Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta A

pondělí 25. listopadu 2019, 15:30–16:30

1 (4 body)

U dvou balancovaných hustot $f(x)$ a $g(x)$ je znám jejich momentový kód, a sice $(2^{k+2})_{k=0}^{\infty}$ a $(5^{k+1})_{k=0}^{\infty}$. Čemu se rovná

$$\int_{\mathbf{R}} x(f \star g)(x)\,\mathrm{d}x\,?$$

Výsledek podpořte komentovaným výpočtem.

2 (8 bodů)

Nechť $\beta > 0$. Aplikací Laplaceovy transformace vypočítejte

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\beta x)\cos^2(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

3 (8 bodů)

Nalezněte funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{B} \cap \mathscr{C}^1(\mathbf{R})$, pro které platí:

$$f(x) \star \Theta(x)\mathrm{e}^{-3x} \star g'(x) = \frac{\Theta(x)}{60} x^4 \mathrm{e}^{-3x}(5 - 3x)$$

$$g'(x) - 2f(x) + 3g(x) = 0.$$

Uvažte, jak lze užít faktu, že hledané funkce jsou spojitě diferencovatelné na $\mathbf{R}$?

$$\int_{\mathbb{R}} x\,(f*g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x \int_{\mathbb{R}} f(s)\,g(x-s)\,ds\,dx \overset{\text{F.V.}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} x\,f(s)\cdot g(x-s)\,d(x,s) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s)\cdot \int_{\mathbb{R}} x\,g(x-s)\,dx\,ds = \left| \begin{matrix} x-s=y \\ dx=dy \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(s) \int_{\mathbb{R}} (y+s)\cdot g(y)\,dy\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)\cdot \int_{\mathbb{R}} y\,g(y)\,dy\,ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} s\cdot f(s) \int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(s)\cdot \mu_1(g)\,ds +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} s\cdot f(s)\cdot \mu_0(g)\,ds = \mu_1(g)\cdot \mu_0(f) + \mu_0(g)\,\mu_1(f) =$$

$$= \underset{k=0}{5} \cdot \underset{k=1}{2^3} + \underset{k=1}{5^2} \cdot \underset{k=0}{2^2} = 5\cdot 8 + 25\cdot 4 = 140$$

$$\int_0^\infty f(x)\, G(x)\, dx = \int_0^\infty F(x)\, g(x)\, dx$$

$$F(x) = \mathcal{L}[f] \quad \& \quad G(x) = \mathcal{L}[g]$$

$$f(x) = \sin^2(\beta x)\cos^2(\beta x) = \frac{1}{4}\sin^2(2\beta x) = \frac{1}{8}\left(1 - \cos(4\beta x)\right)$$

$$F(s) = \frac{1}{8s} - \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+16\beta^2} = \frac{1}{8}\frac{s^2+16\beta^2-s^2}{s(s^2+16\beta^2)} = \frac{2\beta^2}{s(s^2+16\beta^2)}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \theta(x)\cdot x$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2(\beta x)\cos^2(\beta x)}{x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{2\beta^2}{x(x^2+16\beta^2)}\cdot x\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\beta^2}{x^2+16\beta^2}\, dx = \frac{2\beta^2}{16\beta^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4\beta}\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left[4\beta \arctan\frac{x}{4\beta}\right]_0^\infty = \frac{\beta}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\beta}{4}$$

$$\mathcal{L}[\theta(x)\, e^{-3x}] = \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}[\theta(x)\, x^4 e^{-3x}] = \frac{24}{(s+3)^5}$$

$$\mathcal{L}[\theta(x)\, x^5 e^{-3x}] = \frac{120}{(s+3)^6}$$

označme: $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ & $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$

$$\mathcal{L}[g'(x)] = s \cdot \mathcal{L}[g(x)] - g(0_+) = \left| \begin{array}{l} g(0_-) = 0 \ \& \\ \& \ g(x) \in C(\mathbb{R}) \end{array} \right| =$$

$$= s \cdot G(s)$$

Dosaďme:

I. $$F(s) \cdot \frac{1}{s+3} \cdot s \cdot G(s) = \frac{1}{12} \frac{24}{(s+3)^5} - \frac{1}{20} \frac{120}{(s+3)^6}$$

$$F(s) \cdot G(s) \cdot \frac{s}{s+3} = \frac{2}{(s+3)^5} - \frac{6}{(s+3)^6}$$

II. $$s \cdot G(s) - 2F(s) + 3G(s) = 0$$

$$F(s) = \frac{1}{2} G(s) \cdot (s+3)$$

$$G^2(s) \cdot \frac{s}{2} = \frac{2s+6-6}{(s+3)^6} = \frac{2s}{(s+3)^6}$$

$$G^2(s) = \frac{4}{(s+3)^6} \Rightarrow G(s) = \frac{2}{(s+3)^3}$$

$$\& \quad F(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$g(x) = \theta(x)\, x^2 e^{-3x} \quad \& \quad f(x) = \theta(x) \cdot x \cdot e^{-3x}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta B

pondělí 25. listopadu 2019, 15:30–16:30

1 (5 bodů)
Pro balancovanou hustotu $g(x)$ je znám její momentový kód $\vec{\mu} = (\mu_k)_{k=0}^{\infty}$. Ukažte, že pro jistá α je funkce $g(x)\mathrm{e}^{\alpha x} \in \mathscr{B}$ a pomocí $\vec{\mu}$ odvoďte kompletní momentový kód hustoty $g(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.

2 (8 bodů)
Aplikací Laplaceovy transformace rešte (na intervalu $(0, +\infty)$) integrodiferenciální rovnici

$$y' + 4y + 4\int_0^x y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 4x^2 + 8x + 7$$

společně s podmínkou $y(0_+) = 0$.

3 (7 bodů)
Nalezněte funkce $f(x), g(x) \in \mathscr{B}$, pro které platí:

$$f(x) \star \Theta(x)\mathrm{e}^{-2x} \star g(x) = \frac{\Theta(x)}{120}x^6\mathrm{e}^{-2x}$$

$$f(x) \star g(x) \star g(x) = \frac{\Theta(x)}{840}x^7\mathrm{e}^{-2x}$$

$\vec{\mu} = (\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ označme: $\varkappa = inb(g)$

Pak platí:

$$\forall \alpha < \varkappa : \quad g(x)e^{\alpha x} \in \mathcal{B}$$

Označme:

$$h(x) := g(x)e^{\alpha x}$$

Co o $h(x)$ platí:

1) $Ran(h) \subset \langle 0; +\infty) \Leftarrow \begin{matrix} e^{\alpha x} > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{matrix}$

2) $supp(h) \subset supp(g) \subset (0; +\infty)$

3) $e^{\alpha x} \in C(\mathbb{R}) \wedge g(x) \in PC(\mathbb{R}) \Rightarrow h(x) \in PC(\mathbb{R})$

4) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_0 \in \mathbb{R}^+ : \quad g(x)e^{\alpha x} < \varepsilon \quad$ na $\langle x_0; +\infty)$

– zvolme libovolně $\omega < \varkappa - \alpha \quad (\omega + \alpha < \varkappa)$

$$e^{\omega x} h(x) = g(x)e^{\alpha x}e^{\omega x} = g(x)e^{(\alpha+\omega+\delta)x}e^{-\delta x} \leq$$
$$\leq \varepsilon \cdot e^{-\delta x} \in \mathcal{L}(\langle x_0, +\infty))$$

volba δ: $\omega + \alpha + \delta < \varkappa \Rightarrow h(x) \in \mathcal{L}(\langle x_0; +\infty))$

$h(x) \in \mathcal{L}(-\infty; x_0)$ easy

5)
$$\underline{inb(h)} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(g(x)e^{\alpha x})}{x} = -\lim \frac{\ln g(x)}{x} +$$
$$- \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{x} = \underline{\varkappa - \alpha}$$

$$\underline{\tilde{\mu}_k(h)} = \int_{\mathbb{R}} x^k h(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) e^{\alpha x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} x^n\,dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^k g(x) x^n\,dx = \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \mu_{k+n}(g)}$$

$$Y := \mathcal{L}[y]$$

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0_+) = s \cdot Y$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x y(\tau)\, d\tau\right] = \frac{Y}{s}$$

$$\mathcal{L}\left[\Theta(x)\cdot(x^2+8x+7)\right] = \frac{8}{s^3} + 8\frac{1}{s^2} + \frac{7}{s} = \frac{2+8s+7s^2}{s^3}$$

<u>Dosadenie:</u>

$$sY + 4Y + \frac{4Y}{s} = \frac{8+8s+7s^2}{s^3}$$

$$Y(s^2+4s+4) = \frac{8+8s+7s^2}{s^2}$$

$$Y(s) = \frac{8+8s+7s^2}{s^2(s+2)^2}$$

parciálne zlomky: $\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2}$

$(A, C) = (0, 0)$

$(B, D) = (2, 5)$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} + \frac{5}{(2+s)^2}$$

$$y(x) = \Theta(x)\cdot(2x + 5x e^{-2x})$$

$\mathcal{L}[f] = F$ & $\mathcal{L}[g] = G$

I. $$F \cdot \mathcal{L}[\theta(x) e^{-2x}] \cdot G = \mathcal{L}\left[\frac{\theta(x)}{120} x^6 e^{-2x}\right]$$

$$F \cdot G \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{6}{(s+2)^7}$$

$$F \cdot G = \frac{6}{(s+2)^6}$$

II. $$F \cdot G \cdot G = \frac{6}{(s+2)^8}$$

$$F \cdot G^2 = \frac{6}{(s+2)^8}$$

Výpočet:

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = \theta(x) \cdot x e^{-2x}}}$$

$$F(s) = \frac{6}{(s+2)^6} \cdot (s+2)^2 = \frac{6}{(s+2)^4}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = \theta(x)\, x^3 e^{-2x}}$$