

Úvod do pravděpodobnosti

01UP2

Motivace a úvod do problematiky

Základní informace k předmětu

VYUČUJÍCÍ

- **Mgr. Michaela Krbálková, Ph.D.**

michaela.krbalkova@upce.cz

michaela.krbalkova@fjfi.cvut.cz

- **Prof. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**

milan.krbalek@fjfi.cvut.cz

- **podrobné informace:**

www.krbalek.cz – for students – 01UP2

STUDIJNÍ PODKLADY

- ❑ M. Krbálek a M. Krbálková, *Základy teorie náhodných proměnných a metod pro statistické odhadování*
 - finalizace skript, rukopis ke stažení
- ❑ J. Neubauer, M. Sedlačík, O. Kříž, *Základy statistiky - Aplikace v technických a ekonomických oborech*, 4. rozšířené vydání, Grada Publishing 2025
- ❑ J. Reif a Z. Kobera, *Úvod do pravděpodobnosti a spolehlivosti*, Západočeská univerzita v Plzni, 2006
- ❑ K. Zvára a J. Štěpán, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Matfyzpress 2012

Požadavky na zápočet a zkoušku

ZÁPOČET

→ získ bodů

- 2 zápočtové testy během semestru
- oba testy maximálně 30 bodů
- aktivita na semináři (až +10 bodů)
- tolerovány 2 absence
- každá další absence -2 body

→ bodové hranice

- ≥ 30 bodů zápočet **ANO**
- < 20 bodů zápočet **NE**
- $20 \geq x < 30$ opravná písemná práce

ZKOUŠKA

→ hodnocení písemné části zkoušky:

- **E** po opravné písemce nebo 30-37 bodů
- **D** 37-44 bodů, **C** 44-51 bodů
- **B** 51-58 bodů, **A** ≥ 58 bodů

→ celkové hodnocení zkoušky:

- V případě, že student neabsolvuje dobrovolnou ústní část, obdrží hodnocení podle písemné části zkoušky, ale ne lepší než **C**.
- Pro získání hodnocení **A** a **B** je třeba se zúčastnit ústní části zkoušky.

Číslo semináře	Datum	Náplň semináře
1	23. února	Pravděpodobnost jako množinová míra
2	2. března	Pravděpodobnost jako množinová míra
3	9. března	Distribuční funkce a pravděpodobnosti typických množin
4	16. března	Diskrétní náhodné proměnné
5	23. března	Diskrétní náhodné proměnné
6	30. března	Absolutně spojité náhodné proměnné
7	6. dubna	VELIKONOCE
8	13. dubna	Absolutně spojité náhodné proměnné
9	20. dubna	1. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA
10	27. dubna	Deskriptivní charakteristiky náhodných proměnných / Boxplot
11	4. května	Afinní transformace náhodných proměnných
12	11. května	Součet náhodných proměnných
13	18. května	Odhadování experimentálních dat
14	ve zkouškovém období	2. ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

Pravděpodobnost jako množinová míra

- › problematika statistického popisu systémů, které vykazují rysy náhodného uspořádání
- › fyzikální, biologické, ekonomické či sociální systémy
 - radioaktivní rozpad
 - rozvoj určitého typu onemocnění
 - finanční deriváty
 - dav chodců, proud vozidel atd.
- › nástroje matematické pravděpodobnosti a statistiky
- › klasifikace: deterministický **X** stochastický

› deterministický systém

- = počáteční uspořádání elementů -> jednoznačný stav v libovolném čase t
- např. pohyb tělesa ve vakuu
- analytická předpověď: *přesný stav systému v čase t*
- výstup: sada přesných hodnot fázových veličin (poloha, rychlost, ...)

› stochastický systém

- = stav systému v čase t lze pouze predikovat s určitou pravděpodobností
- rušení různými náhodnými vlivy
- např. pohyb tělesa v reálném odporujícím prostředí
- analytická předpověď: *pravděpodobnosti, s jakými nastanou všechny možné přípustné stavy daného systému*
- výstup: pravděpodobnost, že sledovaná veličina nabude hodnoty z určitého intervalu

- › sledovaná stavová veličina (proměnná) se označuje termínem **náhodná veličina (proměnná) X**
- › určujeme, jaká je pravděpodobnost, že X nabývá hodnot z nějakého intervalu či množiny A
- › symbolický zápis: $P[X \in A]$
- › chceme znát její konkrétní hodnotu
- › úloha ve tvaru $P[X \in A] = ?$ se pak nazývá **pravděpodobnostní dotaz**

ÚLOHA:

Francouzská ruleta

- › 37 polí; dvě různé barvy, očíslované od 0 do 36
- › různé možnosti sázek:
 - sázky na jedno číslo
 - červená nebo černá barva
 - sudá nebo lichá
 - malá čísla 1-18
 - vysoká čísla 19-36
 - třetiny



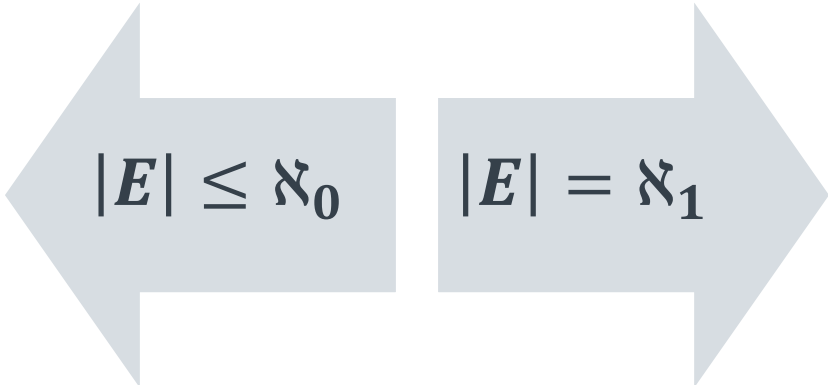
Jaké jsou příslušné pravděpodobnostní dotazy a hodnota výsledku?

Výběrový prostor

- › označme E ; množina všech přípustných výsledků náhodného experimentu
- › jednotlivé prvky výběrového prostoru = **elementární jevy**
- › **normalizace pravděpodobnosti**: $P[X \in E] = 1$
- *odpovídá pojmu *množinový prezident* (teorie míry)
 - $\mathcal{B}$ soustava množin
 - *pro* $\forall A \in \mathcal{B}: A \subset E$
 - E ... prezident soustavy $\mathcal{B}$; nejvýše jeden

- › náhodné proměnné/systémy lze klasifikovat podle počtu všech přípustných hodnot
- › tj. podle mohutnosti výběrového prostoru
- › tu vyjadřuje **kardinální číslo** (obecně znak $|A|$)
 - konečná množina: počet jejích prvků
 - spočetná množina: $\aleph_0$ (alef nula)
 - nespočetná množina: $\aleph_1$

diskrétní
náhodné
veličiny

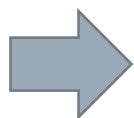

$$|E| \leq \aleph_0$$

$$|E| = \aleph_1$$

spojité
náhodné
veličiny

Pravděpodobnostní dotazy

- › Kolik existuje pravděpodobnostních dotazů pro zvolenou n.v. X ?
- › souvislost s mohutností výběrového prostoru
- › **příklad:** jeden hod kostkou (sudá vs. lichá čísla)
 - dvouprvkový výběrový prostor $E = \{s, l\}$
 - právě 4 dotazy:
 - 1) „Padne sudé číslo?“ $\rightarrow P[X = s] = P[X \in \{2, 4, 6\}] = ?$
 - 2) ...
 - 3) ...
 - 4) ...



obecně jakýkoliv dotaz tvaru $P[X \in A] = ?$ pro libovolnou podmnožinu výběr. prostoru $A \subset E$

- › počet všech podmnožin množiny E o m prvcích je roven 2^m
(viz pojem *potence množiny*)
- › počet pravděpodobnostních dotazů v E je tentýž
- › **jev jistý:** platí $A = E \implies P[X \in E] = 1$
- › **jev nemožný:** platí $A = \emptyset \implies P[X \in \emptyset] = 0$
- › **potence množiny G :*
 - soustava všech podmnožin množiny G
 - označuje se symbolem 2^G

Obecné vlastnosti pravděpodobnosti (diskrétní náhodná veličina)

- › libovolná náhodná proměnná X , výběrový prostor E
- › pravděpodobnost: **zobrazení**, které množinám A z potence 2^E , kde E je výběrový prostor náhodné proměnné, přiřazuje hodnoty z intervalu $P: 2^E \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$.
- › **intuitivní základní vlastnosti:**
 - nulová pravděpodobnost pro prázdnou množinu
 - jednotková pravděpodobnost pro množinu všech přípustných stavů
 - nezápornost
 - monotónie
 - aditivita
- › pravděpodobnost = normalizovaná míra (Lebesqueova teorie míry)

Obecné vlastnosti pravděpodobnosti (spojitá náhodná veličina)

- › pro „nekomplikované“ volby podmnožiny $A \subset E$ jsou pravděpodobnostní dotazy vyčíslitelné
- › např. množiny jednoprvkové, s konečným počtem prvků, spočetným počtem prvků; intervaly či jejich konečné nebo spočetné sjednocení
- › existují jisté překombinované volby A , kde $P[X \in A]$ nelze určit
- › řešení: teorie míry
 - definiční obor pravděpodobnosti P = **pouze vhodná podsoustava** $D \subset 2^E$
 - **množinová σ -algebra** (nejmenší možná; vytvořená nad množinovou soustavou všech otevřených podmnožin množiny E)

› **typický případ:** výběrový prostor $E = \mathbb{R}$

› pak do **minimální σ -algebry*** $\mathcal{D}$ patří:

- všechny jednoprvkové množiny
- všechny konečně- a spočetněprvkové množiny
- všechny intervaly libovolného typu
- všechna jejich konečná i spočetná sjednocení
- prázdná množina $\{\emptyset\}$ a množina E

➔ ve spojitých případech lze klást pravděpodobnostní dotazy pouze ve tvaru $P[X \in A]=?$, kde $A \subset \mathcal{D}$

* v teorii míry termín *borelovský uzávěr*

Soustavu množin $\mathcal{D}$ prohlásíme za **množinovou σ -algebru**, pokud splňuje tyto podmínky:

- uzavřenost na konečná sjednocení: $\forall A, B \in \mathcal{D} : A \cup B \in \mathcal{D}$.
- uzavřenost na rozdíly: $\forall A, B \in \mathcal{D} : A \setminus B \in \mathcal{D}$.
- existence množinového prezidenta: $\exists E \in \mathcal{D} : A \in \mathcal{D} \Rightarrow A \subset E$.
- uzavřenost na spočetná sjednocení: $\forall A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{D} : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{D}$.

› Je množinová σ -algebra uzavřená na doplněk v E pro množiny $A \in \mathcal{D}$?

› Je množinová σ -algebra uzavřená na průnik pro množiny $A, B \in \mathcal{D}$?

Pravděpodobnostní míra – rigorózní zavedení

- › Pravděpodobnost z matematického pohledu = pravděpodobnostní míra

$$P: 2^E \rightarrow \langle 0,1 \rangle,$$

kde definiční obor $Dom(P)$ je

- potence spočetného výběrového prostoru E (diskrétní NV);
 - množinová soustava borelovských množin (spojité NV).
- › Tento definiční obor pravděpodobnostní míry se označuje **σ -algebra jevů**.
 - › symbol $Dom(P) = \mathcal{D}$

› **Pravděpodobnost (pravděpodobnostní míra)** je každé zobrazení $P: \mathcal{D} \rightarrow \langle 0,1 \rangle$, které všem množinám ze soustavy $\mathcal{D}$ přiřazuje číslo z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ při splnění těchto axiomů:

- axiom nulovosti: $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$;
- axiom normality: $\mathcal{P}[E] = 1$;
- axiom monotónie: $A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}[A] \leq \mathcal{P}[B]$;
- axiom nezápornosti: $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{P}[A] \geq 0$;
- axiom aditivity: $A, B \in \mathcal{D} \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$.
- axiom σ -aditivity: $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{D} \wedge A_k \cap A_\ell = \emptyset \ (k \neq \ell) \Rightarrow$
$$\Rightarrow \mathcal{P}[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_k].$$

(Poznámka: některé axiomy „navíc“ pro přehlednost a lepší pochopení)

- › Pro **obor hodnot** $Ran(P)$ **pravděpodobnostní míry** platí, že $Ran(P) \subset \langle 0,1 \rangle$.
- › Tato vlastnost plyne bezprostředně z uvedených axiomů pravděpodobnostní míry a lze ji vyjádřit zápisem

$$\forall G \in \mathcal{D}: P[G] \in \langle 0,1 \rangle.$$

- › Odkud plyne toto tvrzení?
 - pro dolní mez
 - > axiom nezápornosti
 - pro horní mez
 - > axiom normality a axiom monotónie

Jevy a jejich množinová interpretace

- › Výsledky náhodných pokusů můžeme pokládat za množiny možných výsledků náhodného experimentu.
- › Lze využít zápis $P[A]$ místo $P[X \in A]$ a tedy používat množinovou symboliku a operace:
 - **sjednocení jevů** ($A \cup B$): nastane alespoň jeden z jevů A, B *
 - **průnik jevů** ($A \cap B$): oba jevy A, B nastanou současně *
 - **rozdíl jevů** ($A \setminus B$): nastane jev A , ale nenastane jev B
 - **A je podjev B** ($A \subset B$): jev A nastane kdykoliv, když nastane jev B

* analogicky průnik a sjednocení většího počtu jevů

- **jev opačný či doplňkový k jevu B** ($A = B^C$): nastává právě tehdy, když nenastává jev B
 - ✓ zřejmě $B^C = E \setminus B$
 - ✓ a také $B \cup B^C = E$
- **neslučitelné (disjunktní) jevy** A, B : pokud platí $A \cap B = \emptyset$
- **neslučitelné (disjunktní) jevy** $B_1, B_2, \dots, B_n$: pokud platí
$$\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}: i \neq k \Rightarrow B_i \cap B_k = \emptyset.$$
- **úplný systém neslučitelných jevů** $B_1, B_2, \dots, B_n$: zároveň platí
$$\forall i, k \in \{1, 2, \dots, n\}: i \neq k \Rightarrow B_i \cap B_k = \emptyset,$$
$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = E.$$
- **jev složený**: sjednocení alespoň dvou neslučitelných jevů
- **jev elementární**: pokud není složený

Odvozené vlastnosti pravděpodobnosti

- › z axiomů plyne řada doplňkových vlastností
- › např. **axiom monotónie** lze odvodit z ostatních axiomů:
 - Mějme jevy $A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subset B$.
 - Platí rovnosti $B = A \cup (B \setminus A)$, $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
 - Z axiomu aditivity plyne $P[B] = P[A] + P[B \setminus A]$.
 - Pro obor hodnot pravděpodobnostní míry ovšem platí
$$\forall G \in \mathcal{D}: P[G] \in \langle 0,1 \rangle \rightarrow P[B \setminus A] \in \langle 0,1 \rangle.$$
 - Odsud plyne $P[A] \leq P[B]$.

ÚLOHY: Další vlastnosti pravděpodobnosti

› 1) subtraktivita:

$$A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subset B \Rightarrow P[B \setminus A] = P[B] - P[A]$$

› 2) komplementarita:

$$A \in \mathcal{D} \Rightarrow P[A^c] = 1 - P[A]$$

› Vztahy dokažte.

3)

Dokažte, že platí:

- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathcal{D}$.
- Je-li $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{D}$ úplný systém neslučitelných jevů, pak $\sum_{k=1}^n \mathcal{P}[B_k] = 1$.
- $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ -algebry $\mathcal{D}$.
- $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c$ pro libovolnou sadu jevů ze σ -algebry $\mathcal{D}$.
- $\mathcal{P}[A \setminus B] + \mathcal{P}[A \cap B] + \mathcal{P}[B \setminus A] = \mathcal{P}[A \cup B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathcal{D}$.

4)

Pokusme se rozhodnout, zda (případně za jakých podmínek) platí rovnost $\mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathcal{D}$.

Distribuční funkce

- › univerzální pravděpodobnostní charakteristika pro každou 1D náhodnou proměnnou

- › **distribuční funkce** náhodné veličiny X :

$$F(x) := P[X < x].$$

- › definiční obor: množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ (i pro výběrový prostor podstatně méně mohutný)
- › vlastnosti?

Příklad – hod falešnou kostkou

Uvažujme falešnou hrací kostku, při jejímž hodu padá číslo 3 pětkrát častěji než ostatní hodnoty. Všechny ostatní hodnoty jsou stejně pravděpodobné. Výběrovým prostorem je množina $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A jejím rozkladem na úplný systém neslučitelných (a zároveň elementárních) jevů je zjevně systém množin (jevů) $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3\}$, $B_4 = \{4\}$, $B_5 = \{5\}$ a $B_6 = \{6\}$. S ohledem na výše uvedený fakt, že $\mathcal{P}[B_3] = 5\mathcal{P}[B_k]$ pro všechna $k = 1, 2, 4, 5, 6$, a také že $\sum_{k=1}^6 \mathcal{P}[B_k] = 1$, vidíme, že pravděpodobnostní tabulka zkoumaného jevu vypadá takto:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$