Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

16. dubna 2019, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (9 bodů)
Vyšetřete extrémy funkce $z = z(x, y)$, jež je generována rovnicí

$$x^2 + 8y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 12yz = 8.$$

3 (6 bodů)
Hessova matice jisté funkce, o níž je známo, že je třídy C^2 na celém svém definičním oboru, obsahuje samé jedničky a jednu jedinou odlišnou hodnotu (označme ji α). Nechť $\vec{a} = (5, -1, 1)$ je stacionárním bodem uvedené funkce. Pro která α lze použitím postačující podmínky rozhodnout, zda je $\vec{a}$ lokálním extrémem?

4 (7 bodů)
Rozhodněte, zda rovnice

$$-3ux + u + xy^2 + 3yz + z^3 = -7$$

zadává v bodě $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (1, -2, 1, 3)$ implicitní funkci $z = z(x, y, u)$. Pod jakým úhlem (ve stupních) bude stoupat/klesat graf této funkce, budeme-li se z bodu $(x_0, y_0, u_0) = (1, -2, 3)$ přesunovat směrem k bodu $(0, -1, 5)$?

5 (8 bodů)
Podle definice dokažte, že funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2x^2}{\sqrt{y^2+x^2}} + x - 7y + 2 & \dots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \dots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

má v bodě $(0, 0)$ totální diferenciál.

6 (10 bodů)
Transformujte výraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

do pseudosférických souřadnic $\varrho, \vartheta, \varphi$ zavedených vztahy

$$x = \varrho \cos(\vartheta) \cos^2(\varphi)$$
$$y = \varrho \cos(\vartheta) \sin^2(\varphi)$$
$$z = \varrho \sin(\vartheta).$$

B 18
A 17

35

Neopomeňte diskutovat regularitu zadané substituce.

35 = 1 + 34

Extrémy: $x^2 + 8y^2 + 7z^2 + 4xy - 4xz - 12yz = 8$

9b

- existence $\frac{\partial F}{\partial z} = 14z - 4x - 12y \neq 0$ ✓

- nutná podmínka: $\text{grad}\, z(\vec{a}) = \vec{0}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 2x + 4y - 4z = 0 \ (-3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underbrace{16y + 4x - 12z = 0}$$

$$-2x + 4y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

$$4y^2 + 8y^2 + 28y^2 + 8y^2 - 16y^2 - 24y^2 = 8$$
$$8y^2 = 8$$

- 2 stacionární body:

$\vec{a} = (2,1)$ ✓; $z(\vec{a}) = 2$ $\quad \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,2) = 28 - 8 - 12 = \underline{\underline{8}}$

$\vec{b} = (-2,-1)$ ✓; $z(\vec{b}) = 2$ $\quad \frac{\partial F}{\partial z}(-2,-1,-2) = -8$ ✓

- postačující podmínka:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x + 4y - 4z}{14z - 4x - 12y}\right)\Bigg|_{s.b.} = -\frac{2}{14z - 4x - 12y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{16}{14z - 4x - 12y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4}{14z - 4x - 12y}$$

korektní postup ✓

$$d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) = -\frac{2}{8}dx^2 - \frac{16}{8}dy^2 - \frac{8}{8}dx\,dy = \underbrace{-\frac{1}{4}dx^2 - 2dy^2 - dx\,dy}$$ ✓

$$d^2 z_{\vec{b}}(dx, dy) = \underbrace{\frac{1}{4}dx^2 + 2dy^2 + dx\,dy}$$ ✓

- typ definitnosti

$$d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) = -\frac{1}{4}\left[dx^2 + 8dy^2 + 4dx\,dy\right] =$$
$$= -\frac{1}{4}\left[(dx + 2dy)^2 + 4dy^2\right] = -\frac{1}{4}(dx + 2dy)^2 - dy^2 < 0$$ ✓

$$d^2 z_{\vec{b}}(dx, dy) = -d^2 z_{\vec{a}}(dx, dy) > 0$$ ✓

$\Rightarrow$ $\vec{a}$ ... ostré lokální maximum
$\quad\;\;$ $\vec{b}$ ... ostré lokální minimum

✓

Bod $\vec{a}$ má tři složky $\Rightarrow$ $f(\vec{x}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hessova matice je 3×3

$f(\vec{x}) \in C^2$ $\Rightarrow$ Hessova matice je symetrická

8 prvků Hessovy matice je rovných jedničce a 1 prvek je roven $\alpha \in \mathbb{R}$. Prvek α musí tedy nutně ležet na diagonále Hessovy matice (z důvodu symetrie). Tedy

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Tato matice je zjevně singulární, tj. nemůže být ani PD ani ND. O maximu ani o minimu nebude možné rozhodnout. V případě PSD či NSD postačující podmínka rozhodnout neumí. Tudíž z Hessovy matice $\mathbb{H}$ bude možno rozhodnout jedině tehdy, bude-li IND. Matice $\mathbb{H}$ bude IND, budou-li mít zbylá 2 vlastní čísla (třetí je nulové) různá znaménka, tj. $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 \cdot \lambda_3 < 0$.

$$\det(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) + 2 - 2(1-\lambda) - (\alpha-\lambda) \overset{!}{=} 0$$

$$(1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) + 3\lambda - \alpha = 0$$

$$\alpha - 2\alpha\lambda + \alpha\lambda^2 - \lambda(1-\lambda)^2 + 3\lambda - \alpha = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) + \underbrace{2(1-\alpha)}_{} = 0$$

tohle je součin $\lambda_2 \cdot \lambda_3$

$$\Rightarrow \quad 2(1-\alpha) \overset{!}{<} 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ O extrému lze rozhodnout pouze tehdy, je-li $\alpha < 1$

$F = -3ux + u + xy^2 + 3yz + z^3 + 7 = 0$

Existenční podmínka: $\frac{\partial F}{\partial z} = 3y + 3z^2 \overset{!}{\neq} 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(\vec{x}) = -6 + \overset{3}{\cancel{}} = \overset{-3}{\cancel{}} \neq 0$

$\Rightarrow$ implicitní funkce existuje na okolí bodu $\vec{x} = (1, -2, 1, 3)$

Kontrola:

$F(\vec{x}) = 0$

$F \in C^1(\mathbb{R}^4) \Rightarrow z(x, y, u) \in C^1(\mathbb{R}^3) \Rightarrow z(x, y, u)$ má v bodě $\vec{a} = (1, -2, 3)$ jistě TD $\Rightarrow$ pro výpočet směrové derivace bude jistě možno užít vzorec: $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = \frac{1}{\|\vec{s}\|}\langle \operatorname{grad} f(\vec{a}) | \vec{s} \rangle$

$\vec{s} = \vec{b} - \vec{a} = (0, -1, 5) - (1, -2, 3) = (-1, 1, 2)$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{6}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-3u + y^2}{3y + 3z^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xy + 3z}{3y + 3z^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{-3x + 1}{3y + 3z^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{5}{3} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \operatorname{grad} z(\vec{a}) = \frac{1}{3}(5, 1, 2)$

$\langle \operatorname{grad} z(\vec{a}) | \vec{s} \rangle = \frac{1}{3}\langle (5, 1, 2) | (-1, 1, 2) \rangle = \frac{1}{3}(-5 + 1 + 4) = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = 0 \Rightarrow \alpha = 0°$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + x - 7y + 2 & (x,y) \neq \vec{0} \\ 2 & (x,y) = \vec{0} \end{cases}$$

8b

- víme, že existující TD má tvar: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2 = df_{\vec{0}}(dx,dy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0+h+2-2}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-7h+2-2}{h} = -7$$

$$df_{\vec{0}}(h_1,h_2) \stackrel{?}{=} h_1 - 7h_2$$

- zbytková funkce

$$\eta(h_1,h_2) = f(h_1,h_2) - h_1 + 7h_2 \; {-f(0,0)} \Leftrightarrow \eta(x,y) = f(x,y) - x + 7y - 2$$

$$\eta(x,y) = \frac{2x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- mělo by pro ni platit: $\lim_{\|(x,y)\|\to 0} \frac{\eta(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$

$$\lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{\eta(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \stackrel{?}{=} 0$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \|\vec{x}\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\eta(x,y)}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$. toto ověříme

$\left|\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq x^2+y^2$ to platí, neboť $2x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$0 \leq x^4+y^4$

$\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} \leq x^2+y^2 < \delta^2 < \varepsilon$ ... stačí volit: $\delta := \sqrt{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ pak skutečně $\lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{\eta(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Rightarrow$ TD existuje

10

$$x = \rho \cos\vartheta \cos^2\varphi$$
$$y = \rho \cos\vartheta \sin^2\varphi$$
$$z = \rho \sin\vartheta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = ?$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos^2\varphi & -\rho\sin\vartheta\cos^2\varphi & -2\rho\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin^2\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin^2\varphi & 2\rho\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = -2\rho^2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Delta_1 = -2\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos^3\varphi - 2\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi = -2\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Delta_2 = -2\rho\cos^2\vartheta\sin\varphi\cos^3\varphi - 2\rho\cos^2\vartheta\cos\varphi\sin^3\varphi = -2\rho\cos^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Delta_3 = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} = \sin\vartheta \qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \frac{\cos\vartheta}{\rho} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sin\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\cos\vartheta}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sin^2\vartheta\,\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + 2\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\rho}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\,\partial\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial\rho}\cos\vartheta\,\frac{\cos\vartheta}{\rho} +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\,\frac{-\sin\vartheta\,\frac{\cos\vartheta}{\rho}\,\rho - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sin^2\vartheta\,\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} + \frac{\cos^2\vartheta}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \frac{\sin 2\vartheta}{\rho}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\rho\,\partial\vartheta} + \frac{\cos^2\vartheta}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{\sin 2\vartheta}{\rho^2}\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}$$

↑ upravený tvar

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

16. dubna 2019, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (7 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x,y,z,u) = xy - 2xz + 7x + 3yz - 15y + 3z + u\mathrm{e}^{-u}$.

3 (8 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^2(x-3)^2}{\sqrt{y^2+(x-3)^2}} - x + 3y + 7 & \dots \quad (x,y) \neq (3,0), \\ 4 & \dots \quad (x,y) = (3,0), \end{cases}$$

Nalezněte všechny přímky, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v bodě $(3,0)$. Dále vypočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,0)$ pro $\vec{s} = (2,1)$.

4 (10 bodů)
Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u = u(x,y,z)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) = (2,3,-1)$. Funkce $u = u(x,y,z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3.$$

Dále vypočítejte $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a})$.

5 (6 bodů)
Nechť je funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ definována na okolí bodu $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jako složení funkcí $H(u,v) \in C^1(\mathbf{E}^2)$, $u(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ a $v(x,y,z) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$. Nechť pro totální diferenciály těchto funkcí platí:

$$\mathrm{d}H_{\vec{b}}(h_u, h_v) = 3h_u - 2h_v,$$

$$\mathrm{d}u_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = h_x - 3h_y + h_z,$$

$$\mathrm{d}v_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = -h_y + 5h_z.$$

Nalezněte tvar totálního diferenciálu funkce $\tilde{H}(x,y,z)$ v bodě $\vec{a}$. Čemu se musí rovnat $\vec{b}$, aby úloha byla řešitelná?

6 (9 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 7x\frac{\partial f}{\partial x} + 9y\frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{y^4}{x^4}$$

aplikací substitučních vztahů

$$a = \frac{y}{x}, \qquad b = xy.$$

Neopomeňte diskutovat regularitu zadané substituce.

7b

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= y - 2z \overset{+7}{\downarrow} \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 3z + x - 15 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= -2x + 3y + 3 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial g}{\partial u} &= e^{-u} - u e^{-u} \overset{!}{=} 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{stacionární bod: } \vec{a} = (3, 1, 4, 1)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -e^{-u} \cdot 2 + u \cdot e^{-u} \quad \& \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(\vec{a}) = -1$$

Hessova matice:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbb{H} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(-6-6) = 12 \neq 0$$

$$d^2 g(dx, dy, dz, du) = \underbrace{2\,dx\,dy - 4\,dx\,dz + 6\,dy\,dz}_{q(dx,\, dy,\, dz)} \underbrace{- du^2}$$

↖ tohle už upravené na čtverce je

$$q(dx, dy, dz) = \left| \begin{aligned} dx &= a + b \\ dy &= a - b \\ dz &= c \end{aligned} \right| = 2(a^2 - b^2) - 4c(a+b) + 6c(a-b) =$$

$$= 2a^2 - 2b^2 - 4ac - 4bc + 6ac - 6bc = 2a^2 - 2b^2 + 2ac - 10bc$$

$$\frac{1}{2} q(a, b, c) = a^2 - b^2 + ac - 5bc = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2 - \frac{c^2}{4} - 5bc =$$

$$= \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(b + \frac{5}{2}c\right)^2 - \frac{c^2}{4} + \frac{25}{4}c^2 =$$

$$= \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 - \left(b + \frac{5}{2}c\right)^2 + 6c^2 \ \lhd\!\rhd\ 0$$

$$\Rightarrow d^2 g(dx, dy, dz, du) \ \lhd\!\rhd\ 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{bod } \vec{a} \text{ je sedlovým bodem}$$

Pozn: indefinitnost lze i uhodnout (stačí vědět jen to):

$d^2 g = 2\,dx\,dy - 4\,dx\,dz + 6\,dy\,dz - du^2$

volme $dz = 0$ $\rightarrow$ $d^2 g = 2\,dx\,dy - du^2$ .. jasně indefinitní volbou dx, dy
(du můžeme či nemusíme z těchto úvah vynechat)

$$P_\alpha = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y = \alpha(x-3)\}; \quad \alpha\in\mathbb{R}$$ 8b

$$(3,0) \overset{!}{\in} P_\alpha$$

Hledáme taková $\alpha\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\in P_\alpha}} f(x,y) \overset{!}{=} 4$

symbol

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\in P_\alpha}} f(x,y) = \lim_{x\to 3} \frac{2\alpha^2(x-3)^4}{\sqrt{\alpha^2(x-3)^2+(x-3)^2}} - x + 3\alpha(x-3) + 7 =$$

$$= 4 + \lim_{x\to 3} \frac{2\alpha^2|x-3|^4}{|x-3|\cdot|\alpha|} = 4 + 0 = 4$$

$\Rightarrow$ funkce je spojitá vzhledem ke všem přímkám P_α,

$\boxed{\text{dokonce i k přímce } x=3}$ BOD NAVÍC

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau\to 0} \frac{f(\vec{a}+\tau\vec{s}) - f(\vec{a})}{\tau} = \left| \begin{array}{l} \vec{a}=(3,0) \quad \vec{s}=(2,1) \\ \vec{a}+\tau\vec{s} = (3+2\tau;\tau) \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau\to 0} \frac{\frac{2\tau^2\cdot 4\tau^2}{\sqrt{\tau^2+4\tau^2}} - 3 - 2\tau + 3\tau + 7 - 4}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau\to 0} \frac{8\tau^3}{\sqrt{5\tau^2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{\tau\to 0} \frac{\tau}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

! Vzoreček $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(3,0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \langle \operatorname{grad} f(\vec{a}) \,|\, \vec{s} \rangle$ užít nelze, neboť není vůbec jasné, zda má $f(x,y)$ v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál!

(Ledaže by někdo existenci TD potvrdil)

!

$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3$ $\qquad (x_0, y_0, z_0) = \vec{a} = (2, 3, -1)$

10b

$u(\vec{a}) = u^3 - 2u^2 = u^2(u-2) \Rightarrow u = 0 \vee u = 2$

$\vec{\lambda} = (2, 3, -1, 2) \wedge \vec{\mu} = (2, 3, -1, 0)$

- existenční podmínka

$\psi := \frac{\partial F}{\partial u} = 3u^2 - 2xu - 4z - 4$

$$\left.\begin{array}{ll} \psi(\vec{\lambda}) = 12 - 8 + 4 - 4 = 4 \neq 0 & \text{OK} \\ \psi(\vec{\mu}) = 4 - 4 = 0 & \neg\text{OK} \end{array}\right\}$$

+ závěr

$\Rightarrow$ rovnice $F(x,y,z,u) = 3$ zadává implicitní funkci pouze v bodě $\vec{\lambda}$!

$\frac{\partial F}{\partial x} = -u^2 \wedge \frac{\partial F}{\partial y} = 1 \wedge \frac{\partial F}{\partial z} = -4u$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u^2}{\psi} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\psi} \wedge \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4u}{\psi} \Rightarrow \operatorname{grad} u(\vec{a}) = \frac{1}{4}(4, -1, 8)$

$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2u\frac{\partial u}{\partial x}\psi - u^2\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\psi^2} = \frac{2u\frac{\partial u}{\partial x}\psi - u^2\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} - 2u - 2x\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\psi^2}}$

~~$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{a}) = \frac{1}{16}(\ldots) = \ldots$ pouze přesný výsledek~~

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{2u\frac{\partial u}{\partial z}\psi - u^2\frac{\partial \psi}{\partial z}}{\psi^2} = \frac{2u\frac{\partial u}{\partial z}\psi - u^2\left(6u\frac{\partial u}{\partial z} - 2x\frac{\partial u}{\partial z} - 4\right)}{\psi^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a}) = \frac{1}{16}\left(4 \cdot 2 \cdot 4 - 4(12 \cdot 2 - 4 \cdot 2 - 4)\right) = \frac{1}{16}(32 - 4 \cdot 12) = -\frac{48-32}{16} = -1$

pouze přesný výsledek

$u(x,y,z) \approx 2 + (x-2) - \frac{1}{4}(y-3) + 2(z+1)$

6b

$\tilde{H}(u, v)$

$u \to x\ y\ z \qquad v \to x\ y\ z$

$dH_{\vec{b}}(h_u, h_v) = 3h_u - 2h_v \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u}(\vec{b}) = 3$ & $\frac{\partial H}{\partial v}(\vec{b}) = -2$

$du_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = h_x - 3h_y + h_z \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(\vec{a}) = 1$ & $\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{a}) = -3$ & $\frac{\partial u}{\partial z}(\vec{a}) = 1$

$dv_{\vec{a}}(h_x, h_y, h_z) = -h_y + 5h_z \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}(\vec{a}) = 0$ & $\frac{\partial v}{\partial y}(\vec{a}) = -1$ & $\frac{\partial v}{\partial z}(\vec{a}) = 5$

Z věty o derivaci složené funkce:

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(\vec{a}) = \frac{\partial H}{\partial u}(\vec{b}) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(\vec{a})}_{1} + \frac{\partial H}{\partial v}(\vec{b}) \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(\vec{a})}_{0}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(\vec{a}) = \frac{\partial H}{\partial u}(\vec{b}) \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}(\vec{a})}_{-3} + \frac{\partial H}{\partial v}(\vec{b}) \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}(\vec{a})}_{-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}(\vec{a}) = \underbrace{\frac{\partial H}{\partial u}(\vec{b})}_{3} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}(\vec{a})}_{1} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial v}(\vec{b})}_{-2} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial z}(\vec{a})}_{5}$$

číselné hodnoty

Dosazení:

$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}(\vec{a}) = 3 \cdot 1 = 3 \qquad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}(\vec{a}) = -9 + 2 = -7 \qquad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial z}(\vec{a}) = 3 - 10 = -7$

$$dH_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = 3dx - 7dy - 7dz$$

Nutně:

$\vec{b} = (u(\vec{a}); v(\vec{a}))$!

9b

6 (bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cancel{+} 7x\frac{\partial f}{\partial x} + 9y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^4}{x^4}\ 4$$

aplikací substitučních vztahů

$$a = \frac{y}{x}, \quad b = xy.$$

$$\det\left(\frac{D(a,b)}{D(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} -y/x^2 & 1/x \\ y & x \end{vmatrix} = -2\frac{y}{x}$$

$$M_{reg} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y \neq 0\}$$

✓

Neopomeňte diskutovat regularitu zadané substituce.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial a} + y\frac{\partial f}{\partial b} \quad \Big|\ \cdot 7x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial a} + x\frac{\partial f}{\partial b} \quad \Big|\ \cdot 9y$$

✓ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} + 2\frac{y}{x^3}\frac{\partial f}{\partial a} \quad \Big|\ x^2$$

✓ $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} \quad \Big|\ y^2$$

✓ $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial b^2} + 0\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial a\partial b} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \quad \Big|\ -2xy$$

Dosazení:

$$4\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{\partial f}{\partial a}(+7+9+2+2)\frac{y}{x} + \frac{\partial f}{\partial b}(-7+9-2) = \frac{y^4}{x^4}\,4$$

$$\underbrace{4\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 20\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial a} = 4\frac{y^4}{x^4}}_{✓}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + \frac{5}{a}\frac{\partial f}{\partial a} = a^2 ✓ \quad \Big/\ I.F. = a^5 ✓$$

$$\left(a^5\cdot\frac{\partial f}{\partial a}\right)' = a^7 = \left(\frac{a^8}{8} + g(b)\right)' \quad \Big/\ ' = \frac{\partial}{\partial a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{a^3}{8} + \frac{1}{a^5}g(b) ✓$$

$$f(a,b) = \frac{a^4}{24} - \frac{1}{4a^4}g(b) + h(b) \quad ; \quad g(b), h(b) \in C^2$$

$$f(x,y) = \frac{y^4}{24x^4} - \frac{x^4}{4y^4}g(xy) + h(xy)$$

✓ (stačí vyjádření tvaru $f(a,b)$)