

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – varianta 01

pondělí 30. října 2017, 15:30–16:15

1 (5 bodů)

Vyslovte definici balancované hustoty a rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ leží funkce $g(x) = \Theta(x)x^\alpha e^{-x}$ v \mathcal{B} . Podrobně zdůvodněte!

2 (10 bodů)

Odvoďte, jak lze vypočítat druhý moment hustoty $(f \star f)(x)$ na základě znalosti momentů normované hustoty $f(x) \in \mathcal{H}'$.

3 (5 bodů)

Nechť $g(x) \in \mathcal{B}$ a $c > 0$. Podle definice (tj. bez použití vzorce pro výpočet balančního indexu) dokažte, že pak $g(cx) \in \mathcal{B}$. Čemu se rovná $\text{inb}(f(cx))$?

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MCS – varianta 01

pondělí 4. prosince 2017, 15:30–16:30

1 (8 bodů)

Vypočítejte (aplikací Laplaceovy transformace) integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2} dx.$$

2 (9 bodů)Dokažte větu o Laplaceově obrazu tzv. *chvostové distribuční funkce*

$$h(x) = \Theta(x) \int_x^{\infty} g(y) dy.$$

3 (10 bodů)

Nechť $g(x) \in \mathcal{B}$ a $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$. Dokažte, že $G(s)$ je pak nutně analytická v nule a odvoďte tvar její MacLaurinovy řady využívající znalosti momentového kódu hustoty $g(x)$. Co vyplývá z důkazu věty pro poloměr konvergence takové řady?

4 (13 bodů)

Nalezněte řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$y'' - z'' + z' - y = e^x - 2,$$

$$2y'' - z'' - 2y' + z = -x,$$

které vyhovuje podmínkám $y(0_+) = z(0_+) = y'(0_+) = z'(0_+) = 0$.

Zápočtová písemná práce č. 3 z předmětu 01MCS – varianta 01

středa 3. ledna 2018, 9:30–11:30

1 (9 bodů)

Určete balancovanou hustotu, víte-li, že její momentový kód je

$$\left(\frac{1}{2}(2k+2)!! \right)_{k=0}^{\infty}.$$

2 (13 bodů)

Vyslovte a dokažte Lerchův teorém.

3 (8 bodů)

Vyslovte a dokažte větu o Laplaceově obrazu konvoluce.

4 (6 bodů)

Vyslovte následující definice: 1) Balanční částicový systém, 2) Balancovaná hustota.

5 (13 bodů)

Pro balanční částicový systém je znám generátor

$$\frac{27}{2}x^2\Theta(x)e^{-3x}.$$

Určete jeho shlukovou funkci, načrtněte její průběh a stanovte body jejích lokálních minim a maxim, pokud existují.

6 (11 bodů)Vyslovte a dokažte větu o lineární asymptotě funkce $\lambda(L) := \mathbb{E}(\mathcal{N}_L)$, kde \mathcal{N}_L je intervalová frekvence balančního částicového systému.

Zápočtová písemná práce č. 4 z předmětu 01MCS – varianta 01

úterý 16. ledna 2018, 13:00–15:00

1 (11 bodů)

Doplňte znění následující věty a dokažte ji.

Nechť $g(x) \in \mathcal{B}$ a $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ její momentový kód. Označme $h(x) = \Theta(x) \int_0^x g(y) dy$. Pak $h(x)$ je neklesající, omezená, nezáporná, spojitá a navíc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = ?$$

2 (11 bodů)

Laplaceovou transformací řešte integrodiferenciální rovnici

$$y'' - 5y' + 17y - 13 \int_0^x y(s) ds = 28$$

zadanou společně s podmínkami $y(0_+) = 3$, resp. $y'(0_+) = 4$.**3** (8 bodů)Vyslovte definici balancované hustoty a rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbf{R}$ leží funkce

- $f(x) = \Theta(x)x^\alpha e^{-x}$,
- $g(x) = \Theta(x)e^{-x} \cos^2(\alpha x)$

ve třídě \mathcal{B} . Podrobně zdůvodněte!**4** (8 bodů)

Vyslovte definici balančního částicového systému a odvoďte, jaká je v tomto systému pravděpodobnost, že se na intervalu délky čtyři (za referenční částicí) vyskytnou přesně 2 částice. Výsledek vyjádřete ve tvaru, který pracuje pouze s generátorem daného BČS.

5 (11 bodů)

Pro balanční částicový systém je znám generátor

$$4\Theta(x)xe^{-2x}.$$

Určete jeho shlukovou funkci $r(x)$ a střední hodnotu $\lambda(x) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_x)$ intervalové frekvence \mathcal{N}_x (tzv. *frekvenční trendová funkce*). Pro obě funkce načrtněte detailní průběh.**6** (11 bodů)

Užitím Laplaceovy transformace vypočtete integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\beta x) \cos^2(\beta x)}{x^2} dx.$$

Vyslovte definici balančního částicového systému. Poté uvažujte BČS zadaný generátorem

$$g(x) = 4\Theta(x)xe^{-2x}$$

a odvodte, jaká je v tomto systému pravděpodobnost, že se na intervalu délky čtyři (za referenční částicí) vyskytnou přesně 2 částice. Výsledek vyjádřete ve tvaru nekonečné řady a poté proveďte aproximaci využívající pouze prvních členů této řady.