Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4

25/05/2017, 9:00-11:00

1 (9 bodů)

Nechť je dvojrozměrná Lebesgueova míra generována vytvořujícími funkcemi $\varphi(x) = \Theta(x)x^2$ a $\psi(y) = 7y$. Vypočtěte míru množiny

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{5/2} \leqslant \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right\}.$$

Pro volbu $a = 5, b = 9$ množinu M také načrtněte. K vykreslení použijte obrázek přiložený na samostatném papíře.

2 (9 bodů)

Parciální diferenciální rovnici

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - 4y^2 u(x, y) = 0$$

transformujte vztahy

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad w = xy + u(x, y).$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadané transformace.

3 (9 bodů)

Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem a teorie diferenciálních rovnic vypočtěte

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

4 (8 bodů)

Nechť $a > 0$. Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{(1 + a^2x^2 + y^2 + z^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

5 (8 bodů)

Vypočtěte

$$\int_H x^2y^2z\,\mathrm{d}\mu_c(x, y, z),$$

kde

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2 \,\wedge\, z > 0 \,\wedge\, x = y\right\}.$$

6 (7 bodů)

Nechť je funkce $f(x, y)$ zadána předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + 2x - 7y & \ldots \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \ldots \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nechť $\vec{s} = (1, 2)$. Vypočtěte

$$\frac{1}{||\vec{s}||}\left\langle \vec{s}\,|\,\mathrm{grad}(f)(0, 0)\right\rangle$$

a poté parciální derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě $(0, 0)$. Diskutujte vztah obou vypočtených čísel. Vyvoďte relevantní závěry.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4

30/05/2017, 9:00-11:00

1 (10 bodů)
Vypočítejte plošný integrál

$$\int_S (x;y;z)\,\mathrm{d}\mu_S(x,y,z),$$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : z > 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

Parametrizazi plochy založte na cylindrických souřadnicích. Odlišná parametrizace se považuje za nepřípustné odchýlení od zadání.

2 (11 bodů)
Do čtvrtelipsy

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : x,y \geqslant 0 \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$

vepište obdélník maximálního obsahu. Jaké jsou jeho vrcholy? Vytvořujícími funkcemi míry nechť jsou funkce $\varphi(x) = \Theta(x)\sqrt{x}$, $\psi(y) = \Theta(y)y^2$. Kolik procent plochy tento maximální obdélník ve čtvrtelipse zabírá?

3 (10 bodů)
V některých bodech prvního hexadekantu $\{(x,y,z,u) \in \mathbf{E}^4 : \ x,y,z,u \geqslant 0\}$ zadává rovnice

$$u^3 + 12yu + 3xy^2 + 6z^2 + 74 = 35u + 12x + 15y^2$$

implicitní funkci $u = u(x,y,z)$. Stanovte kde a poté rozhodněte, zda má takto zadaná funkce alespoň jeden sedlový bod. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

4 (11 bodů)
Stanovte minimalistické požadavky na funkci $\varphi(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ nutné pro vyčíslení limity

$$\lim_{\sigma \to 0_+} \int_{\mathbf{R}} \frac{(x-\mu)^4}{\sigma^5} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako první krok výpočtu zvolte a proveďte vhodnou substituci. Její tvar přizpůsobte tak, aby po jejím provedení bylo možno zaměnit limitu a integrál. Pro finální vyčíslení výsledku užijte faktu, že $\varphi(\mu) = 4\sqrt{\pi}$.

5 (8 bodů)
Jakou hodnotou je nutno dodefinovat funkci

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-\sqrt{2})^2}{4-x^2-y^2} & \ldots \quad x^2 + y^2 \neq 4, \\ ? & \ldots \quad x^2 + y^2 = 4, \end{cases}$$

na kružnici $x^2 + y^2 = 4$ tak, aby tato funkce byla v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ spojitá vzhledem k tečně uvedené kružnice zkonstruované právě v bodě $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB4

05/06/2017, 9:00-11:00

1 (12 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = -4x(x - y) - 4y(y - z) - 4z(z - x)$.

2 (9 bodů)
Kolik procent plochy definičního oboru funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

zabírá plocha množiny $f^{-1}(X)$, kde $X = (-\infty, \frac{2\sqrt{2}}{3})$? Vytvořujícími funkcemi míry nechť jsou funkce $\varphi(x) = 5x$ a $\psi(y) = y|y|$.

3 (12 bodů)
Vypočítejte

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-2ax} - 2\mathrm{e}^{-(a+b)x} + \mathrm{e}^{-2bx}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad (a, b > 0).$$

4 (10 bodů)
Integrujte funkci $g(x, y, z) = (xyz)^2 \mathrm{e}^{-z^2}$ přes množinu

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/3} + \left(\frac{y^2}{a^2}\right)^{1/3} = 1\right\}.$$

5 (7 bodů)
Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3(y+2)^2 x^4}{(y+2)^4 + 5x^8} & \ldots \quad (x, y) \neq (0, -2), \\ \frac{4}{7} & \ldots \quad (x, y) = (0, -2), \end{cases}$$

je spojitá v bodě $(0, -2)$ vzhledem k jistým množinám

$$M_{\alpha\beta} = \{(x, y) \in \mathbf{E}^2 : \ y = \alpha x^n + \beta\}.$$

Najděte nejprve vhodné $n \in \mathbf{N}$ a poté všechny dvojice $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ vyhovující zadání.

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB4

21/06/2017, 9:00-11:00

1 (11 bodů)
Vypočítejte integrál

$$\int_W \frac{xyz^2}{1+z^4}\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

kde

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \; x,y,z > 0 \;\wedge\; \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 < \frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right\}.$$

2 (8 bodů)
Jaký je podíl plochy útvaru

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \; x,y \geqslant 0 \;\wedge\; \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4} \leqslant 1\right\}$$

ku ploše obdélníku $O = \langle 0,a\rangle \times \langle 0,b\rangle$ při volbě vytvořující funkce $\varphi(\tau) = \tau^4\Theta(\tau)$? Situaci pro přehlednost nakreslete do obrázku.

3 (7 bodů)
Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y) = xy^2$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : \; 16x^2 + y^4 \leqslant 32\}$.

4 (11 bodů)
Pro funkci $z = z(x,y)$ zadanou na okolí bodu $(1,-1,1)$ implicitně rovnicí $z^3+2yz+x = 0$ nalezněte kvadratickou plochu, která ji taylorovsky aproximuje. O jaký typ kvadratické plochy (kvadriky) se jedná?

5 (13 bodů)
Nechť $a,b,c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Parciální diferenciální rovnici

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 4by\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

převeďte do proměnných ϱ, φ, h, jež jsou zadány rovnostmi

$$x = a\varrho\cos(\varphi),$$

$$y = bh^2,$$

$$z = c\varrho\sin(\varphi).$$

Stanovte také maximální množinu regularity zadaného zobrazení tak, aby toto zobrazení bylo navíc prosté.

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB4

27/06/2017, 9:00-11:00

1 (12 bodů)
Nechť je dána funkce $F(x,y,z,u) \in \mathscr{C}^2(\mathbf{E}^4)$ a bod $\vec{\lambda} = (1,1,1,1)$, pro který $F(\vec{\lambda}) = 0$. Nechť dále $\operatorname{grad} F(\vec{\lambda}) = (3,3,3,3)$ a Hessova matice funkce $F(x,y,z,u)$ v bodě $\vec{\lambda}$ má všechny prvky jednotkové. Nechť

$$F(x,y,z,u) = 0, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

jsou rovnice generující dvě implicitní funkce $u = u(x,z)$ a $y = y(x,z)$. Ověřte, že dané předpoklady garantují existenci takové dvojice implicitních funkcí a vypočítejte

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(1,1).$$

Numerické chyby v tomto příkladě se netolerují.

2 (9 bodů)
Prověřte, zda má funkce

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} - 4y + 3 & \dots \quad |x| \neq |y|, \\ 3\mathrm{e}^x \mathrm{e}^y & \dots \quad |x| = |y|, \end{cases}$$

v bodě $(0,0)$ *a)* derivaci, *b)* totální diferenciál, *c)* směrovou derivaci ve směru $\vec{s} = (2,1)$ a *d)* směrovou derivaci ve směru $\vec{r} = (1,1)$.

3 (10 bodů)
Integrujte funkci $u(x,y,z) = x^2 y^2$ přes množinu

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1 \ \wedge \ x + y + z = 7\right\}.$$

4 (9 bodů)
Aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem vypočítejte integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2n} \mathrm{e}^{-a(x-\mu)^2} \, \mathrm{d}x$$

pro všechna $\mu \in \mathbf{R}$, $a > 0$ a $n \in \mathbf{N}_0$. Rozvažte nejprve, jak vám citovaná věta může být nápomocná. Výsledek nakonec upravte do kompaktního tvaru.

5 (10 bodů)
Vypočítejte hodnotu abstraktního Lebesgueova integrálu $\int_{\mathbf{R}} \lceil x \rceil \, \mathrm{d}\mu(x)$, je-li míra generována funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0; \\ 3 + x^2 & x \in (0,4\rangle; \\ 24 & x > 4. \end{cases}$$

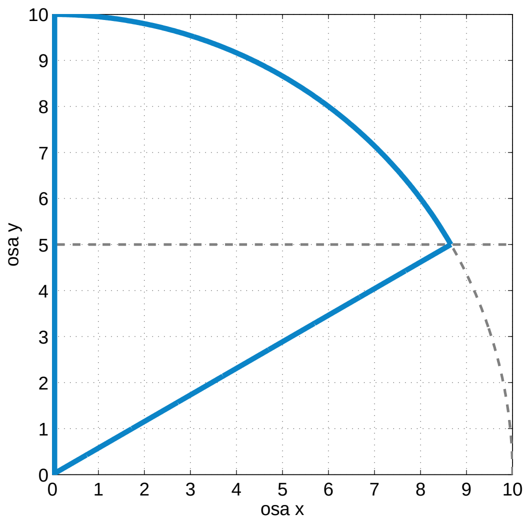
Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 6 z předmětu 01MAB4

04/09/2017, 9:00-11:00

1 (9 bodů)

Vypočítejte křivkový integrál z funkčního vektoru $\vec{G}(x,y) = (2y^3, 30xy^2)$ po modré křivce z obrázku probíhané proti směru hodinových ručiček.



2 (8 bodů)

Vypočítejte hodnotu abstraktního Lebesgueova integrálu $\int_{\langle 1,2\rangle} \lfloor x \rfloor \, \mathrm{d}\mu(x)$, je-li míra generována funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & x \leqslant 1, \\ x^2 + 3 & x \in (1,2\rangle, \\ 14 & x > 2. \end{cases}$$

V této úloze se boduje také "argumentační hloubka,"tj. neomezte se při řešení pouze na povrchní výpočet.

3 (10 bodů)

Vypočítejte objem tělesa $T = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{E}^3 \,:\, x,y,z > 0 \,\wedge\, \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3 \leqslant \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \,\wedge\, 0 < z < xy\right\}$.

4 (10 bodů)

Nalezněte směr $\vec{s}$ (s celočíselnými složkami), v němž je směrová derivace funkce $z = z(x,y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ nulová. Funkce $z = z(x,y)$ nechť je zadána implicitně rovnicí

$$z^3 - 9y^2 + 2xz + 5 = 0.$$

Komentujte, jakých teoretických poznatků užíváte!

5 (13 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici

$$x^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x^3 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (xy)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 u(x,y)$$

užitím substitučních vztahů

$$r = \frac{y}{x}, \quad s = \frac{x^2}{y}.$$

Neopomeňte stanovit maximální množinu regularity zadané transformace.