Úvod do pravděpodobnosti 01UP2

Motivace a úvod do problematiky

Základní informace k předmětu

VYUČUJÍCÍ

- **Mgr. Michaela Krbálková, Ph.D.**

  michaela.krbalkova@upce.cz

  michaela.krbalkova@fjfi.cvut.cz

- Prof. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.

  milan.krbalek@fjfi.cvut.cz

- podrobné informace:

www.krbalek.cz – for students – 01UP2

STUDIJNÍ PODKLADY

- M. Krbálek a M. Krbálková, *Základy teorie náhodných proměnných a metod pro statistické odhadování*
  - (skripta v průběžné přípravě)
- J. Reif a Z. Kobera, *Úvod do pravděpodobnosti a spolehlivosti*, Západočeská univerzita v Plzni, 2006
- K. Zvára a J. Štěpán, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress 2012

Požadavky na zápočet a zkoušku

ZÁPOČET

→ zisk bodů

- 2 zápočtové testy během semestru
- oba testy maximálně 30 bodů
- aktivita na semináři (až +10 bodů)
- tolerovány 2 absence
- každá další absence -2 body

→ bodové hranice

- **≥ 30 bodů ANO**
- **< 20 bodů NE**
- 20 ≥ x < 30 opravná písemná práce

ZKOUŠKA

→ hodnocení písemné části zkoušky:

- **E** po opravné písemce
- **D** 30-37 bodů, **C** 38-45 bodů
- **B** 46-53 bodů, **A** ≥ 54 bodů

→ **celkové hodnocení zkoušky**:

- V případě, že student neabsolvuje dobrovolnou ústní část, obdrží hodnocení podle písemné části zkoušky, ale ne lepší než **C**.
- Pro zisk hodnocení **A** a **B** je třeba se zúčastnit ústní části zkoušky.

Číslo semináře	Datum	Náplň semináře
1	17. února	Pravděpodobnost jako množinová míra
2	24. února	Pravděpodobnost jako množinová míra
3	3. března	Distribuční funkce a pravděpodobnosti typických množin
4	10. března	Diskrétní náhodné proměnné
5	17. března	Diskrétní náhodné proměnné
6	24. března	Absolutně spojité náhodné proměnné
7	31. března	Absolutně spojité náhodné proměnné
8	7. dubna	**1. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA**
9	14. dubna	Deskriptivní charakteristiky náhodných proměnných / Boxplot
10	21. dubna	VELIKONOCE
11	28. dubna	Afinní transformace náhodných proměnných
12	5. května	Součet náhodných proměnných
13	12. května	Odhadování experimentálních dat
14	19. května	**2. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA**

Rozvrh_seminaru_2025.xlsx

Pravděpodobnost jako množinová míra

- problematika statistického popisu systémů, které vykazují rysy náhodného uspořádání
- fyzikální, biologické, ekonomické či sociální systémy
  - radioaktivní rozpad
  - rozvoj určitého typu onemocnění
  - finanční deriváty
  - dav chodců, proud vozidel atd.
- nástroje matematické pravděpodobnosti a statistiky
- klasifikace: deterministický **X** stochastický

- **deterministický systém**

  = počáteční uspořádání elementů -> jednoznačný stav v libovolném čase *t*
  - např. pohyb tělesa ve vakuu
  - analytická předpověď: *přesný stav systému v čase t*
  - výstup: sada přesných hodnot fázových veličin (poloha, rychlost, …)

- **stochastický systém**

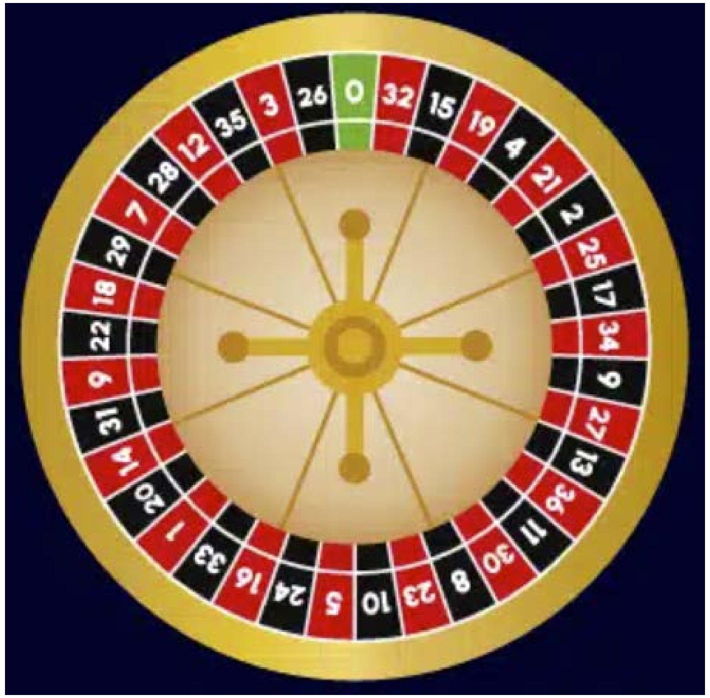
  = stav systému v čase *t* lze pouze predikovat s určitou pravděpodobností
  - rušení různými náhodnými vlivy
  - např. pohyb tělesa v reálném odporujícím prostředí
  - analytická předpověď: *pravděpodobnosti, s jakými nastanou všechny možné přípustné stavy daného systému*
  - výstup: pravděpodobnost, že sledovaná veličina nabude hodnoty z určitého intervalu

- sledovaná stavová veličina (proměnná) se označuje termínem **náhodná veličina (proměnná)** X
- určujeme, jaká je pravděpodobnost, že X nabývá hodnot z nějakého intervalu či množiny A
- symbolický zápis: $P[X \in A]$
- chceme znát její konkrétní hodnotu
- úloha ve tvaru $P[X \in A] =?$ se pak nazývá **pravděpodobnostní dotaz**
- příklad: $P[X \in \langle 131,160 \rangle] =?$, X…rychlost

ÚLOHA:

Francouzská ruleta

- 37 polí; dvě různé barvy, očíslované od 0 do 36
- různé možnosti sázek:
  - sázky na jedno číslo
  - červená nebo černá barva
  - sudá nebo lichá
  - malá čísla 1-18
  - vysoká čísla 19-36
  - třetiny



Jaké jsou příslušné pravděpodobnostní dotazy a hodnota výsledku?

Výběrový prostor

- označme E; množina všech přípustných výsledků náhodného experimentu

- jednotlivé prvky výběrového prostoru = **elementární jevy**

- **normalizace pravděpodobnosti:** $P[X \in E] = 1$

*odpovídá pojmu *množinový prezident* (teorie míry)

  - $\mathcal{B}$ soustava množin
  - *pro* $\forall A \in \mathcal{B}$: $A \subset E$
  - E ... prezident soustavy $\mathcal{B}$; nejvýše jeden

- náhodné proměnné/systémy lze klasifikovat podle počtu všech přípustných hodnot
- tj. podle mohutnosti výběrového prostoru
- tu vyjadřuje **kardinální číslo** (obecně znak $|A|$)
  - konečná množina: počet jejích prvků
  - spočetná množina: $\aleph_0$ (alef nula)
  - nespočetná množina: $\aleph_1$

diskrétní náhodné veličiny $\leftarrow$ $|\boldsymbol{E}| \leq \boldsymbol{\aleph_0}$

$|\boldsymbol{E}| = \boldsymbol{\aleph_1}$ $\rightarrow$ **spojité** náhodné veličiny

Pravděpodobnostní dotazy

› Kolik existuje pravděpodobnostních dotazů pro zvolenou n.v. X?

› souvislost s mohutností výběrového prostoru

› **příklad**: jeden hod kostkou (sudá vs. lichá čísla)

- dvouprvkový výběrový prostor $E = \{\mathrm{s}, \mathrm{l}\}$
- právě 4 dotazy:
  1) „Padne sudé číslo?“ -> $P[X = s] = P[X \in \{2,4,6\}] = ?$
  2) …
  3) …
  4) …

obecně jakýkoliv dotaz tvaru $P[X \in A] = ?$ pro libovolnou podmnožinu výběr. prostoru $A \subset E$

- počet všech podmnožin množiny E o m prvcích je roven $\mathbf{2^m}$ (viz pojem *potence množiny*)

- počet pravděpodobnostních dotazů v E je tentýž

- **jev jistý:** platí $A = E$ $\Rightarrow$ $P[X \in E] = 1$

- **jev nemožný**: platí $A = \emptyset$ $\Rightarrow$ $P[X \in \emptyset] = 0$

- **potence množiny* G:
  - soustava všech podmnožin množiny G
  - označuje se symbolem 2^G

Obecné vlastnosti pravděpodobnosti
(diskrétní náhodná veličina)

- libovolná náhodná proměnná X, výběrový prostor E
- pravděpodobnost: **zobrazení**, které množinám A z potence 2^E, kde E je výběrový prostor náhodné proměnné , přiřazuje hodnoty z intervalu $\boldsymbol{P}: \mathbf{2}^{\boldsymbol{E}} \rightarrow \langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$.
- **intuitivní základní vlastnosti:**
  - nulová pravděpodobnost pro prázdnou množinu
  - jednotková pravděpodobnost pro množinu všech přípustných stavů
  - nezápornost
  - monotónie
  - aditivita
- pravděpodobnost = normalizovaná míra (Lebesqueova teorie míry)

Obecné vlastnosti pravděpodobnosti (spojitá náhodná veličina)

- pro „nekomplikované“ volby podmnožiny $A \subset E$ jsou pravděpodobnostní dotazy vyčíslitelné

- např. množiny jednoprvkové, s konečným počtem prvků, spočetným počtem prvků; intervaly či jejich konečné nebo spočetné sjednocení

- existují jisté překombinované volby A, kde $P[X \in A]$ nelze určit

- řešení: teorie míry
  - definiční obor pravděpodobnosti *P* = **pouze vhodná podsoustava $D \subset 2^E$**
  - **množinová σ-algebra** (nejmenší možná; vytvořená nad množinovou soustavou všech otevřených podmnožin množiny *E*)

- **typický případ:** výběrový prostor $E = \mathbb{R}$

- pak do **minimální σ-algebry*** ***D*** patří:
  - všechny jednoprvkové množiny
  - všechny konečně- a spočetněprvkové množiny
  - všechny intervaly libovolného typu
  - všechna jejich konečná i spočetná sjednocení
  - prázdná množina $\{\emptyset\}$ a množina E

⇨ ve spojitých případech lze klást pravděpodobnostní dotazy pouze ve tvaru $P[X \in A]$=?, kde $A \subset D$

* v teorii míry termín *borelovský uzávěr*

Soustavu množin $\mathscr{D}$ prohlásíme za **množinovou σ−algebru,** pokud splňuje tyto podmínky:

- uzavřenost na konečná sjednocení: $\forall A, B \in \mathscr{D}: \; A \cup B \in \mathscr{D}$.
- uzavřenost na rozdíly: $\forall A, B \in \mathscr{D}: \; A \setminus B \in \mathscr{D}$.
- existence množinového prezidenta: $\exists E \in \mathscr{D}: \; A \in \mathscr{D} \Rightarrow A \subset E$.
- uzavřenost na spočetná sjednocení: $\forall A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D}: \; \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{D}$.

…pokračování příště…