1.

$$\|g\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{-ax}-e^{-bx})^2}{x}\,\Theta(x)\,dx = \int_0^\infty \overbrace{\frac{1}{x}}^{F(x)} \cdot \overbrace{(e^{-ax}-e^{-bx})^2}^{h(x)}\,dx \overset{!}{=} \int_0^\infty f(x)\,H(x)\,dx$$

$$F(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \Theta(x)$$

$$h(x) = (e^{-2ax} - 2e^{-(a+b)x} + e^{-2bx})\,\Theta(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{2a+s} - \frac{2}{a+b+s} + \frac{1}{2b+s}$$

$$\|g\| = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2a+x} - \frac{2}{a+b+x} + \frac{1}{2b+x}\right)dx = \left[\ln\frac{(x+2a)(x+2b)}{(a+b+x)^2}\right]_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - \ln\frac{4ab}{(a+b)^2} = \ln\frac{(a+b)^2}{4ab}$$

a to je vždy větší než 1!

$$m_1(g) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (e^{-ax}-e^{-xb})^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\right)$$

B ?

1) $Dom(g) = \mathbb{R}$
2) $Ran(g) = \mathbb{R}_0^+$
3) $supp(g) = (0; +\infty)$

easy

4) $g(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$
$\Leftarrow \|g\| \in \mathbb{R}$ (viz výše)

5) $g(x) \in PC(\mathbb{R})$
ona je dokonce spojitá, neboť $\lim_{x\to 0_+} g(x) \overset{L'H}{=} 0$.

6, balanční vlastnost

kousek tam chyběl

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{-2ax}-e^{-2bx}-2e^{-(a+b)x})}{x} \ne \overbrace{-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 1/x}{x}}^{=0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2bx}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[\overbrace{e^{-2(a-b)x}}^{\to 0} + 1 - 2\overbrace{e^{-(\frac{a}{b}+1)x}}^{\to 0}\right]}{x} = -2b + 0 = -2b$$

$$\Rightarrow g(x) \in \mathcal{B}(2b),\ \text{resp. } inb(g) = 2b$$

$$g(x) \in \mathcal{B}(2b)$$

2.6

5.4.3 Příklad

Pro parametry $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$ vypočteme nyní Laplaceovou transformací určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož

$$\frac{\mathrm{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t} = \mathrm{e}^{-at}\frac{1-\cos(2bt)}{2t}$$

a

$$\mathfrak{L}[\Theta(t)] = \frac{1}{p}, \qquad \mathfrak{L}[\Theta(t)\cos(2bt)] = \frac{p}{p^2+4b},$$

dostáváme z linearity snadno výchozí vztah

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\left(1-\cos(2bt)\right)\right] = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4b}.$$

Užijeme-li v této fázi vztah č. 6 z Laplaceova desatera 5.2.11, získáme

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\frac{1-\cos(2bt)}{t}\right] = \int_p^\infty \left(\frac{1}{q} - \frac{q}{q^2+4b}\right)\mathrm{d}q = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+4b^2}{p^2}\right)$$

a poté za použití vztahu č. 7 z Laplaceova desatera dopočítáme Laplaceův obraz původního integrandu, tj.

$$\mathfrak{L}\left[\Theta(t)\frac{\mathrm{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\right] = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}\right).$$

Ze vztahu $\int_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \lim_{p\to 0_+} F(p)$ pak snadno vyplývá, že

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-at}\sin^2(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{a^2+4b^2}{a^2}\right).$$

I na tomto příkladě je zřetelně patrno, jak užitečné je užití Laplaceovy transformace. Ještě markantnější bude výhoda tohoto postupu v následujícím příkladě.

5.4.4 Příklad

Vypočtěme určitý integrál

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Užijeme vztah

$$\int_0^\infty f(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty F(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

z Laplaceova desatera. Jelikož

$$\mathfrak{L}[\Theta(t)\,\cos(at)] = \frac{p}{p^2+a^2}$$

a

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+p^2}\right] = \Theta(t)\,\sin(t),$$

přejde zadaný integrál do tvaru

$$I = \int_0^\infty \frac{x\,\sin(x)}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Zderivujeme-li dále zadaný integrál podle parametru a, (doporučujeme čtenáři, aby ověřil předpoklady příslušné věty) dostáváme

$$\frac{dI}{da} = -\int_0^\infty \frac{x\,\sin(ax)}{a+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dále pak

$$I = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{x\,\sin(x)}{1+(x/a)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = ay \\ \mathrm{d}x = a\mathrm{d}y \end{array}\right| = \int_0^\infty \frac{y\,\sin(ya)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{dI}{da}.$$

3.

In[1]:= `FullSimplify[2^k Factorial[k + 1] / Factorial[k] * (-1)^k * s^k]`

Out[1]= $(-2)^k\ (1+k)\ s^k$

In[2]:= `Sum[(-2)^k (1 + k) s^k, {k, 0, Infinity}]`

Out[2]= $\frac{1}{(1+2\,s)^2}$

In[3]:= `InverseLaplaceTransform[1/(1 + 2 s)^2, s, x]`

Out[3]= $\frac{1}{4}\, e^{-x/2}\, x$

7b

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mu_k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2} \frac{(2k+1)!!}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2} \frac{2^{k+1} \cdot (k+1)!}{k!} s^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1)(2s)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-2s)^k$$

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k \qquad \int f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x} + C$$ metoda součtu

$$f(x) = \left(\frac{x}{1-x} + c\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{(1+2s)^2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{4} x\, \Theta(x)\, e^{-x/2}$$