Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4

25/05/2016, 9:00–11:00

1 (11 bodů)
Vypočítejte abstraktní plošnou míru množiny

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x^4 + y^4)^{3/2} \leqslant x^4 - y^4\right\}.$$

Příslušná Lebesgueova míra je generována vytvořující funkcí $\varphi(\tau) = \tau^3$ v obou dimenzích.

2 (8 bodů)
Rozhodněte, zda pro funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+8y^3}{x^2+2y^2} & \ldots \quad (x,y) \neq \vec{0}; \\ 0 & \ldots \quad (x,y) = \vec{0}; \end{cases}$$

existuje totální diferenciál v bodě $(0,0)$. Detailně odůvodněte!

3 (9 bodů)
Nechť je implicitní funkce $u(x,y)$ zadána generující rovnicí $H(x,y,u) = 0$. Nechť (x_0, y_0, u_0) je generujícím bodem, který není kritický. Nechť dále (x_0, y_0) je stacionárním bodem funkce $u(x,y)$. Stanovte vztah mezi Hessovou maticí $\mathbb{H}_{(x_0,y_0,u_0)}$ funkce $H(x,y,u)$ a Hessovou maticí $\mathbb{U}_{(x_0,y_0)}$ funkce $u(x,y)$. Získaný vztah přeformulujte do vlastní (elegantně formulované) věty.

4 (12 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x,y,z) = 4 + y(xz)^2$ na množině

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0 \ \wedge \ 16(x^4 + z^4) + y^2 = 48\right\}.$$

5 (10 bodů) – *fyzikální úloha*
Hustota $\varrho(x,y,z)$ tělesa tvaru poloelipsoidu $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$; $z \geqslant 0$ je přímo úměrná kvadrátu vzdálenosti od roviny $z = 0$. Vypočítejte z–tovou souřadnici těžiště tohoto tělesa.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4

31/05/2016, 9:00–11:00

1 (9 bodů)
Vypočtěte integrál $\int_B (-b^2 z; acy; b^2 x)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y,z)$, kde B je kvazipoledník

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ \wedge\ bx = ay \ \wedge\ x, y > 0 \right\}.$$

2 (8 bodů)
Nechť je dána funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a bod $\vec{a}$, ve kterém je znám gradient. Jakým směrem míří tento gradient? Co o funkci $f(\vec{x})$ tento směr vypovídá? Hodnota jakého úhlu je zakódována v hodnotě $\|\operatorname{grad} f(\vec{a})\|$? A jaký (zde nezmíněný) předpoklad o funkci $f(\vec{x})$ je třeba ve vašich úvahách požadovat? Všechna vaše tvrzení podpořte pomocnými výpočty, aby bylo zřejmé, na jakých poznatcích vaše úvahy zakládáte!

3 (13 bodů)
Nalezněte vlastní čísla Hessovy matice (vyčíslené v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0) = (-3, 0)$) implicitně zadané funkce $z(x,y)$, která je generována rovnicí

$$z^3 + 3z^2 + 2z(x+y+3)^2 + 4y^2 + 4(x+3)^2 = 0.$$

Jaký závěr o bodu $\vec{a}$ lze ze získaného výsledku udělat?

4 (8 bodů)
Na soustavě

$$\mathscr{H} = \Big\{ \emptyset; \{\blacksquare, \clubsuit\}; \{\triangle\}; \{\blacksquare, \clubsuit, \triangle\}; \{\bigcirc, \bigstar\}; \{\blacksquare, \clubsuit, \triangle, \bigcirc, \bigstar\} \Big\},$$

je zadána míra $F(X)$ tak, že

- $F(\{\blacksquare, \clubsuit\}) = 9$,
- $F(\{\triangle\}) = 4$,
- $F(X)$ není na $\mathscr{H}$ úplná.

Nechť $\mathscr{D}$ je minimální okruh generovaný soustavou $\mathscr{H}$ a $m(X)$ je rozšíření míry $F(X)$ z $\mathscr{H}$ na $\mathscr{D}$. Jakou míru má prezident v $\mathscr{D}$? Které množiny leží v $\mathscr{D}$, ale neleží v $\mathscr{H}$? Jakou mají míru? Na závěr vypočítejte vnitřní a vnější míru množiny $\{\triangle, \bigcirc\}$ odvozenou od míry $m(X) : \mathscr{D} \mapsto \mathbf{R}^{\circledast}$. Jaké vlastnosti má soustava $\mathscr{H}$? Vyberte ty nejzajímavější.

5 (12 bodů) – *fyzikální úloha*
Uvažujeme těleso konstantní hustoty ϱ tvaru elipsoidu

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \mathrm{R}^2 \right\}.$$

Vypočítejte hmotnost tělesa a poté jeho moment setrvačnosti vzhledem k rotaci kolem osy z. Výsledek upravte do tvaru nevyužívajícího hodnotu hustoty, tj. do tvaru, kde vystupují pouze parametry c, R a hmotnost elipsoidu. Nápověda: moment setrvačnosti tělesa T se vypočítá podle vzorce

$$J = \int_T v^2(x,y,z)\, \mathrm{d}m(x,y,z) \equiv \int_T v^2(x,y,z)\, \varrho(x,y,z)\, \mathrm{d}(x,y,z),$$

kde $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy rotace a $\varrho(x,y,z)$ je hustota.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB4

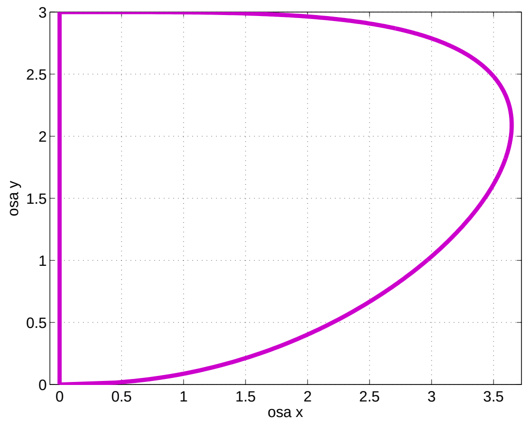
06/06/2016, 9:00-11:00

1 (12 bodů)

Vypočítejte integrál $\int_A (x^2y^3; 2x^3y^2)\, \mathrm{d}\mu_c(x,y)$, kde A je křivka z obrázku. Oblá část křivky je popsána rovnicí

$$\left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4}\right)^{11} = \frac{y^{20}}{b^{20}}.$$

Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu výpočtu.



2 (11 bodů)

Na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0\}$ vyšetřete všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = xy^2z\sqrt{9 - x - 4y - 2z}.$$

3 (11 bodů)

Nechť $c > 0$ je pevně zvolený parametr. Transformujte Laplaceův operátor z kartézských souřadnic (x,y,z) do pseudocylindrických souřadnic (ϱ, φ, h) zadaných rovnicemi

$$x = \varrho^2\cos(\varphi), \quad y = \varrho^2\sin(\varphi), \quad z = ch^2.$$

Užijte předpočítané výsledky vložené do zadání.

4 (6 bodů)

Na základě rovnosti

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

vypočtěte aplikací vhodné věty integrál $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$. Všechny předpoklady explicitně dokažte!

5 (10 bodů) – *fyzikální úloha*

Uvažujeme těleso konstantní hustoty ϱ tvaru eliptického válce

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant z \leqslant c\right\}.$$

Vypočítejte hmotnost tělesa a poté jeho moment setrvačnosti vzhledem k rotaci kolem osy z. Výsledek upravte do tvaru nevyužívajícího hodnotu hustoty, tj. do tvaru, kde vystupují pouze parametry a, b, c a hmotnost válce.
Nápověda: moment setrvačnosti tělesa T se vypočítá podle vzorce

$$J = \int_T v^2(x,y,z)\,\mathrm{d}m(x,y,z) \equiv \int_T v^2(x,y,z)\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

kde $v(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy rotace a $\varrho(x,y,z)$ je hustota.

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB4

14/06/2016, 9:00-11:00

1 (9 bodů)
Vyšetřete globální extrémy funkce $g(x, y) = 9x + 6y$ na půlelipse

$$Z = \left\{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \land y \geqslant 0\right\}$$

2 (12 bodů)
Vypočítejte integrál $\int_S (yz, x^2, \mathrm{e}^x + y^2 z)\, \mathrm{d}\mu_s(x, y, z)$, kde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : (1 + x + 2z)^2 + y^2 + (2 + z + 3x)^2 = 1\}.$$

Zvažte možné postupy a volte jednodušší variantu výpočtu.

3 (13 bodů)
Která z implicitních funkcí zadaných rovnicemi

$$xy + y^2 + zy - u - yw = 0; \quad x^2 y + y^3 + zy + u - yw^2 = 0; \quad x^3 y^2 (x + 2y) + u^2 - z^2 w^2 = 0$$

stoupá v bodě $\vec{a} = (x_0, y_0) = (1, 1)$ nejstrměji? Užijte nápovědy, že $w(\vec{a}) = 2$. Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují.

4 (7 bodů)
Nalezněte množinu M, vzhledem k níž je funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{12y^6}{(x-1)^2 + y^4} \cdot \frac{1}{x-1} & \ldots \quad (x, y) \neq (1, 0); \\ \frac{2}{5} & \ldots \quad (x, y) = (1, 0); \end{cases}$$

spojitá v bodě nespojitosti.

5 (9 bodů) – *fyzikální úloha*
Těleso tvaru eliptického paraboloidu

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z}{c} \land 0 \leqslant z \leqslant c\right\}$$

je vyplněno kapalinou, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od roviny $z = 0$. Vypočítejte polohu těžiště takového tělesa.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB4

21/06/2016, 9:00–11:00

1 (7 bodů)
Vypočítejte obsah plochy grafu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ ležícího mezi rovinami $z = 1$ a $z = 4$.

2 (6 bodů)
Zaměňte integrační pořadí v integrálu

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\sqrt{3}x}^{6\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} g(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

3 (12 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y,z,u) = xyz + x + y + z + u$ na množině

$$M = \left\{(x,y,z,u) \in \mathbf{E}^4 : x,y,z,u > 0 \,\wedge\, x^2 + y^2 + z^2 = 12 \,\wedge\, x + y + z + u = 11\right\}.$$

4 (9 bodů)
Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

pro neznámou funkci $f(x,y)$ vztahy

$$u = x + y, \qquad v = \frac{y}{x},$$

je-li funkce $g = g(u,v)$ definovaná předpisem

$$g = \frac{f}{x}.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadaného zobrazení!

5 (7 bodů) Nechť jsou funkce $\varphi(x) = \frac{6x}{2+|x|}$, resp. $\varphi(y) = y^2\mathrm{sgn}(y)$ vytvořujícími funkcemi Lebesgueových měr v osách x, resp. y. Stanovte hodnotu příslušného Lebesgueova integrálu

$$(\mathscr{L}) \int_E \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \,\mathrm{d}\mu(x,y),$$

kde $E = \langle -1; 2) \times \langle -1; 3)$. Symbol $\lfloor \cdot \rfloor$ reprezentuje dolní celou část čísla. Pozn. důraz se klade (kromě jiného) také na numerickou správnost!

6 (9 bodů)– *fyzikální úloha*
Uvažujeme těleso konstantní hustoty ϱ tvaru paraboloidu

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z}{c} \,\wedge\, 0 \leqslant z \leqslant c\right\}.$$

Vypočítejte hmotnost tělesa a poté jeho moment setrvačnosti vzhledem k rotaci kolem osy z. Výsledek upravte do tvaru nevyužívajícího hodnotu hustoty, tj. do tvaru, kde vystupují pouze parametry a, b, c a hmotnost tělesa.
Nápověda: moment setrvačnosti tělesa T se vypočítá podle vzorce

$$J = \int_T \upsilon^2(x,y,z)\,\mathrm{d}m(x,y,z) \equiv \int_T \upsilon^2(x,y,z)\,\varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

kde $\upsilon(x,y,z)$ je vzdálenost bodu (x,y,z) od osy rotace a $\varrho(x,y,z)$ je hustota.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB4

27/06/2016, 9:00-11:00

1 (10 bodů)

Transformujte parciální diferenciální rovnici

$$x^2y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - xy(y+x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (y-x)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

pro neznámou funkci $f(x,y)$ na diferenciální rovnici pro funkci $g = g(u,v)$. Transformace je zadána vztahy $u = xy$, $v = x+y$ a

$$g = \frac{f}{xy}.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadaného zobrazení!

2 (10 bodů)

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y,z) = yz + 2x(y+z)$$

zadané na množině

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x,y,z > 0 \ \wedge \ 4x^2 + y^2 + z^2 = 12\}.$$

3 (8 bodů)

Pro funkci $u = (x,y)$, jež je zadána rovnicí

$$u^3 - 3xu^2 + 9yu - x + 2y = 0,$$

vypočtěte směrovou parciální derivaci ve směru $\vec{s} = (4,3)$ v bodě $\vec{a} = (2,1)$. Nepodceňte teoretické pozadí problému!

4 (3 body)

Integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin^2(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

lze řešit derivací podle parametru a, popř. podle parametru b. Který z výsledků bude mít širší platnost a proč? Konkrétní tvar výsledku nehledejte! Odpověď lze nalézt pouze na základě analýzy předpokladů užité věty.

5 (10 bodů) – *fyzikální úloha*

Těleso tvaru pseudoeliptického paraboloidu

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} \leqslant \frac{z^2}{c^2} \ \wedge \ 0 \leqslant z \leqslant c\right\}$$

je vyplněno kapalinou, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od roviny $z = 0$. Vypočítejte polohu těžiště takového tělesa.

6 (9 bodů)

Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^4 - 16y^4}}$$

a určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály. Obor konvergence detailně načrtněte!