

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		12. ledna 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

1. Dokončete tvrzení a poté ho dokažte:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} \quad \wedge \quad q(\vec{x}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \sigma(\mathbf{A}) : \underline{\hspace{2cm}}$$

Symbol $<$ představuje negativní definitnost.

2. Dokažte, že každá Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici má řešení. Pro důkaz již předpokládejte, že máte k dispozici fundamentální systém dané rovnice. V rámci důkazu vyslovte definici Cauchyovy úlohy.
3. Je zobrazení

$$Q(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - 2b_1| + |a_2 - 2b_2|$$

metrikou v \mathbf{R}^2 ?

4. Kdy řekneme, že kvadratická plocha $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} - 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ je regulární?
5. Proč není předpis

$$\int_0^4 x f(x) g(x) dx$$

skalárním součinem na prostoru všech (tedy i nespojitých) funkcí definovaných alespoň na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$?

6. Minimalistickým zápisem (pouze za pomocí symbolů beze slov) přepište následující výrok:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0, p \in \mathbf{N}, x \in \langle -\pi, \pi \rangle \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^p \frac{\sin(nx + kx)}{(n+k)^2} \right| < \varepsilon.$$

7. Jaké tvrzení se skrývá za označením Věta o superpozici?
8. Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a jeho aplikaci demonstруйте na řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

a množině $A = \langle 0, +\infty \rangle$


9. Najděte funkci, pro níž

$$g^{(k)}(0) = (2k + 2)!!, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

nebo alespoň naznačte postup, jak hledanou funkci najít.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		19. ledna 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

- Vyslovte a dokažte základní větu o stejnoměrné konvergenci mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. V důkaze neopomeňte, že koeficienty a_n mohou být i záporná čísla.
- Dokažte jedno vámi vybrané tvrzení. Buď

$$f_n(x) \xrightarrow{\langle a,b \rangle} f(x) \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\Omega} f(x),$$

nebo

$$f_n(x) \xrightarrow{\Omega} f(x) \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\langle a,b \rangle} f(x).$$

Na závěr ještě doplňte, co představuje symbol Ω , tj. o konvergenci na jaké množině/prostoru se jedná.

- Předved'te aplikaci metody variace konstant na řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

- Nalezněte střed kvadriky

$$-4xy + 4xz + 4x + 4y^2 - 4yz + 4y + z^2 - 12z - 5 = 0.$$

- Co je jádrem operátoru $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 9$?

- Jaký je integrační faktor rovnice

$$xy' + (3 - x)y = x^4 \quad ?$$

Jeho tvar maximálně zjednodušte!

- Co je součtovou funkcí řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a jaký je její definiční obor?

- Vykreslete okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 2$ při metrice

$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}.$$

Nalezněte alespoň jeden hraniční bod okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(0,0)$ z oběma celočíselnými a nenulovými souřadnicemi. Při náčrtu obrázku dobře uvažte, zda je uvedené okolí konvexní nebo konkávní množinou.

- Vyslovte definici hraničního bodu v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$.