Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 1 z předmětu 01MAB4

29/05/2018, 9:00-11:00

1 (8 bodů)

Pro parametry $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2} \frac{\cos(bx^2) - 1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Užijte větu o derivaci integrálu s parametrem. Splnění předpokladu o měřitelnosti nezdůvodňujte!

2 (5 bodů)

Nalezněte směr $\vec{s} \in \mathbf{E}^r$, v němž graf funkce $g(x) \in \mathscr{C}^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ stoupá v bodě $\vec{a}$ nejstrměji. Proč je výhodné předpokládat, že funkce leží v $\mathscr{C}^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$? Úlohu řešte obecně teoreticky a užitý postup vhodně komentujte!

3 (10 bodů)

Řešte parciální diferenciální rovnici

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Užijte k tomu substituci

$$r = x^2 + y^2, \quad s = xy.$$

4 (9 bodů)

Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x, y, z) = xyz$ na množině $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \ xy + 2(xz + yz) = 300\}$.

5 (9 bodů)

Nechť je vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \begin{cases} \Theta(x)x^2 & \dots \quad x \leqslant 2; \\ 3(x+1) & \dots \quad x > 2; \end{cases}$$

zadána jednodimenzionální míra $\mu(X)$. Podle definice Lebesgueovy míry vypočítejte $\mu(\{\sqrt{2}\})$ a $\mu(\{2\})$. Dále pak určete hodnotu integrálu

$$\int_{\langle 1,2 \rangle} \lfloor x^2 \rfloor \, \mathrm{d}\mu(x).$$

6 (9 bodů)

Vypočtěte y–ovou souřadnici těžiště tělesa

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} \leqslant \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \ \wedge \ x, y, z \geqslant 0\right\}.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 2 z předmětu 01MAB4

05/06/2018, 9:00-11:00

1 (9 bodů)
Vypočítejte obsah a z–ovou souřadnici těžiště plochy

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \ \wedge \ z > 2\right\}.$$

2 (10 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $g(x, y, z) = xy^2z^2$ na množině

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : \ x, y, z > 0 \ \wedge \ \frac{x^2}{4} + y^4 + \frac{z^4}{16} = 3\right\}.$$

3 (7 bodů)
Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} y^{2\frac{x+y}{x^2+y^2}} & \dots \quad (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \dots \quad (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

rozhodněte, zda existuje její totální diferenciál v bodě $(0, 0)$.

4 (9 bodů)
Rozviňte funkci

$$g(x, y) = \arcsin(x + y^2)$$

do Maclaurinovy řady. Výsledek upravte do tvaru řady s dvojitou sumou a dvojnými faktoriály. Jaký je výsledný obor konvergence? Pečlivě ho načrtněte do obrázku!

5 (5 bodů)
Podle definice ukažte, že funkce $g(x) = x$ je λ–měřitelná.

6 (10 bodů)
Nechť $a, b, c > 0$. Vypočtěte klasickou Lebesgueovu míru $\lambda_3(Y)$ množiny

$$Y = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x, y > 0 \ \wedge \ \left(\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}\right)^{7/2} \leqslant \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 - \frac{z^4}{c^4}\right\}.$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB4

12/06/2018, 9:00-11:00

1 (7 bodů)
Pro bazén tvaru kvádru je k dispozici $48m^2$ obkladacích dlaždic. Jak je nutno zvolit rozměry kvádru, aby měl bazén největší možný objem?

2 (10 bodů)
Nechť $a > 0$. Vypočítejte $\int_A xy \, \mathrm{d}\mu_c(x, y)$, kde

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y > 0\right\}.$$

3 (10 bodů)
Pro parametry $\alpha, \beta \geqslant 1$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + \beta^2) - \ln(x^2 + 1)}{x^2 + \alpha^2} \, \mathrm{d}x.$$

4 (5 bodů)
Kruh $(x - 6y + 1)^2 + (3y - x - 2)^2 \leqslant a^2$ má obsah rovný třem. Čemu se rovná a?

5 (10 bodů)
Výraz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

převeďte do souřadnic r, s zavedených vztahy

$$x = r\cos^2(s), \quad y = r\sin^2(s).$$

6 (8 bodů)
Ve kterých bodech je tečná rovina k ploše

$$x^2 - 4xy + 2xz + 5y^2 - 8yz + 2y + 6z^2 + 4 = 0$$

rovnoběžná s rovinou $z = 777$?

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 4 z předmětu 01MAB4

26/06/2018, 9:00-11:00

1 (9 bodů)

Nechť $a, b, v > 0$ jsou pevné kladné hodnoty. Vypočítejte integrál

$$\int_D \left(\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4}\right) \mathrm{d}(x, y, z)$$

přes množinu

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} - 2z < 0 \ \wedge\ \frac{x}{a} > \frac{y}{b} > 0 \ \wedge\ 0 < z < v\right\}.$$

2 (9 bodů)

Pro funkci

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} - 4y + 2 & \ldots \quad |x| \neq |y|, \\ 2\mathrm{e}^{x+6y} & \ldots \quad |x| = |y|, \end{cases}$$

vypočítejte směrovou derivaci ve směru $\vec{s} = (1, 1)$ v bodě $(0, 0)$ a hodnotu $\frac{\langle \vec{s} | \operatorname{grad} g(0,0)\rangle}{\|\vec{s}\|}$ a diskutujte vztah mezi oběma výsledky. Jaký fakt z něho vyplývá?

3 (4 body)

Nechť $A \subset \mathbf{R}$ je lebesgueovsky NEměřitelná množina. Nechť

$$h(x) = \begin{cases} 3 & \ldots \quad x \in A, \\ -3 & \ldots \quad x \in \mathbf{R} \setminus A. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda jsou funkce $h(x)$ a $|h(x)|$ měřitelné.

4 (8 bodů)

Nechť $a, b, c > 0$ jsou pevné kladné hodnoty. Pro bikubickou plochu

$$\frac{x^4}{a^4} - \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1$$

nalezněte univerzální tvar tečné roviny v jejím bodě (x_0, y_0, z_0). Výsledek upravte do elegantního tvaru inspirovaného známými středoškolskými tvary tečných přímek ke kuželosečkám (viz stránka vložená do zadání).

5 (10 bodů)

Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = \sin(2x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(2z)$$

na množině

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{E}^3 : 4x + 2y + 4z = \pi \ \wedge\ x > 0 \ \wedge\ y > 0 \ \wedge\ z > 0\right\}.$$

6 (10 bodů)

Pro parametry $\alpha, \beta > 0$ vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) - \operatorname{arctg}(2x)}{x\,(1 + \beta^2 x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	CELKEM

Zkoušková písemná práce č. 5 z předmětu 01MAB4

04/09/2018, 9:00-11:00

1 (9 bodů)
Vyšetřete lokální extrémy funkce $u(x,y)$ zadané implicitně rovnicí

$$-4u^3 + y(2u^2 + x + 4) - x = 2.$$

2 (7 bodů)
Rozhodněte, má-li funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} + 3x + 2; & (x,y) \neq (0,0); \\ 2; & (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

totální diferenciál v počátku.

3 (9 bodů)
Nechť je vytvořující funkcí $\varphi(\tau) = \tau^3$ zadána dvoudimenzionální míra $\mu(X)$. Vypočítejte

$$\int_{x^2+y^2<3} \lfloor x^2 + y^2 \rfloor \, \mathrm{d}\mu(x,y).$$

4 (4 body)
V integrálu

$$\int_{-1}^{2} \int_{4x^2}^{4x+8} f(x,y) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

invertujte integrační pořadí.

5 (9 bodů)
Nechť $a, c > 0$ jsou pevně zvolené parametry. Vypočtěte integrál

$$\int_A |z| \cdot (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}(x,y,z),$$

kde

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{E}^3 : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^4}{c^4} \leqslant 1 \right\}.$$

6 (12 bodů)
Řešte parciální diferenciální rovnici

$$3x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Užijte transformačních vztahů

$$r = x\,\mathrm{e}^{-y}, \qquad s = x\,\mathrm{e}^{3y}.$$

Zapište také maximální množinu regularity zadané transformace.