Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 27. listopadu 2018, 13:20–15:20

1 (9 bodů)
Nalezněte mocninnou řadu reprezentující hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\,\mathrm{d}y$$

a určete její obor konvergence. Výsledek zapište do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

2 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x}{x^2+n^2}$$

na množině $\langle 0,\infty)$.

3 (6 bodů)
Sestavte lineární diferenciální rovnici, pro níž

$$\Omega_q = [x, x^2, x^2+3x]_\lambda - 3x^3.$$

4 (9 bodů)
Nalezněte funkci, která je součtem řady

$$2-7(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(x-1)^n,$$

a zároveň řeší diferenciální rovnici

$$y''+\frac{3y'}{x}-\frac{3y}{x^2}=21x^2.$$

Koeficienty a_n nejsou známy.

5 (8 bodů)
Ověřte, zda funkcionální posloupnost, jejímž n–tým členem je funkce

$$g_n(x)=\mathrm{e}^{-xn}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^n-\mathrm{e}^{-x},$$

stejnoměrně konverguje na množině $\langle 0,\infty)$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 27. listopadu 2018, 13:20–15:20

1 (8 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$(x-3y-1)(1-3y')+yy'=0.$$

Nalezněte řešení procházející bodem $(x_0, y_0) = (5, 1)$. Má toto řešení nějaké průniky s osou x? Pokud ano, nalezněte je!

2 (9 bodů)
Nalezněte funkci, která je součtem řady

$$\frac{3}{2}\pi + \left(3+\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^n,$$

a zároveň řeší diferenciální rovnici

$$x^2 \sin(x)\, y'' - [2\sin(x) + x\cos(x)]\,(xy'-y) = 0.$$

Koeficienty a_n nejsou známy.

3 (8 bodů)
Nalezněte součtovou funkci funkcionální řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2+n} x^{2n}$$

a její definiční obor.

4 (9 bodů)
Rozhodněte, zda lze řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sqrt{x^2+n}$$

derivovat na intervalu $(-1, 1)$ člen po členu. Podrobně zdůvodněte!

5 (6 bodů)
Nalezněte Maclaurinovu řadu funkce

$$g(x) = \sin^2(x),$$

její obor konvergence a dokažte příslušnou rovnost mezi funkcí $g(x)$ a součtem vypočtené řady.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3 – varianta N

úterý 18. prosince 2018, 9:20–11:20

1 (11 bodů)
Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$xy'' - 3y' = -8x\frac{1+2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

2 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ na množině $M = \langle 0, \infty)$, je-li

$$f_n(x) = \left(3\frac{x}{n^2} + 2\frac{x^2}{n^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}.$$

3 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4^n}{n^3} + \frac{5^n}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

4 (8 bodů)
Sestavte mocninnou řadu reprezentující hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\,\mathrm{d}y$$

a vyšetřete její obor konvergence. Hledanou mocninnou řadu zapište ve tvaru s dvojnými faktoriály.

5 (5 bodů)
Rozhodněte a řádně zdůvodněte, je-li operátor

$$\hat{L} = x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 6x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 1$$

lineární, a na základě zjištěného výsledku popište některé zásadní vlastnosti množiny všech řešení rovnice $\hat{L}(y) = 0$. Co je definičním oborem uvedeného operátoru?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta A

úterý 8. ledna 2018, 13:20–15:20

1 (7 bodů)
Sestavte kanonický tvar třídimenzionální kvadratické formy

$$-4x^2 + 4xy - 4y^2 + 9z^2$$

a na jeho základě stanovte typ definitnosti této formy a určete obě signatury a název kvadriky $-4x^2 + 4xy - 4y^2 + 9z^2 = 2$.

2 (7 bodů)
Nechť je dán metrický prostor $\mathbf{R}^2$ s metrikou $\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - b_1| + \lceil |a_2 - b_2| \rceil$. Vykreslete okolí bodu $(0,0)$ o poloměru rovném třem. Dále rozhodněte, je-li některá z posloupností

$$(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}; \quad \vec{a}_n = (\frac{1}{n}, 0);$$

$$(\vec{b}_n)_{n=1}^{\infty}; \quad \vec{b}_n = (0, \frac{1}{n});$$

v tomto prostoru konvergentní. Vysvětlete.

3 (8 bodů)
Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$(y + x - 4x^2y)\, y' = 4xy^2 - x - y$$

procházející bodem $(x_0, y_0) = (-1, 2)$.

4 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y''' + (3x^2 + 2x)y'' + (3x^2 + 4x - 2)y' + (x^2 + 2x - 2)y = 0$$

víte-li, že jedním z řešení je jistá exponenciální funkce.

5 (9 bodů)
Jakou kuželosečku reprezentuje řešení diferenciální rovnice

$$2y' + 3\,\frac{y + 6x}{y + 3x} = \frac{y}{x}$$

vyhovující podmínce $y(1) = -6$. Určete její střed, existuje-li.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta B

úterý 8. ledna 2018, 13:20–15:20

1 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + 5y = 16\mathrm{e}^{-x}\cos(2x).$$

2 (8 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' + (x^2 - 4)\frac{y}{x} = \frac{x^9}{y},$$

jež je zadána společně s podmínkou $y(1) = -2$.

3 (7 bodů)
Sestavte kanonický tvar třídimenzionální kvadratické formy

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3z^2$$

a na jeho základě stanovte hodnotu záporného indexu setrvačnosti této formy a rozhodněte, jakou kvadriku reprezentuje rovnice $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3z^2 = \mu$ pro různé hodnoty $\mu \in \mathbf{R}$.

4 (7 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na $(0, +\infty)$ je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda posloupnost $(\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x})_{n=1}^{\infty}$ je v tomto prostoru konvergentní.

5 (9 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y''' + (2x - 6x^2)y'' + (12x^2 - 8x - 2)y' + (4 + 8x - 8x^2)y = 0$$

víte-li, že jedním z řešení je jistá exponenciální funkce.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3 – varianta N

pátek 11. ledna 2018, 9:30–11:30

1 (3 body)
Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor nad tělesem $\mathbf{C}$. Pro libovolné dva vektory $\vec{x},\vec{y} \in \mathcal{H}$ a číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ maximálně zjednodušte výraz

$$||\vec{x} + \alpha\vec{y}||^2 + ||\vec{x} - \alpha\vec{y}||^2.$$

2 (7 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 24x^3 e^{3x}.$$

Užijte faktu, že vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \{y(x) \in \mathscr{C}^3(\mathbf{R}) : \ xy'' - (6x+1)y' + (9x+3)y = 0 \ \wedge \ y''' - 6y'' + 9y' = 0\}$$

má dimenzi jedna.

3 (8 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2y' = \frac{x+2y}{y-x}$$

a rozhodněte, jakou regulární kuželosečku představuje.

4 (4 body)
Nechť je na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$ zadána norma předpisem $||\vec{x}|| := 2|x_1| + 3|x_2|$. Nechť $\chi(\vec{x},\vec{y})$ je metrika generovaná touto normou. Do obrázku (na druhé straně tohoto zadání) detailně načrtněte tvar okolí $H_6(1,2)$.

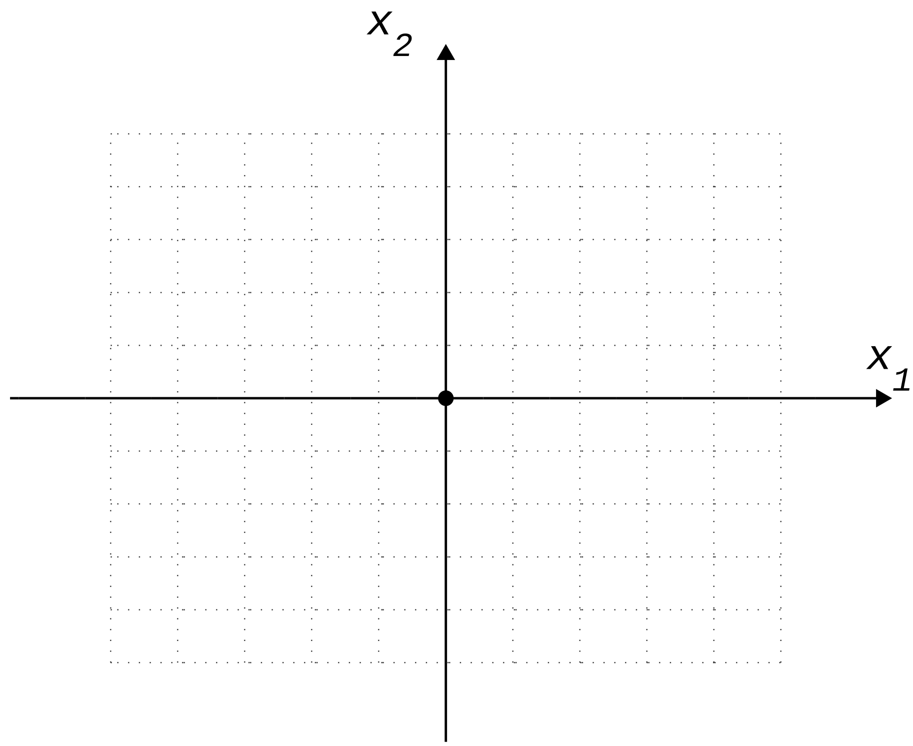
5 (9 bodů)
Kvadratickou plochu

$$Q(x,y,z) = -1 - 2x + x^2 + 8y - 8xy + 17y^2 - 8z + 6xz - 22yz + 10z^2 = 0$$

převeďte na normální tvar $Q(\xi,\eta,\lambda)$ a stanovte její signatury, regularitu, název, polární bázi a normalizující transformaci. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují!

6 (9 bodů)
Nalezněte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$x^3y''' - 2x^2y'' - 8xy' + 20y = \left(\frac{28}{x}\right)^2.$$



x_2
x_1

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Opravná zápočtová písemná práce z předmětu 01MAB3

středa 16. ledna 2019, 9:30–11:30

1 (10 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$xy''' + (5-6x)y'' + (12x-20)y' + (20-8x)y = 0$$

víte-li, že jedním z řešení je jistá exponenciální funkce.

2 (6 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na intervalu $\langle 0,1\rangle$ se skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ nalezněte všechny monomy, které svírají s funkcí $a(x) = x$ úhel 30°.

3 (9 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$x^2 + 2xy + 2xz - 4x + 6yz - 6y - 4z^2 - 4z = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar, název a střed. Dále stanovte příslušnou normalizující transformaci a převeďte ji do maticového tvaru. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (8 bodů)
Lze nebo nelze Weierstrassovým kritériem rozhodnout, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n^2}{x^2+n^2}}$$

konverguje na množině $A = \langle 0, +\infty)$ stejnoměrně? Detailně vysvětlete!

5 (9 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce $g(x) = (1-3x)^{-2/3}$ a určete její obor konvergence. Tvar řady upravte s pomocí vícenásobných faktoriálů.

Pro udělení zápočtu je nutno získat alespoň 21 bodů.