Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – verze A

pátek 18. prosince 2020, 9:30–11:00

1 (7 bodů)
Pro funkci

$$g(x) = \Theta(x)\frac{(\mathsf{e}^{-ax} - \mathsf{e}^{-bx})^2}{x}; \; 0 < b < a$$

vypočítejte normu $\|g\|$ a první moment $\mu_1(g)$. Dále rozhodněte, zda (nebo případně pro jakou volbu parametrů) patří tato funkce do třídy balancovaných hustot. V případě pozitivní odpovědi určete příslušný balanční index.

2 (7 bodů)
Nechť $\alpha > 0$ a $\beta \in \mathbf{R}$. Aplikací Laplaceovy transformace vypočítejte

$$\int_0^{\infty} \mathsf{e}^{-\alpha x}\,\frac{\sin^2(\beta x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

3 (7 bodů)
Určete balancovanou hustotu, víte-li, že její momentový kód je

$$\left(\frac{1}{2}(2k+2)!!\right)_{k=0}^{\infty}.$$

Užijte faktu, že příslušný Laplaceův obraz a jeho derivace úzce souvisejí s velikostí momentů hledané hustoty.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01MCS – verze B

středa 6. ledna 2021, 9:30–11:00

1 (7 bodů)

Nechť $(\mu_k)_{k=0}^{\infty}$ je momentový kód hustoty $g(x) \in \mathscr{B}$. Jak vypadá momentový kód chvostové distribuční funkce

$$h(x) = \Theta(x) \int_x^{\infty} g(y)\,\mathrm{d}y\,?$$

Jeden z možných postupů: Nejprve odvoďte, jak souvisí $\mathfrak{L}[h(x)]$ s $\mathfrak{L}[g(x)]$ a poté dosaďte za $\mathfrak{L}[g(x)]$ její Maclaurinovu řadu.

2 (bodů)

Laplaceovou transformací řešte integrodiferenciální rovnici

$$z' + 4z + 29 \int_0^x z(y)\,\mathrm{d}y = -29$$

společně s podmínkou $z(0) = -12$.

3 (7 bodů)

Pro jaké hodnoty parametrů patří funkce

$$g(x) = \Theta(x) \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}$$

do třídy $\mathscr{H}$? Pro nalezenou volbu vypočítejte normu $\|g\|$ a první moment $\mu_1(g)$. Dále rozhodněte, zda (nebo případně pro jakou volbu parametrů) patří tato funkce do třídy balancovaných hustot. V případě pozitivní odpovědi určete příslušný balanční index.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01MCS – verze A

pondělí 18. ledna 2021, 9:00–11:00

1 (6 bodů)
Nechť $g_k(x)$ je hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč balančního částicového systému. Maximálně zjednodušte vztah

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)\right) \star \left(\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)\right).$$

2 (12 bodů)
Definujte balanční částicový systém (BČS) a představte všechny tři možné způsoby jeho statistického popisu. Kdy o BČS prohlásíme, že je škálovaný? Nakonec ukažte, jak souvisí trendová funkce se shlukovou funkcí. Obě také definujte.

3 (12 bodů)
Nechť N_{L} je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_{\mathrm{L}}^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a\rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit? Nápověda: může se hodit výsledek příkladu č. 1.

4 (10 bodů)
Užitím vhodného aproximačního postupu vypočítejte konvoluci

$$\Theta(x) x \mathrm{e}^{-\frac{c}{x}} \mathrm{e}^{-4x^2} \star \Theta(x) x \mathrm{e}^{-\frac{c}{x}} \mathrm{e}^{-4x^2},$$

kde $c \geqslant 0$ je pevně zvolená konstanta. Pro která c je vámi získaný výsledek nejpřesnější?

5 (12 bodů)
Odvoďte, jak souvisí Laplaceův obraz chvostové distribuční funkce příslušné k balancované hustotě $g(x) \in \mathscr{B}$ s Laplaceovým obrazem $\mathfrak{L}[g(x)]$. A poté odvoďte, jak lze ze známého momentového kódu funkce $g(x)$ získat momentový kód chvostové distribuční funkce. Výsledek maximálně zjednodušte.

6 (8 bodů)
Nalezněte hustotu pravděpodobnosti dvou stejně rozdělených náhodných veličin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ tak, aby

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} \backsim 4\Theta(x)\mathrm{e}^{-4x},$$

tj. aby součet těchto veličin měl exponenciální rozdělení. Je váš výsledek univerzálně platný nebo je jeho platnost nějakým způsobem omezená? Patří vámi nalezená hustota pravděpodobnosti do třídy $\mathscr{B}$?