

Úvod do pravděpodobnosti

01UP2

Diskrétní náhodná proměnná
a její charakteristiky

Úlohy – distribuční funkce

- 1 Nechť je náhodná proměnná popsána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 2, \\ 1 - \frac{1}{64}(x - 10)^2 & \text{pro } x \in (2, 10), \\ 1 & \text{pro } x \geq 10. \end{cases}$$

Pro množiny $C = \langle 3, 8 \rangle$ a $D = \langle 5, 9 \rangle$ vypočítejte pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \cup D]$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in C \setminus D]$.

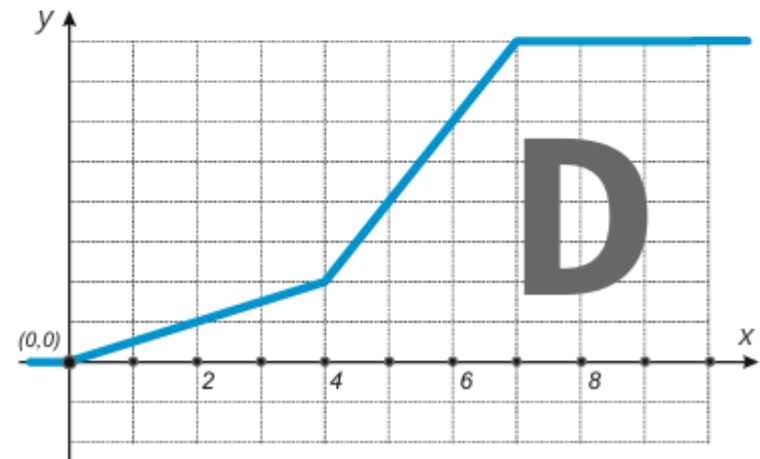
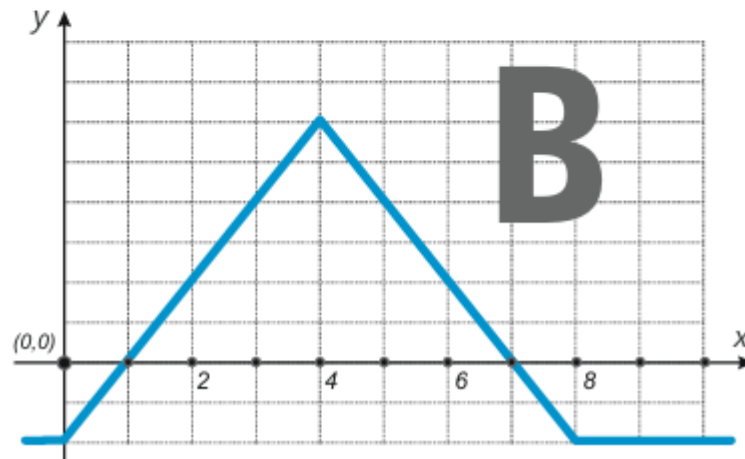
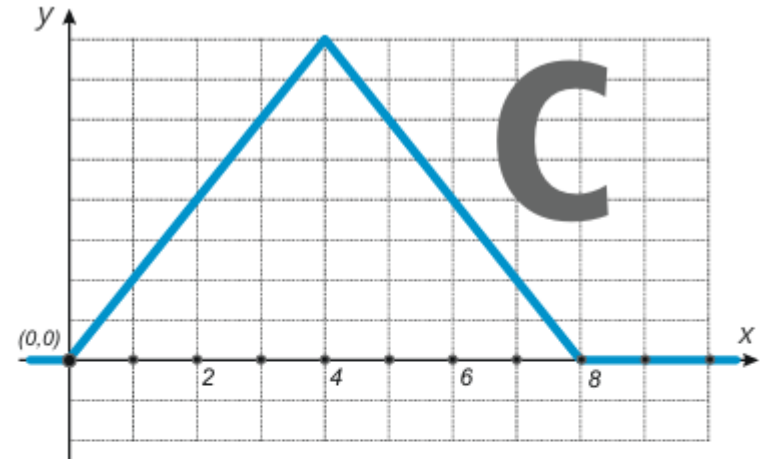
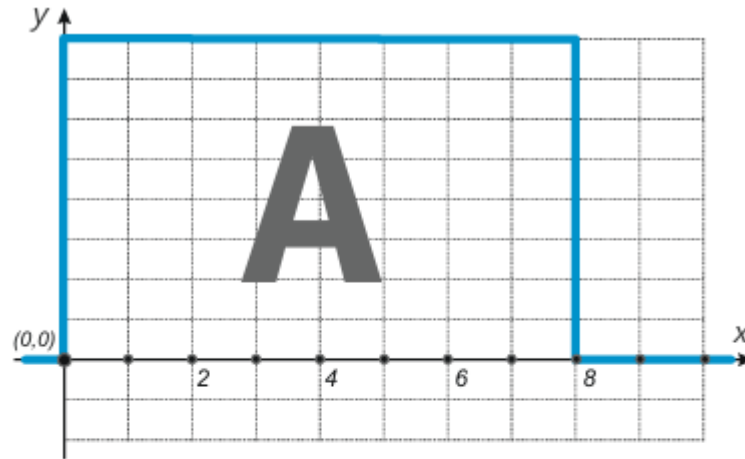
- 2 Náhodná veličina Y je popsána distribuční funkcí

$$H(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1; \\ \frac{(y-1)^3}{27} & y \in (1, 4); \\ 1 & y \geq 4. \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathcal{Y} > 2 \wedge \mathcal{Y} < 3]$.

Úlohy – distribuční funkce

- 3 Který z následujících obrázků znázorňuje distribuční funkci náhodné veličiny? Jaká je pro tuto funkci hodnota pravděpodobnosti, že výsledkem pokusu je hodnota z intervalu $\langle 4; 6 \rangle$?



Pravděpodobnostní tabulka

Diskrétní náhodná proměnná

› výběrový prostor buď konečněprvkový nebo nanejvýš spočetněprvkový

› pro elementární jevy $\{a_k\}$:

$$E = \{a_k \in \mathbf{R} : k = 1, 2, 3, \dots, m\}, \quad E = \{a_k \in \mathbf{R} : k \in \mathbf{N}\}.$$

› pro komplexní řešitelnost postačí znát pravděpodobnost všech elem. jevů, tj.

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{a_k\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k]$$

› **pravděpodobnostní tabulka**: v prvním sloupci všechny elementární jevy a ve druhém jejich pravděpodobnost

- distribuční funkce
- další charakteristiky

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = k] = \frac{1}{37}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 36)$$

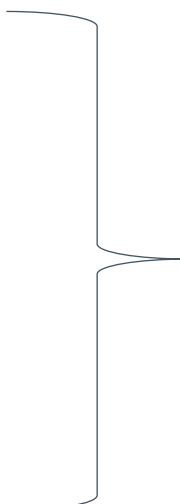


Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

Deskriptivní charakteristiky

- › distribuční funkce $F(x)$ a pravděpodobnostní tabulka = **kompletní přehled**
- › běžně (a častěji) užívané charakteristiky = číselné reprezentace n.v.

- jen základní rysy!
- střední hodnota
- rozptyl (variance
- směrodatná odchylka
- medián,...



deskriptivní charakteristiky

Střední hodnota náhodné proměnné

Diskrétní náhodná proměnná

› definována vztahem $E(X) := \sum_{x \in E} x \cdot \mathcal{P}[X = x]$, pokud řada konverguje

› prochází všechny prvky výběrového prostoru a jejich velikost násobí (váží) příslušnou pravděpodobností -> jakési „**statistické těžiště**“ daného jevu, tj. optimálně vyvážená hodnota

› **střední hodnota** **x** **aritmetický průměr**...nezaměňovat!

- střední hodnota = teoreticky odvozená ze znalosti chování n.p.
- aritmetický průměr = výpočet po realizaci experimentu ze statistického výběru

› statistický výběr: $x_1, x_2, \dots, x_n$ $\longrightarrow$ aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

Poznámka: Pro velký počet realizací konverguje aritmetický průměr k teoretické střední hodnotě.

Úloha – střední hodnota

1

V jednom městě žijí rodiny s jedním, dvěma, třemi nebo čtyřmi dětmi. Rodin s jedním dítětem je 40%, rodin se dvěma dětmi je 30%, rodin s třemi dětmi je 20% a rodin se čtyřmi dětmi je 10%. Sestavte pravděpodobnostní tabulku a určete, kolik dětí má průměrná rodina.

Statistické momenty

Diskrétní náhodná proměnná

› **necentrální statistické momenty:**

$$\mu_k = E(X^k) := \sum_{x \in E} x^k \cdot \mathcal{P}[X = x],$$

kde $k \in \mathbb{N}$ nebo nulové

- pro $k = 0$ normalizace pravděpodobnosti
- první moment = střední hodnota $E(X) = \mu_1$

› **necentrální statistické momenty:**

$$\mu_k := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^k \cdot \mathcal{P}[X = x],$$

pokud řada na pravé straně konverguje

- chování odchylek od střední hodnoty $E(X) = \mu_1$

Rozptyl a směrodatná odchylka

Diskrétní náhodná proměnná

› rozptyl náhodné proměnné:

$$\kappa_2 := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x]$$

- míra rozptýlení jednotlivých realizací n.p. kolem střední hodnoty
- liší-li se málo -> malý rozptyl
- značí se symboly $D(X)$ nebo $VAR(X)$ z anglického *variance*
- platí pro něj: $\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2 = E(\mathbb{X}^2) - E^2(\mathbb{X})$
-> dokažte 😊

› směrodatná odchylka náhodné proměnné:

$$SD(\mathbb{X}) = \sqrt{D(\mathbb{X})}$$

- odmocnina z rozptylu
- z anglického *standard deviation*

Úloha – střední hodnota a rozptyl

1

Pro náhodnou proměnnou, jejíž pravděpodobnostní popis je zadán tabulkou z úlohy o falešné kostce, vypočítejte střední hodnotu a rozptyl.

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$