Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

18. dubna 2016, 11:20–13:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (6 bodů)
Nalezněte kritický bod soustavy generujících rovnic

$$\mathrm{e}^{x} - 6y - 6z^2 + 12z = 13, \quad 2\mathrm{e}^{2x} - 6y - z^3 = 6.$$

Užijte faktu, že proměnná x se při pokusu konstruovat implicitní funkce chápe jako nezávislá.

3 (11 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce z, jež je zadána rovnicí

$$10z^2 + 4xy + y^2 + u^2 - 2xz + 5x^2 + z + 2yz = 1.$$

4 (7 bodů)
Jakou hodnotou je nutno dodefinovat funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-\sqrt{2})^2}{4-x^2-y^2} & \dots \quad x^2+y^2 \neq 4, \\ ? & \dots \quad x^2+y^2 = 4, \end{cases}$$

na kružnici $x^2+y^2 = 4$ tak, aby tato funkce byla v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ spojitá vzhledem k tečně uvedené kružnice zkonstruované právě v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$?

5 (6 bodů)
Nechť $\beta \in \mathbf{N}$ je pevně zvolené liché číslo. Nalezněte kompaktní tvar jacobiánu zobrazení

$$x = 1 + \varrho\cos^{\beta}(\varphi);\ y = 2 + \varrho\sin^{\beta}(\varphi); z = 3 + 4\mu^2$$

a stanovte příslušnou maximální množinu regularity. Proč je výhodné požadovat lichost čísla β?

6 (9 bodů)
Do parciální diferenciální rovnice

$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

zaveďte nové proměnné $r = \frac{y^3}{x}$ a $s = xy$. Výslednou rovnici maximálně zjednodušte. Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

18. dubna 2016, 11:20–13:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (9 bodů)
Do parciální diferenciální rovnice

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 4x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

zaveďte nové proměnné $r = \frac{y}{x}$ a $s = yx^3$. Výslednou rovnici maximálně zjednodušte. Nalezněte také příslušnou maximální množinu regularity.

3 (11 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce z, jež je generována rovnicí

$$z^3 + 3z^2 + 2z(x + y + 3)^2 + 4y^2 + 4(x + 3)^2 = 0.$$

4 (7 bodů)
Označme $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ a definujme funkci $g(x, y)$ takto:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{2(y-\sqrt{2})^3}{4-x^2-y^2} & \dots \quad (x, y) \notin K, \\ 0 & \dots \quad (x, y) \in K. \end{cases}$$

Vypočítejte, pod jakým úhlem stoupá/klesá její graf v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ve směru tečny kružnice K sestrojené právě v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

5 (6 bodů)
Do obrázku (v kartézských souřadnicích) vykreslete množinu W, kterou je třeba vyjmou z $\mathbf{R}^2$, aby na doplňku $\mathbf{R}^2 \setminus W$ bylo zobrazení

$$x = 2 + \varrho\cos(4\varphi);\ y = 5 + \varrho\cos(2\varphi)$$

regulární.

6 (6 bodů)
Nalezněte kritický bod soustavy generujících rovnic

$$z + x^2 - 4x + 6e^y = 2, \quad 6z + (x-1)^3 - e^y = 1.$$

Užijte faktu, že proměnná y se při pokusu konstruovat implicitní funkce chápe jako nezávislá.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

4. května 2016, 9:10–11:10

1 (11 bodů)
Nalezněte lokální extrémy funkce $u(x, y)$ zadané implicitně rovnicí

$$u^3 + 3u^2 + 2u(x + y)^2 + 4(x + 2)^2 + 4(y - 2)^2 = 4.$$

2 (6 bodů)
Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 1.$$

Výsledek upravte do kompaktního tvaru.

3 (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^6 \mathrm{e}^{-6x}.$$

Užijte transformace do souřadnic

$$a = y^2 \mathrm{e}^{-2x}, \qquad b = y\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Na jaké maximální množině je zadaná transformace regulární?

4 (6 bodů)
Nalezněte konkrétní podobu křivky $y - \mathrm{e}^{ax} + b = 0$, vzhledem k níž je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3+3x^2}{y^2+x^2} & \dots \quad (x, y) \neq \vec{0} \\ \frac{3}{10} & \dots \quad (x, y) = \vec{0} \end{cases}$$

spojitá v bodě $(0, 0)$. Detailně popište, o jaké tvrzení se váš postup opírá.

5 (5 bodů)
Do obrázku (v kartézských souřadnicích) vykreslete množinu W, kterou je třeba vyjmou z $\mathbf{R}^2$, aby na doplňku $\mathbf{R}^2 \setminus W$ bylo zobrazení

$$x = \varrho \cos(4\varphi) - 3; \; y = 2 + \varrho \sin(2\varphi)$$

regulární.

6 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vašim jménem uveďte příjmení cvičícího.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze						
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

23. května 2016, 9:00–11:00

1 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2yz^2$ na množině

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x, y, z > 0 \ \wedge \ 16(x^4 + z^4) + y^2 = 48\right\}.$$

2 (10 bodů)
Pro parametry $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \frac{\cos(bx^2) - 1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Užijte větu o derivaci integrálu s parametrem.

3 (8 bodů)
Vypočtěte integrál

$$\int_B \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \,\mathrm{d}\mu_c(x, y),$$

kde B je kružnice

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \ x^2 + y^2 + 9 = 6(x + y)\right\}.$$

4 (6 bodů)
Nechť $A = \langle 0, 3) \cup (3, 4) \times \langle -1, 1)$ a $B = \{3\} \times \langle -1, 1)$. Nechť $\varphi(x) = 2x + 6 \cdot \Theta(x - 3)$ a $\psi(y) = \operatorname{arctg}(y)$ jsou vytvořující funkce Lebesgueovy míry. Čemu se rovná $\mu(A)$ a čemu $\mu(B)$? Pozn: $\Theta(\tau)$ je Heavisideova funkce.

5 (6 bodů)
Do dvou oddělených obrázků co nejpečlivěji vykreslete tvar množin

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x^2 + y^2)^2 \leqslant x^2 - y^2\},$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ (x^4 + y^4)^{3/2} \leqslant x^4 - y^4\}.$$

Vypomožte si výpočtem v polárních, resp. pseudopolárních souřadnicích. Množiny vyšrafujte, aby bylo zřetelně patrno, o jaký útvar jde a jak se obě množiny liší. Hodnotí se pouze správnost a kvalita obrázků!

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta B

23. května 2016, 9:00–11:00

1 (5 bodů)
Do obrázku co nejpečlivěji vykreslete tvar množiny $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2+y^2)^2 \geqslant y^2-x^2 \wedge x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Vypomožte si výpočtem v polárních souřadnicích. Množinu vyšrafujte, aby bylo zřetelně patrno, o jaký útvar jde. Hodnotí se pouze správnost a kvalita obrázku!

2 (6 bodů)
Nechť $A = \langle -1,1) \times \langle 0,2) \cup (2,3)$ a $B = \langle -1,1) \times \{2\}$. Nechť $\varphi(x) = \pi + \operatorname{arctg}(x)$ a $\psi(y) = 3y + 5 \cdot \Theta(y-2)$ jsou vytvořující funkce Lebesgueovy míry. Čemu se rovná $\mu(A)$ a čemu $\mu(B)$? Pozn: $\Theta(\tau)$ je Heavisideova funkce.

3 (9 bodů)
Nechť $\mathrm{R} > 0$ je pevně zvolený parametr. Vypočtěte integrál

$$\int_B y^2(x+2)^2 \, \mathrm{d}\mu_s(x,y,z),$$

kde B je plášť koule

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2(2x - z) = \mathrm{R}^2 - 5\right\}.$$

4 (10 bodů)
Nechť $a \in (0, 8\pi)$ je parametr. Vypočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(a^2 + x^2) - \ln(\pi^2 + x^2)}{\pi^2 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Užijte větu o derivaci integrálu s parametrem.

5 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = 5 + (xy)^2 z$ na množině

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0 \wedge x^4 + y^4 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 3\right\}.$$