

$\operatorname{div} \bar{F} = 2|z|$ $\Leftarrow$ $\bar{F}(x,y,z) = (x|z|, y|z|, x|y|)$

$$x = a\rho \cos^{1/2}\vartheta \cos\varphi$$
$$y = b\rho \cos^{1/2}\vartheta \sin\varphi$$
$$z = c\rho \sin^{1/2}\vartheta$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} &= 1 \\ (\rho^2\cos\vartheta)^2 + \rho^4\sin^2\vartheta &= 1 \\ \rho^4 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

6b

$$J_\Phi = -\frac{1}{2} abc\rho^2 \sin^{-1/2}\vartheta$$

$$I = \frac{1}{2} abc \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 2c\rho\, |\sin^{1/2}\vartheta|\, \rho^2\, |\sin^{-1/2}\vartheta|\, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= abc^2 \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cdot [\vartheta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi abc^2 \frac{1}{4}\pi =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi^2 abc^2}}$$

$$F(b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(bx)}{x(1+a^2x^2)}\, dx$$

[illegible]

9b

1. $F(0) = 0$ ... F(b) existuje (konverguje) pro alespoň jedno b
2. ✓ ... f je měřitelná funkce $\forall b$ (f spojitá)
3. $\left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| = \left|\frac{x}{x(1+b^2x^2)(1+a^2x^2)}\right| = \frac{1}{(1+b^2x^2)(1+a^2x^2)} \leq \frac{1}{1+a^2x^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+, \lambda(x))$

integrabilní majoranta

$\hookrightarrow$ nezávislé na „b"

0b

6b

$$\frac{dF}{db} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+b^2x^2)(1+a^2x^2)}\, dx = \int_0^\infty \frac{Ax+B}{1+a^2x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{Cx+D}{1+b^2x^2}\, dx =$$

$$(A, C) = (0, 0)$$
$$B(1+b^2x^2) + D(1+a^2x^2) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \begin{aligned} B + D &= 1 \\ Bb^2 + Da^2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (1-D)b^2 + Da^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} D &= \frac{b^2}{b^2-a^2} \\ B &= 1 - D = \frac{-a^2}{b^2-a^2} = \frac{a^2}{a^2-b^2} \end{aligned} \quad = B\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\, dx + D\int_0^\infty \frac{1}{1+b^2x^2}\, dx =$$

b ≠ a, 0

$$= B\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax)\right]_0^\infty + D\left[\frac{1}{b}\operatorname{arctg}(bx)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}\left(\frac{B}{a} + \frac{D}{b}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{a^2-b^2} + \frac{b}{b^2-a^2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{a+b}$$

$$\Rightarrow F(b) = \frac{\pi}{2}\ln(a+b) + C$$

$$F(0) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\ln(a) + C \overset{!}{=} 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}\ln(a)$$

$$F(b) = \frac{\pi}{2}\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

[illegible]

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$\mathrm{supp}(g) = (0,6)$

$$\begin{cases} a) & (0,6) \notin \mathcal{X}_1 \\ b) & (0,6) \in \mathcal{S}_1 \\ c) & (0,6) \in \mathfrak{M}_{\mu} \Leftarrow \quad \mathcal{S}_1 \subset \mathfrak{M}_{\mu} \end{cases}$$

$$(0,6) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{6}{n+1}; \frac{6}{n}\right)$$

$g(x)$ je hmitní $\Leftarrow$ $\mu(\mathrm{supp}\, g) = 6^3$

$$\mu((0,6)) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{6}{n}\right)^3 - \left(\frac{6}{n+1}\right)^3\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{6}{k}\right)^3 - \left(\frac{6}{k+1}\right)^3\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(6^3 - \left(\frac{6}{2}\right)^3 + \left(\frac{6}{2}\right)^3 - \dots + \left(\frac{6}{n}\right)^3 - \frac{6^3}{(n+1)^3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(6^3 - \frac{6^3}{(n+1)^3}\right) = 6^3$$

$$(2)\ \int_{\mathbb{R}} g(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x)\frac{1}{x}\theta(6-x)\,d\mu(x) = \int_0^6 \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dt}\,d\lambda(x) =$$

$$= \int_0^6 \frac{1}{x}\cdot 3x^2\,dx = \int_0^6 3x\,dx = 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 3\cdot\frac{36}{2} = 18\cdot 3 = \underline{54}$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{10} + y = x \quad\Rightarrow\quad x,y>0!$$

7b

$x = \rho\cos^4\varphi$
$y = \rho\sin^4\varphi$

$\Delta_1 = 4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$

$$\rho^5 + \rho\sin^4\varphi = \rho\cos^4\varphi$$

$$\rho^4 = \cos^4\varphi - \sin^4\varphi = \cos(2\varphi)$$

$$\rho = \sqrt[4]{\cos 2\varphi} \Rightarrow \cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi\in(0, \pi/4)$$

$$\lambda_2(X) = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt[4]{\cos 2\varphi}} 4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\varphi)}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos(2\varphi)}\,\frac{1}{8}\sin^3(2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot(1-\cos^2(2\varphi))\cdot\sin(2\varphi)\,d\varphi = \left| \begin{matrix} w = \cos(2\varphi) \\ dw = -\sin(2\varphi)\cdot 2\,d\varphi \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{w}(1-w^2)\,dw = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}w^{3/2} - \frac{2}{7}w^{7/2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{21} = \underline{\underline{\frac{1}{21}}}$$

10 b

$L(x,y,z \mid \lambda) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda\,(36x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 72\lambda x \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + 8\lambda y \overset{!}{=} 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -2z + 18\lambda z \overset{!}{=} 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x^2 + 36\lambda x^2 &= 0 \\ y^2 + 4\lambda y^2 &= 0 \\ -z^2 + 9\lambda z^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 = -36\lambda$$

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{36} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$ $\qquad \vec{a} = (1,0,0)$

$y \neq 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow z = 0$ $\qquad \vec{b} = (0,3,0)$

$z \neq 0 \Rightarrow \lambda = +\frac{1}{9} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad \vec{c} = (0,0,2)$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 2 + 72\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 8\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 18\lambda \end{pmatrix}$$

$\mathbb{H}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16/9 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$, $\mathbb{H}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13/2 \end{pmatrix}$

& $\mathbb{H}_{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 26/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$dg_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = 72x_a \, dx + 8y_a \, dy + 18z_a \, dz = 72\,dx = 0 \Rightarrow dx = 0$

$dg_{\vec{b}}(dx, dy, dz) = 24\,dy = 0 \Rightarrow dy = 0$

$dg_{\vec{c}}(dx, dy, dz) = 36\,dz = 0 \Rightarrow dz = 0$

$d^2L^{(red)}(dy, dz) = \frac{16}{9} dy^2 - \frac{3}{2} dz^2$ [illegible] $0 \Rightarrow \vec{a}$ non è estremo

$d^2L^{(red)}(dx, dz) = -16\,dx^2 - \frac{13}{2} dz^2 < 0 \Rightarrow \vec{b}$ è massimo

$d^2L^{(red)}(dx, dy) = 10\,dx^2 + \frac{26}{9} dy^2 > 0 \Rightarrow \vec{c}$ è minimo

$U = \{(x,y,z) \in E^3 : \left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \frac{z^2}{c^2} \leq \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{y}{b}} \wedge (x,y,z) \geq 0\}$

8b

$x = a\rho \cos\vartheta \cos^4\varphi$
$y = b\rho \cos\vartheta \sin^4\varphi$
$z = c\rho \sin\vartheta$

$\rho^2\cos^2\vartheta + \rho^2\sin^2\vartheta \leq \sqrt{\rho}\sqrt{\cos\vartheta}\,\cos 2\varphi$
$\rho^{3/2} \leq \sqrt{\cos\vartheta}\,\cos 2\varphi$
$\rho^3 \leq \cos\vartheta \cdot \cos^2 2\varphi$

$\cos(2\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi \in (0; \pi/4)$

$\Delta_J = 4abc\rho^2 \cos\vartheta \cos^3\varphi \sin^3\varphi$

$$\mu_3(T) = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{\cos\vartheta \cdot \cos^2 2\varphi}} 4abc\rho^2\cos\vartheta\,\frac{1}{8}\sin^3 2\varphi \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2} abc \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \cos^2 2\varphi \cdot \sin^3 2\varphi \, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2} abc \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\, d\vartheta \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi\,(1-\cos^2 2\varphi)\sin 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2} abc \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi\,(1-\cos^2 2\varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi = \left| \begin{matrix} u = \cos 2\varphi \\ du = -2\sin 2\varphi\, d\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{16} abc\,\pi \int_0^1 u^2(1-u^2)\, du = \frac{1}{3}\frac{\pi}{16} abc \int_0^1 (u^2 - u^4)\, du =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{16}\pi abc \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{8}\pi abc \frac{1}{15} = \frac{1}{3}\frac{1}{120}\pi abc$$

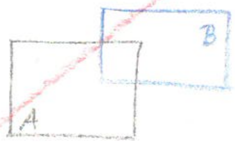
Uvažme $\mathcal{B} = \{\emptyset, (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) : -\infty < \alpha_k < \beta_k < +\infty\}$

je uzavřená na průniky, ale přesto není polookruhem.

1. $A = A^\circ \wedge B = B^\circ \Rightarrow A \cap B = (A \cap B)^\circ$

$B, C \in \mathcal{B} \Rightarrow B \cap C \in \mathcal{B}$

2.



$A - B$:

nelze rozložit ani jako sjednocení množin z $\mathcal{B}$