Úvod do pravděpodobnosti 01UP2

Zavedení pravděpodobnostní míry

Číslo semináře	Datum	Náplň semináře
1 ✓	17. února	Pravděpodobnost jako množinová míra
2	24. února	Pravděpodobnost jako množinová míra
3	3. března	Distribuční funkce a pravděpodobnosti typických množin
4	10. března	Diskrétní náhodné proměnné
5	17. března	Diskrétní náhodné proměnné
6	24. března	Absolutně spojité náhodné proměnné
7	31. března	Absolutně spojité náhodné proměnné
8	7. dubna	**1. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA**
9	14. dubna	Deskriptivní charakteristiky náhodných proměnných / Boxplot
10	21. dubna	VELIKONOCE
11	28. dubna	Afinní transformace náhodných proměnných
12	5. května	Součet náhodných proměnných
13	12. května	Odhadování experimentálních dat
14	19. května	**2. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA**

[Rozvrh_seminaru_2025.xlsx]

Soustavu množin $\mathscr{D}$ prohlásíme za **množinovou σ–algebru,** pokud splňuje tyto podmínky:

- uzavřenost na konečná sjednocení: $\forall A, B \in \mathscr{D}: \ A \cup B \in \mathscr{D}$.
- uzavřenost na rozdíly: $\forall A, B \in \mathscr{D}: \ A \setminus B \in \mathscr{D}$.
- existence množinového prezidenta: $\exists E \in \mathscr{D}: \ A \in \mathscr{D} \Rightarrow A \subset E$.
- uzavřenost na spočetná sjednocení: $\forall A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D}: \ \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{D}$.

› Je množinová σ-algebra uzavřená na doplněk v E pro množiny $A \in \mathcal{D}$?

› Je množinová σ-algebra uzavřená na průnik pro množiny $A, B \in \mathcal{D}$?

Pravděpodobnostní míra – rigorózní zavedení

- Pravděpodobnost z matematického pohledu = pravděpodobnostní míra

$$P: 2^E \to \langle 0,1 \rangle,$$

kde definiční obor $Dom(P)$ je

  - potence spočetného výběrového prostoru E (diskrétní NV);
  - množinová soustava borelovských množin (spojité NV).

- Tento definiční obor pravděpodobnostní míry se označuje **σ-algebra jevů.**

- symbol $Dom(P) = \mathcal{D}$

› **Pravděpodobnost (pravděpodobnostní míra)** je každé zobrazení $P: \mathcal{D} \to \langle 0,1 \rangle$, které všem množinám ze soustavy $\mathcal{D}$ přiřazuje číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ při splnění těchto axiomů:

- axiom nulovosti: $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$;
- axiom normality: $\mathcal{P}[E] = 1$;
- axiom monotónie: $A, B \in \mathscr{D} \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \leqslant \mathcal{P}[B]$;
- axiom nezápornosti: $A \in \mathscr{D} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \geqslant 0$;
- axiom aditivity: $A, B \in \mathscr{D} \wedge\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$.
- axiom σ–aditivity: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathscr{D} \wedge A_k \cap A_\ell = \emptyset\ (k \neq \ell) \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_k].$$

(*Poznámka*: některé axiomy „navíc“ pro přehlednost a lepší pochopení)

- Pro **obor hodnot $Ran(P)$ pravděpodobnostní míry** platí, že $Ran(P) \subset \langle 0,1 \rangle$.

- Tato vlastnost plyne bezprostředně z uvedených axiomů pravděpodobnostní míry a lze ji vyjádřit zápisem

$$\forall G \in \mathcal{D}: P[G] \in \langle 0,1 \rangle.$$

- Odkud plyne toto tvrzení?
  - pro dolní mez
    - -> axiom nezápornosti
  - pro horní mez
    - -> axiom normality a axiom monotónie

Jevy a jejich množinová interpretace

- Výsledky náhodných pokusů můžeme pokládat za množiny možných výsledků náhodného experimentu.
- Lze využít zápis $P[A]$ místo $P[X \in A]$ a tedy používat množinovou symboliku a operace:
  - **sjednocení jevů** $(A \cup B)$: nastane alespoň jeden z jevů A, B *
  - **průnik jevů** $(A \cap B)$: oba jevy A, B nastanou současně *
  - **rozdíl jevů** $(A \setminus B)$: nastane jev A, ale nenastane jev B
  - A **je podjev** B $(A \subset B)$: jev A nastane kdykoliv, když nastane jev B

* analogicky průnik a sjednocení většího počtu jevů

- **jev opačný či doplňkový k jevu B** $(A = B^C)$: nastává právě tehdy, když nenastává jev B
  - ✓ zřejmě $B^C = E \setminus B$
  - ✓ a také $B \cup B^C = E$
- **neslučitelné (disjunktní) jevy** A, B: pokud platí $A \cap B = \emptyset$
- **neslučitelné (disjunktní) jevy** $B_1, B_2, \dots, B_n$: pokud platí

$$\forall i, k \in \{1,2, \dots, n\}: i \neq k \;\Rightarrow\; B_i \cap B_k = \emptyset.$$

- **úplný systém neslučitelných jevů** $B_1, B_2, \dots, B_n$: zároveň platí

$$\forall i, k \in \{1,2, \dots, n\}: i \neq k \;\Rightarrow\; B_i \cap B_k = \emptyset,$$
$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E.$$

- **jev složený**: sjednocení alespoň dvou neslučitelných jevů
- **jev elementární:** pokud není složený

Odvozené vlastnosti pravděpodobnosti

› z axiomů plyne řada doplňkových vlastností

› např. **axiom monotónie** lze odvodit z ostatních axiomů:

- Mějme jevy $A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subset B$.
- Platí rovnosti $B = A \cup (B \setminus A),\ \ \mathrm{A} \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
- Z axiomu aditivity plyne $P[B] = P[A] + P[B \setminus A]$.
- Pro obor hodnot pravděpodobnostní míry ovšem platí
$$\forall G \in \mathcal{D}: P[G] \in \langle 0,1 \rangle \ \rightarrow \ P[B \setminus A] \in \langle 0,1 \rangle.$$
- Odsud plyne $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{A}] \leq \boldsymbol{P}[\boldsymbol{B}]$.

ÚLOHY: Další vlastnosti pravděpodobnosti

- **1) subtraktivita**:

$$A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad P[B \setminus A] = P[B] - P[A]$$

- **2) komplementarita:**

$$A \in \mathcal{D} \Rightarrow \quad P[A^C] = 1 - P[A]$$

- Vztahy dokažte.

3)

Dokažte, že platí:

- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.
- Je-li $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathscr{D}$ úplný systém neslučitelných jevů, pak $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}[B_k] = 1$.
- $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $\mathcal{P}[A \setminus B] + \mathcal{P}[A \cap B] + \mathcal{P}[B \setminus A] = \mathcal{P}[A \cup B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

4)

Pokusme se rozhodnout, zda (případně za jakých podmínek) platí rovnost $\mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

Distribuční funkce

› univerzální pravděpodobnostní charakteristika pro každou 1D náhodnou proměnnou

› **distribuční funkce** náhodné veličiny X:

$$F(x) \coloneqq P[X < x].$$

› definiční obor: množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ (i pro výběrový prostor podstatně méně mohutný)

› vlastnosti?

Příklad – hod falešnou kostkou

Uvažujme falešnou hrací kostku, při jejímž hodu padá číslo 3 pětkrát častěji než ostatní hodnoty. Všechny ostatní hodnoty jsou stejně pravděpodobné. Výběrovým prostorem je množina $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$. A jejím rozkladem na úplný systém neslučitelných (a zároveň elementárních) jevů je zjevně systém množin (jevů) $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3\}$, $B_4 = \{4\}$, $B_5 = \{5\}$ a $B_6 = \{6\}$. S ohledem na výše uvedený fakt, že $\mathcal{P}[B_3] = 5\mathcal{P}[B_k]$ pro všechna $k = 1, 2, 4, 5, 6$, a také že $\sum_{k=1}^{6} \mathcal{P}[B_k] = 1$, vidíme, že pravděpodobnostní tabulka zkoumaného jevu vypadá takto:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

…vlastnosti F(x)?