Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta A

16. dubna 2018, 11:20–13:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (6 bodů)
Nalezněte všechny kritické generující body, v nichž soustava

$$4z - u - v + 16 = 0, \quad 4x + 8y + 4z + u + v = 8, \quad 2xy + u + v = 8$$

negarantuje existenci implicitní funkce $z = z(u, v)$.

3 (11 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \frac{2x + 6y - 13}{\sqrt{x^2 + 9y^2 - 42y + 50}}.$$

Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (11 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 8u(x, y).$$

Užijte k tomu substituci

$$\xi = \frac{y^2}{x}, \quad \eta = x.$$

5 (5 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{8x^2(y+2)}{15x^4 + (y+2)^2} & \dots \quad (x, y) \neq (0, -2) \\ 1 & \dots \quad (x, y) = (0, -2). \end{cases}$$

Nalezněte alespoň dvě množiny, vzhledem k nimž je $f(x, y)$ spojitá v bodě $(0, -2)$.

6 (7 bodů)
Rozviňte funkci

$$g(x, y) = \frac{x + y}{1 + 4(x + y)^2}$$

do Maclaurinovy řady. Výsledek upravte do tvaru řady s dvojitou sumou. Jaký je její obor konvergence? Obor konvergence také pečlivě načrtněte!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta B

16. dubna 2018, 11:20–13:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (10 bodů)
Nalezněte Taylorův polynom prvního stupně funkce $u = u(x,y,z)$ v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0) = (2, 3, -1)$. Funkce $u = u(x,y,z)$ nechť je zadána rovnicí

$$u^3 - xu^2 - 4zu + y - 4u = 3.$$

Dále vypočtěte $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\vec{a})$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(\vec{a})$.

3 (11 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial u}{\partial x} + u(x,y) = 0.$$

Užijte k tomu substituci

$$a = x, \quad b = \frac{x^2}{y}.$$

4 (6 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$g(x,y,z) = 2x^3 + 9x^2 + 4y^2 + 7 + 12x + z^2 - 2z.$$

5 (6 bodů)
Nalezněte všechny kritické generující body, v nichž soustava

$$4z - u - v + 16 = 0, \quad 4x + 8y + 4z + u + v = 8, \quad 2xy + u + v = 8$$

negarantuje existenci implicitní funkce $z = z(u,v)$.

6 (7 bodů)
Prověřte, zda má funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + \frac{2x^5}{x^4+y^2} + 3y - 8 & \dots \quad (x,y) \neq (0,0), \\ -8 & \dots \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

totální diferenciál v bodě $(0,0)$. Své tvrzení podrobně komentujte!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4 – varianta N

9. května 2018, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a pod kolonku s vaším jménem uveďte příjmení cvičícího.

2 (5 bodů)
Elipsu

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

aproximujte v bodě $(0, 3)$ parabolou. Uvažte, jaký aparát vhodný k aproximacím matematická analýza obvykle využívá. Nápomocna vám může také být teorie implicitních funkcí.

3 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = xy^2z^3(7 - x - 2y - 3z)$$

na množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : x > 0 \ \wedge \ y > 0 \ \wedge \ z > 0\}$. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (5 bodů)
Jakou hodnotu funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{2x^4+y^4} & \dots \ (x, y) \neq (0, 0), \\ ?? & \dots \ (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

je nutné zvolit v bodě $(0, 0)$, aby v něm existovala směrová derivace ve směru $(1, 2)$?

5 (10 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u(x, y).$$

Užijte k tomu substituci

$$a = xy, \quad b = y.$$

6 (10 bodů)
Nalezněte totální diferenciály funkcí, zadaných na okolí bodu $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2, 2, 2, 1)$ rovnicemi

$$\begin{aligned} xu^2 + yu^2v^4 &= v^2(x + y)^2 \\ u^4 - 2y^2v^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

v bodě (x_0, y_0).

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4 – varianta A

25. května 2018, 9:20–11:20

1 (1 bod)
Do tabulky výše vyplňte své příjmení a jméno a prostudujte si následující nápovědu.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\cdot\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}; \quad \Gamma(n) = (n-1)!; \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

2 (6 bodů)
Jakou jedinou množinu Y je třeba doplnit do soustavy $\mathscr{B} = \big\{\emptyset, Y, \{\blacktriangledown\}, \{\spadesuit, \star\}, \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\}\big\}$, aby tato byla polookruhem? Na $\mathscr{B}$ je míra definována výčtem

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \dots \quad X = \emptyset \\ 6 & \dots \quad X = \{\blacktriangledown\} \\ 3 & \dots \quad X = \{\spadesuit, \star\} \\ 7 & \dots \quad X = \{\bullet, \blacklozenge, \blacktriangledown\} \end{cases}$$

Jak vypadá minimální okruh $\mathscr{O}$ generovaný soustavou $\mathscr{B}$? A jakou míru mají množiny z $\mathscr{O}$?

3 (8 bodů)
Vypočítejte křivkový integrál $\int_A (y^2, x)\,\mathrm{d}\mu_c(x,y)$ přes křivku vyobrazenou fialově na přiloženém obrázku.

4 (8 bodů)
Nechť je Lebesgueova míra zadána prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^2\mathrm{sgn}(\tau)$ platné pro obě dimenze. Nalezněte těžiště množiny

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ y > 0 \ \wedge \ \sqrt{\left|\frac{x}{a}\right|} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1\right\}.$$

5 (10 bodů)
Nechť je na množině $T = \big\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \ x^2 + 2xy - 2xz + 2y^2 - 4yz + 3z^2 = 1 \ \wedge \ \sqrt{2}x = 1\big\}$ dána funkce $g(x,y,z) = xy$. Rozhodněte, zda je bod

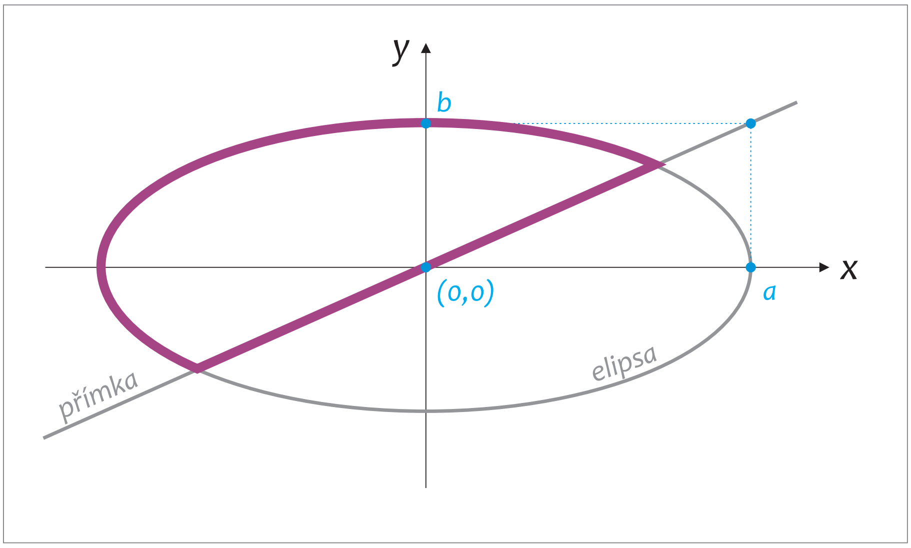
$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

bodem lokálního vázaného maxima či minima? Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

6 (7 bodů)
Nechť $a > 0, \mu \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}_0$. Vypočítejte hodnoty všech integrálů tvaru

$$\int_\mu^\infty (x-\mu)^n \mathrm{e}^{-a(x-\mu)}\mathrm{d}x.$$

Uvažte, jak vám při jejich vyčíslování může být nápomocna technika derivování integrálu podle parametru.



y
b
x
(0,0)
a
elipsa
přímka