Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	Př. č. 1	Př. č. 2	Př. č. 3	Př. č. 4	Př. č. 5	Př. č. 6	Bonus	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MDS – varianta 01

úterý 11. června 2013, 8:30–10:30

1 (6 bodů)
Nechť je závislost průměrné rychlosti makroskopického dopravního modelu popsána Gaussovou exponenciální funkcí tak, že maximální rychlost je $130\,km/hod$ a při hustotě $\varrho_{\text{jam}} = 80\,voz/km$ je průměrná rychlost vozidel $130\mathrm{e}^{-8}\,km/hod \approx 0.04\,km/hod$ (tedy prakticky nulová). Vypočtěte, jaký je maximální tok v systému a při jaké hustotě provozu nastává.

2 (10 bodů)
Nechť $\wp(r)$, resp. $q(v)$ jsou hustoty pravděpodobnosti pro vzdálenost, resp. rychlost vozidel v dopravním vzorku. Odvoďte hustotu pravděpodobnosti pro časový odstup vozidel. Jaký předpoklad je třeba při výpočtu použít? Výsledek aproximujte za použití Taylorova rozvoje vhodné funkce a užitím předpokladu, že rychlost v je gaussovsky rozdělena. Velikosti centrálních momentů normálního rozdělení odvoďte aplikací věty o derivaci integrálu s parametrem.

3 (10 bodů)
Nechť je dán jednorozměrný soubor částic, jejichž vzájemná vzdálenost je popsána hustotou pravděpodobnosti

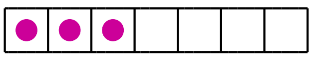
$$\wp(x) = 4\Theta(x)x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Dokažte, že příslušná shluková funkce $R(x)$ konverguje na každém $\langle 0, \mathrm{L}\rangle$ stejnoměrně. Nalezněte také její součet.

4 (8 bodů)
Nechť je zadán totálně asymetrický proces s jednoduchým vyloučením na jednorozměrné mřížce čítající sedm buněk. Nechť jsou pravděpodobnostní parametry zvoleny takto:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{5}.$$

Jaká je pravděpodobnost konfigurace z obrázku, je-li analyzována v ustáleném stavu systému?



Užijte faktu, že hodnota partiční sumy uvedeného systému je popsána vztahem

$$Z_N \approx \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}(2\beta - 1)} \frac{4^N}{\sqrt{N}}.$$

5 (6 bodů)
Jaká je vazba mezi závislostí inverzní teploty β na hustotě provozu ϱ a tzv. fundamentální závislostí $J = J(\varrho)$? Oba grafy načrtněte a vysvětlete vzájemný vztah.

6 (8 bodů)
Pomocí Poissonova rozdělení (pro počet částic v intervalu délky L) odvoďte spektrální rigiditu $\Delta(L)$ pro soubor nezávislých nekorelovaných částic, jejichž střední hodnota vzdálenosti je jednotková. Výpočty součtů nekonečných řad provádějte standardními metodami teorie mocninných řad.

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								celkem
Příjmení a jméno	Př. č. 1	Př. č. 2	Př. č. 3	Př. č. 4	Př. č. 5	Př. č. 6	Bonus	
							2+	

Zkoušková písemná práce z předmětu 01MDS – varianta 02

25. července 2013, 8:30–10:30

1 (8 bodů)
Na základě makroskopického popisu odvoďte nelineární Burgesovu diferenciální rovnici pro dopravní proud.

2 (10 bodů)
Z definice spektrální rigidity $\Delta(L)$ odvoďte vztah

$$\Delta(L) = 2\int_0^L (R * R)(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^L R(x)\,\mathrm{d}x \left(1 - \int_0^L R(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

kde $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)$ je tzv. shluková funkce.

3 (6 bodů)
Pro Macdonaldovu funkci $\mathcal{K}_1(x)$ vyhovující modifikované Besselově rovnici

$$x^2y'' + xy' - (x^2+1)y = 0$$

odvoďte za pomocí substituce $z(x) = x\mathrm{e}^x\mathcal{K}_1(x)$ aproximaci pro malá nezáporná x. Užijte faktu, že je-li $y(x)$ uvažovaná Macdonaldova funkce, pak substituovaná funkce splňuje podmínky $z(0) = z'(0) = 1$ a $x \cdot z''(x)|_{x=0} = 0$.

4 (6 bodů)
V roce 1971 navrhl L.A. Pipes popsat závislost průměrné rychlosti dopravního vzorku na hustotě provozu vztahem

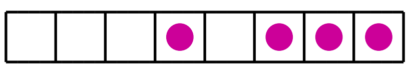
$$v = v_{\mathrm{F}}\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{J}}}\right)^3.$$

Při jaké hustotě nastává v tomto modelu maximální tok? A kolik vozidel projede daným místem (při vypočtené optimální hustotě) za 10 minut? Volte $v_{\mathrm{F}} = 128\,km/h$ a $\varrho_{\mathrm{J}} = 80 km^{-1}$.

5 (8 bodů)
Nechť je zadán totálně asymetrický proces s jednoduchým vyloučením na jednorozměrné mřížce čítající osm buněk. Nechť jsou pravděpodobnostní parametry zvoleny takto:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{5}.$$

Jaká je pravděpodobnost konfigurace z obrázku, je-li analyzována v ustáleném stavu systému?



Užijte faktu, že hodnota partiční sumy uvedeného systému je popsána vztahem

$$Z_N \approx \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}(2\beta-1)}\frac{4^N}{\sqrt{N}}.$$

6 (10 bodů)
Odvoďte hustotu pravděpodobnosti pro vzdálenost sousedních částic v termodynamickém dopravním modelu s logaritmickou repulzí a hodnotou inverzní teploty β. Neužívejte žádných aproximací! Výsledek poté zjednodušte za předpokladu velkého počtu částic na kruhu.