

Chyby ve skriptech

"M. Krbálek: *Úlohy matematické fyziky*,
Česká technika - vydavatelství ČVUT, 2012"

- pro řadu funkcí konvergující podle normy budeme užívat symbolu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}) = s(x)$
- strana 18, důkaz věty 1.3.11 oprava na: je-li tedy $\|f\|_{\sigma} = \alpha$, pak pro jakékoliv $\lambda \in \mathbf{R}$ platí, že

$$\|\lambda \cdot f\|_{\sigma} = \max_{\vec{x} \in G} |\lambda \cdot f(\vec{x})| = |\lambda| \cdot \max_{\vec{x} \in G} |f(\vec{x})| = |\lambda| \|f\|_{\sigma} = |\lambda| \alpha,$$

což potvrzuje homogenitu normy

- strana 21, definice 1.3.30 oprava Legendreovy váhy na: $w(x) = \Theta(x-a)\Theta(b-x)$,
- strana 28, poznámka 1.4.21 – inkluze má být tvaru $\mathbb{L}_2(G) \subset \mathbb{L}_1(G)$ a navíc je třeba požadovat, aby $\mu(G) < +\infty$
- strana 28, změna definice 1.5.3 na: "Nechť je dán vektorový prostor \mathcal{V} . Řekneme, že soubor funkcí (vektorů) $S = \{f_{\ell}(\vec{x}) \in \mathcal{V} : \ell \in N\}$, kde $N \subset \mathbf{N}$, je *maximálním souborem lineárně nezávislých funkcí* ve \mathcal{V} , pokud
 1. $\sum_{\ell \in N} c_{\ell} f_{\ell}(\vec{x}) = o(\vec{x}) \Leftrightarrow \vec{c} = \vec{0}$ a
 2. pro každé $g(\vec{x}) \in \mathcal{V} \setminus S$ je rozšířený soubor funkcí (vektorů) $R = S \cup \{g(\vec{x})\}$ lineárně závislý."
- strana 29, v Besselově nerovnosti 1.5.4 má být $a_k := \langle g|f_k \rangle$.
- strana 29, věta 1.5.6:

Nechť $S = \{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}), \dots\}$ je ortonormální množina v Hilbertově prostoru \mathcal{H} .
Nechť je funkce $g(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ zvolena libovolně. Označme $a_k = \langle g|f_k \rangle$. Pak existuje limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{norm} \sum_{k=1}^n a_k f_k(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) =: h(\vec{x}) \in \mathcal{H}.$$

Navíc pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí $\langle g - h|f_k \rangle = 0$.

Důkaz:

- pro funkci $h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^n a_k f_k(\vec{x})$ platí jednoduchá rovnost

$$\|h_{n+p}(\vec{x}) - h_n(\vec{x})\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k f_k(\vec{x}) \right\|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2, \quad (1)$$

kde bylo využito kolmosti a normality funkcí v systému S

- z Besselovy nerovnosti plyne, že pro jakékoli $n \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \|g(\vec{x})\|^2$
- protože $\sum_{k=1}^n |a_k|^2$ je řadou s nezápornými členy a je omezená, jistě také konverguje
- proto ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro indexy $n > n_0$ a $p \in \mathbf{N}$ je $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 < \varepsilon^2$
- z nerovnosti (1) pak lehce vyvodíme, že posloupnost $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská
- a protože \mathcal{H} je prostorem Hilbertovým, je $(h_n(\vec{x}))_{n=1}^{\infty}$ rovněž konvergentní (ve smyslu normy)
- existuje tudíž $h(\vec{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(\vec{x}) \in \mathcal{H}$
- pro pevné $k \in \mathbf{N}$ a $n > k$ je zřejmé $\langle g - h_n|f_k \rangle = 0$
- uijeme-li v předešlém vztahu limitní přechod $n \rightarrow \infty$ a aplikujeme-li větu ??, plyne odsud, že $\langle g - h|f_k \rangle = 0$ pro všechny $k \in \mathbf{N}$

- strana **33**, v Parsevalově rovnosti **1.6.5** má být

$$\|g(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \quad (2)$$

- strana **45**, věta **1.7.20** oprava: chybí předpoklad o hermitovskosti operátoru
- strana **46**, definice **1.7.25** oprava:

Řekneme, že lineární operátor $\widehat{L} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ má *čistě bodové spektrum*, jestliže

- je hermiteovský,
- množina jeho vlastních hodnot je spočetná,
- geometrická násobnost každého vlastního čísla je konečná a
- každou funkci Hilbertova prostoru \mathcal{H} lze vyjádřit jako lineární kombinaci vlastních funkcí operátoru \widehat{L} ."

- strana **101**, vložit důsledek **3.5.5a**:

Nechť \widehat{K} je Volterrov integrální operátor definovaný na $G = (0, a)$ a M je jeho mez. Pak pro každé $\ell \in \mathbf{N}_0$ a každou funkci $f(x) \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle)$ platí

$$\|\widehat{K}^\ell(f)\|_\sigma \leq \frac{(Ma)^\ell}{\ell!} \|f\|_\sigma.$$

- strana **56,57**, příklad **1.9.13** oprava: integrál $\int_0^\infty \frac{\sin(bx)}{x} dx$ je nutno počítat jako riemannovský, neboť tvrzení o lebesgueovské majorantě neplatí
- strana **102**, oprava konce důkazu věty **3.5.6**:

- zbývá dokázat, že vztah (3.13) definuje řešení, jež je jedinečné
- to je ekvivalentní důkazu, že homogenní rovnice $\varphi = \mu \widehat{K}(\varphi)$ (kdy tedy $f(x) = 0$, potažmo $\|f\|_\sigma = 0$) má pouze jediné řešení
- zřejmě platí: $\|\varphi\|_\sigma = |\mu| \cdot \|\widehat{K}(\varphi)\|_\sigma$, potažmo

$$\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\|_\sigma = \frac{1}{|\mu|^\ell} \|\varphi\|_\sigma,$$

- z důsledku **3.5.5a** ale zároveň plyne, že

$$\|\widehat{K}^\ell(\varphi)\|_\sigma \leq \frac{(Ma)^\ell}{\ell!} \|\varphi\|_\sigma$$

- společně tedy

$$\|\varphi\|_\sigma \leq |\mu|^\ell \frac{(Ma)^\ell}{\ell!} \|\varphi\|_\sigma \quad (3)$$

- protože ale pro všechna $\mu \in \mathbf{C}$

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} |\mu|^\ell \frac{(Ma)^\ell}{\ell!} = 0,$$

je naplnění nerovnosti (3) pro všechna $\ell \in \mathbf{N}$ možné jediné tehdy, pokud $\|\varphi\|_\sigma = 0$, což implikuje skutečnost, že $\varphi(\vec{x}) = o(\vec{x})$

- strana **115**, oprava vzorce:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \underbrace{\left(a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \underbrace{\left(a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \tilde{\Phi}(\text{gradu}, u(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

- odvození ze strany **115** je předvedeno pouze pro hyperbolickou rovnici
- dodatek k normalizaci parabolické PD-rovnice za konec strany **115**: Pro převod rovnice

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad } u, u(x, y)) = f(x, y)$$

do normálního tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \underbrace{\left(a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \underbrace{\left(a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right)}_{=0} + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \underbrace{\left(2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)}_{=0} + \tilde{\Phi}(\text{gradu}, u(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

užijeme jeden transformační vztah $\xi = \xi(x, y)$ odvozený z řešení rovnice

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\lambda(x, y) = \frac{b(x, y)}{2a(x, y)} \quad (4)$$

a druhý volíme libovolně, nejčastěji však v nejjednodušší možné verzi, a sice $\eta(x, y) = x$. Pro uvedenou transformaci platí, že

$$\begin{aligned} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 &= 0, \\ a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= a(x, y), \end{aligned}$$

ale také

$$2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0,$$

neboť

$$2a \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Poslední rovnost plyne ze skutečnosti, že transformační vztah $\xi = \xi(\eta)$ splňuje díky formuli (4) rovnost

$$2a(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial x} = -b(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial y}.$$

Normálním tvarem parabolické PDE je tudíž očekávaný tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a(x, y)} \tilde{\Phi}(\text{gradu}, u(\xi, \eta)) = \frac{1}{a(x, y)} \tilde{f}(\xi, \eta).$$

- dodatek k normalizaci eliptické PDE za konec strany **115**:

Ukážeme, že transformační vztahy

$$\alpha(x, y) := \frac{\xi(x, y) + \eta(x, y)}{2} = \text{Re}(\xi(x, y)),$$

$$\beta(x, y) := \frac{\xi(x, y) - \eta(x, y)}{2i} = \text{Im}(\xi(x, y)),$$

kde komplexně sdružené funkce $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ byly získány řešením rovnic

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y}} = \lambda_1(x, y) \quad \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}}{\frac{\partial \eta}{\partial y}} = \lambda_2(x, y) = \lambda_1^*(x, y),$$

převědou eliptickou rovnici

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi(\text{grad } u, u(x, y)) = f(x, y)$$

do normálního tvaru. Transformovaná rovnice bude jistě tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \left(a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \left(a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} \underbrace{\left(2a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + b \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)}_{=0} + \tilde{\Phi}(\text{grad } u, u(\alpha, \beta)) = \tilde{f}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

To, že smížený člen označený vodorovnou závorkou vymizí, nyní dokážeme:

$$\begin{aligned} & 2a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + b \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} + 2c \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} = \\ & \frac{a}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{b}{2i} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ & = \frac{a}{2i} \left(\lambda_1^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \lambda_2^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{b}{2i} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{2i} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) = \\ & \frac{1}{2i} (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2i} (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

neboť $\lambda_{1,2}$ jsou kořeny asociované kvadratické rovnice. Zbývá ještě dokázat, že koeficienty

$$\mathcal{K}_1(x, y) := a \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2$$

a

$$\mathcal{K}_2(x, y) := a \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + c \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2$$

jsou po aplikaci navržené substituce totožné. Snadno

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(x, y) &= \frac{a}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{b}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{a}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{b}{4} \left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} (a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} (2\lambda_1\lambda_2 a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + 2c) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= -\frac{d(x, y)}{4a(x, y)} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \end{aligned}$$

kde bylo využito vztahů pro kořeny kvadratické rovnice

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{a}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}.$$

Analogicky:

$$\mathcal{K}_2(x, y) = -\frac{a}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - \frac{b}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{c}{4} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a}{4}\left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 - \frac{b}{4}\left(\lambda_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \lambda_2 \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) - \frac{c}{4}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \\
&= -\frac{1}{4}(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{4}(a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}(2\lambda_1\lambda_2 a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + 2c)\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
&= -\frac{d(x, y)}{4a(x, y)}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \mathcal{K}_1(x, y)
\end{aligned}$$

Eliptická ODE se tedy transformuje do tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\mathcal{K}_1(x, y)}\tilde{\Phi}(\text{grad}u, u(\alpha, \beta)) = \frac{1}{\mathcal{K}_1(x, y)}\tilde{f}(\alpha, \beta)$$

- strana **137**, věta **5.2.12** je ekvivalencí
- strana **153**, definice **5.4.6** správně: Nechť $G \subset \mathbf{E}^r$ je libovolná otevřená množina. Třidu všech lineárních a spojitých funkcionalů s definičním oborem $\mathcal{D}(G)$ označíme symbolem $\mathcal{S}'(G)$. Symbolem $\mathcal{S}'_+(\mathbf{E}^r)$ označíme *třidu zobecněných funkcí s pozitivním nosičem*, tj. takových distribucí, jejichž nosič je podmnožinou množiny $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \dots \times \mathbf{R}^+$.
- strana **180**, ve větě **6.1.6** chybí předpoklad o funkci $f(t)$. Musí být exponenciálního růstu!
- strana **187**, oprava znění věty **6.2.10**:
Nechť $f(t), g(t) \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$. Označme $F(p) = \mathfrak{L}[f(t)]$ a $G(p) = \mathfrak{L}[g(t)]$. Nechť $f(t)G(t) \in \mathcal{L}(0, \infty)$ nebo $f(t)G(t) \in \mathcal{R}(0, \infty)$. Potom platí

$$(\mathcal{L}/\mathcal{R}) \int_0^\infty f(t)G(t) dt = (\mathcal{L}/\mathcal{R}) \int_0^\infty F(t)g(t) dt.$$

- strana **198**, vložit větu (tzv. **Riemannovo-Lebesgueovo lemma**):
Nechť $f(x) \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$. Pak

$$F(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{i\xi x} dx$$

existuje pro všechna $\xi \in \mathbf{R}$ a platí rovnost $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} F(\xi) = 0$.

- strana **248**, věta **8.1.19** má být tvrzením o lineárním obalu systému B , nikoliv tedy pouze o systému B