Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	BONUS

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB3

11/01/2019, 9:30–11:30

1 (6 bodů)
Sestavte vektorové spektrum q–formy

$$(x, y, z, w)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

a na jeho základě stanovte typ definitnosti zadané formy. Vysvětlete.

2 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!}(x+1)^n.$$

3 (6 bodů)
V Hilbertově prostoru $\mathbf{R}^3$ s normou

$$(2x^2 - 2xy + 2y^2 + 3z^2)^{1/2}$$

vypočítejte, jaký úhel (ve stupních) svírají vektory $(1, -1, 0)$ a $(0, 1, 0)$.

4 (12 bodů)
Pro řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{\sqrt{x^2+n^2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

a množinu $A = \langle 0, +\infty)$ *a)* rozhodněte, zda řada splňuje na A nutnou podmínku stejnoměrné konvergence; *b)* rozhodněte, zda konverguje na A stejnoměrně.

5 (10 bodů)
Mezi formálními řešeními diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} - 3}{3\frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} - 3}$$

je i kružnice o poloměru $R = 5$. Nalezněte její střed.

6 (9 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \ln(x + \sqrt{9 + x^2})$ a určete její obor konvergence. Diskutujte, kde berete jistotu, že je zadaná funkce skutečně analytická. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály!

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	BONUS

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB3

16/01/2019, 9:30-11:30

1 (9 bodů)
Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2xy' = \frac{y^2 - 5x^2}{y + 2x}$$

reprezentující kuželosečku se středem v bodě $\vec{a} = (-2, 4)$.

2 (7 bodů)
Nechť je dán funkční Hilbertův prostor $\mathscr{H}$ a prvky jeho ortonormální báze: $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$. Nechť pro dvě funkce $f(x), h(x) \in \mathscr{H}$ platí sada rovností $\langle f|g_k\rangle = \alpha_k$ a $\langle h|g_k\rangle = \beta_k$. Vypočítejte vzdálenost těchto funkcí, víte-li, že

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix} \quad \& \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ m+1 \end{pmatrix}.$$

3 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{2x}{\sqrt{n^2 + 9x^2}} \right)^n$$

na množině $\langle 0, +\infty)$.

4 (9 bodů)
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!} x^n$$

a její definiční obor. Nápověda: S pomocí tabulky na zadní straně zadání uvažte, které rozvoje (po úpravě) obsahují vícenásobné faktoriály.

5 (9 bodů)
Diferenciální rovnice

$$xy''' + (3 - 6x)y'' + 12(x-1)y' + (12 - 8x)y = 0,$$

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

mají nekonečně mnoho společných řešení. Vyřešte je.

6 (7 bodů)
Jaké jsou signatury kvadriky

$$-2wz + x^2 + 2xy + 2xz - 4x + 6yz - 2z^2 - 12z - 1 = 0\,?$$

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

23/01/2019, 9:30-11:30

1 (10 bodů)
Diferenciální rovnice

$$x^2y'' + x(6x+2)y' + (9x^2 + 6x - 2)y = 0,$$
$$y''' + 2y'' - 3y' = 12\mathrm{e}^{-3x}$$

mají jedno jediné společné řešení. Vyřešte je.

2 (7 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na $(0, +\infty)$ je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda posloupnost $(\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x})_{n=1}^\infty$ je v tomto prostoru konvergentní. Nápověda: $\int_0^\infty x^k\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{k!}{a^{k+1}}$.

3 (4 body)
Pro která $\mu, \omega \in \mathbf{R}$ zadává předpis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

skalární součin na prostoru $\mathbf{R}^4$?

4 (10 bodů)
Sestavte Taylorovu řadu funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

v bodě $x = 2$. Výsledek upravte do tvaru s vícenásobnými faktoriály. Určete také příslušný obor konvergence.

5 (10 bodů)
Pro kvadratickou plochu

$$2 - 2x + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z + 8xz - 16yz + 32z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

6 (9 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x(n^4x + x^3 + 1)}{n^4 + x^2}\right)_{n=1}^\infty$$

na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	BONUS

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB3

28/01/2019, 9:30-11:30

1 (7 bodů)

Nechť je na Hilbertově prostoru zadán skalární součin vztahem

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 x^3 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vypočtěte vzdálenost množiny $M = \left\{g_a(x) = \sqrt{6a^2x^2 - 20ax + 116} : a \in \mathbf{R}\right\}$ od nulové funkce.

2 (10 bodů)

Řešte rovnici

$$y'' - 2\frac{y}{x^2} = 3$$

za podmínek $y(1) = 2$, $y'(1) = 14$.

3 (10 bodů)

Ukažte, že pro ověření stejnoměrné konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}\,x}{\sqrt{n^4 + x^4}}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ nelze užít Weierstrassova kritéria, ale Abelova ano. Věnujte zvýšený důraz poctivé argumentaci vašich tvrzení. Při bodovém hodnocení je ke kvalitě argumentací výrazně přihlíženo!

4 (8 bodů)

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{\sqrt{n}} + \frac{2^n}{\sqrt{n^3}}\right) x^n.$$

5 (10 bodů)

Nalezněte formální řešení diferenciální rovnice

$$2x(2y + x)y' = 2y^2 - x^2$$

vyhovující podmínce $y(2) = 0$. Detailně diskutujte, co vypočtené formální řešení představuje a s pomocí detekce středu ho také pečlivě načrtněte.

6 (5 bodů)

Pro bod $\vec{0}$ a poloměr $\varepsilon = 2$ vykreslete příslušné okolí v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2; |x_1 - y_1| + \sqrt{|x_2 - y_2|}\}$.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno (hůlkovým písmem)	1	2	3	4	5	6	BONUS

Svým podpisem vyjadřuji souhlas s průběžným zveřejňováním svých výsledků z předmětů 01MAB3 (případně též 01SMB1) na webových stránkách www.fjfi.cvut.cz a www.krbalek.cz

Podpis studenta:	

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB3

04/02/2019, 9:30-11:30

1 (9 bodů)
Nalezněte součet mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} 8^{n+1}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

Návod: Sestavte příslušnou Cauchyovu úlohu a tuto standardními prostředky vyřešte.

2 (8 bodů)
Řešte obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' - 8y' + 16y = \mathrm{e}^{4x}\frac{1+x}{x}.$$

3 (9 bodů)
Pro která $\beta \in \mathbf{R}^+$ lze stejnoměrnou konvergenci funkční řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n^n}\frac{x\cdot n!}{n^2+x^2}$$

na množině $\mathbf{R}$ prokázat Weierstrassovým kritériem? Na vhodném místě výpočtu lze využít nerovnosti

$$\mathrm{e}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \leqslant n!$$

4 (8 bodů)
V prostoru $\mathbf{R}^3$ sestrojte polární bázi, která je generována kvadratickou formou

$$q(x,y,z) = -2x^2 - y^2 - 20z^2 - 4xy - 14xz - 10yz,$$

a která obsahuje vektory $(1,3,-1)$ a $(?,?,0)$. Na základě znalosti polární báze sestavte transformační vztahy, které zadanou kvadratickou formu převádějí na normální tvar. Normální tvar zapište.

5 (11 bodů)
Formálním řešením diferenciální rovnice

$$y' + \frac{4x+3y}{9y+6x} = \frac{y}{2x}$$

je elipsa se středem v bodě $(-3,2)$. Nalezněte toto formální řešení a detailně ho načrtněte. Pro přesnější náčrt zjistěte alespoň čtyři jeho významné body.

6 (5 bodů)
V Hilbertově prostoru $\mathscr{H} = [1, x, x^2]_\lambda$, kde je skalární součin zadán prostřednictvím vztahu

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

zkonstruujte ortonormální bázi.