

Cvičení z předmětu 01UP2

1

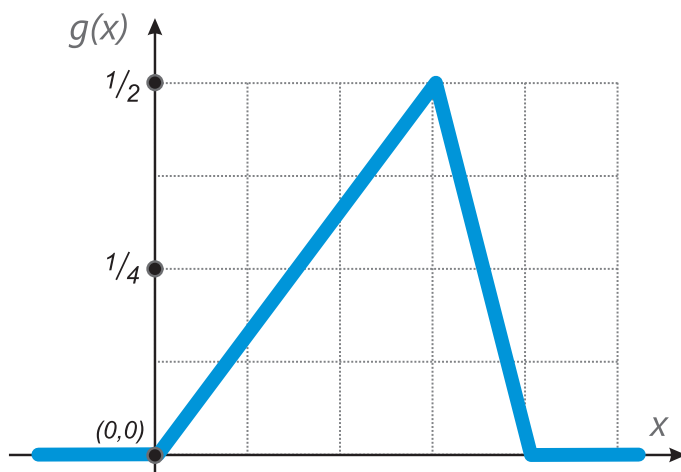
Jaký rozptyl má náhodná veličina X , pro jejíž k -tý moment platí rovnost

$$E(X^k) = \frac{k!}{5^k} ?$$

2

Zodpovězte následující otázky týkající se náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti z obrázku níže. Odpovědi pište rovnou za příslušné otázky zde na zadání.

- Jaké rozpětí má tato náhodná veličina?
- Jaký je modus náhodné veličiny?
- Jaký nosič má náhodná veličina?



3

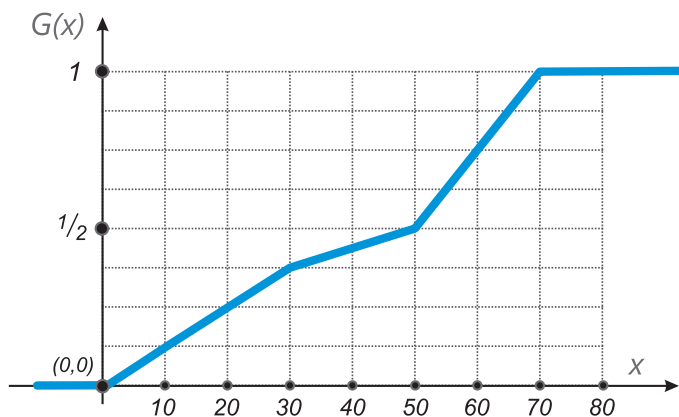
Jakou střední hodnotu má náhodná veličina popsaná distribuční funkcí

$$H(x) = 1 - \frac{1}{3}(x+3)e^{-x/3} ?$$

Nejprve ovšem zjistěte, jaký je nosič této distribuční funkce.

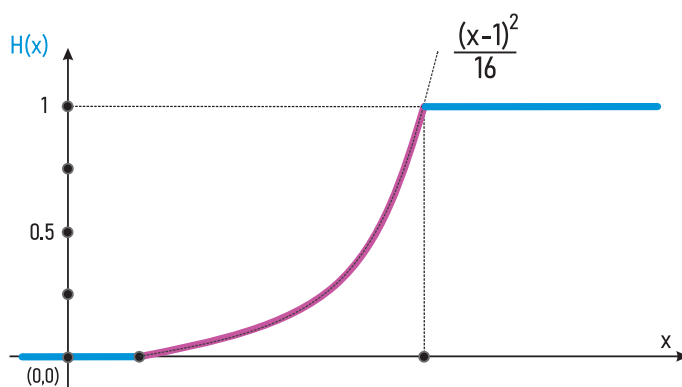
4

Jaký je mezikvartilový rozptyl náhodné veličiny popsané distribuční funkcí z obrázku?



5

Na obrázku níže je vyobrazena distribuční funkce náhodné veličiny X . Určete její nosič, rozpětí, střední hodnotu a medián.



6

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti $z(x) = 4\Theta(x)xe^{-2x}$.

7

Pro náhodnou veličinu zadanou distribuční funkcí

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^2}{36} & x \in (2, 8) \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a dolní kvartil.

8

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$z(x) = \frac{1}{416} (x^3 - 12x^2 + 45x),$$

definovanou na intervalu $\langle 0, 8 \rangle$. Mimo tento interval je hustota pravděpodobnosti nulová.

9

Ukažte, že rozptyl náhodné veličiny může být vypočten na základě znalosti několika málo momentů.

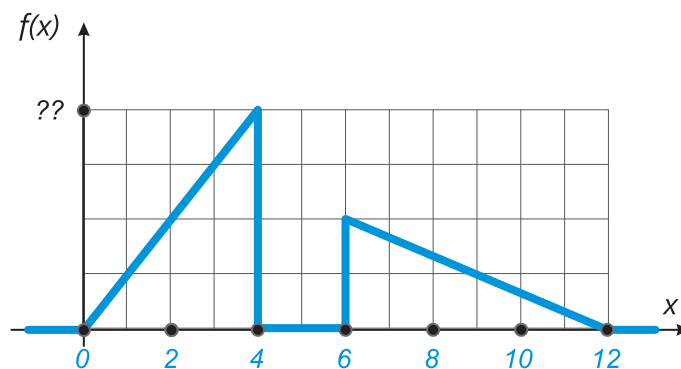
10

Nalezněte rozptyl náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{2x\Theta(x)}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}.$$

11

Určete nosič, pravé pomezí a pravděpodobnost $\mathcal{P}[X < 3 \vee X > 9]$ pro náhodnou veličinu X , popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku.



12

Pro náhodnou veličinu zadanou hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 4 \\ \frac{x-4}{32} & x \in (4, 12) \\ 0 & x \geq 12 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a dolní kvartil.

13

Pravděpodobnost je množinová funkce, která množinám přiřazuje číslo udávající pravděpodobnost, že výsledkem pokusu bude hodnota z dané množiny. Jaké obecné vlastnosti tato pravděpodobnost nutně splňuje?

14

Pro náhodnou veličinu zadanou hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{18} & x \in (2, 8) \\ 0 & x \geq 8 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a α -kvantil, kde $\alpha = 4/9$. Vypočítejte také a co nejpřesněji vykreslete distribuční funkci.

15

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = \frac{x}{216} (2x^2 - 21x + 60),$$

definovanou na intervalu $\langle 0, 6 \rangle$. Mimo tento interval je hustota pravděpodobnosti nulová.

16

Nalezněte druhý moment náhodné veličiny $\mathcal{X}$ popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{32x^2 \Theta(x)}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2}.$$

Lze užít faktu, že $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

17

Náhodná veličina $\mathcal{Y}$ je popsána distribuční funkcí

$$H(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1; \\ \frac{(y-1)^3}{27} & y \in (1, 4); \\ 1 & y \geq 4. \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathcal{Y} > 2 \wedge \mathcal{Y} < 3]$ a střední hodnotu $\mathcal{Y}$.

18

Nosičem náhodné veličiny

$$\mathcal{X} \sim g(x) = Ax(2x^2 - 21x + 60)$$

je interval $\langle 1, 6 \rangle$. Nalezněte její modus. A je normalizační konstanta, jejíž hodnota nemá na výsledek žádný vliv.

19

Diskrétní náhodná veličina $\mathcal{Z}$ je popsána Poissonovým rozdělením

$$\mathcal{P}[\mathcal{Z} = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Vypočítejte střední hodnotu této náhodné veličiny. Číslo λ je pevně zvolený kladný parametr.

20

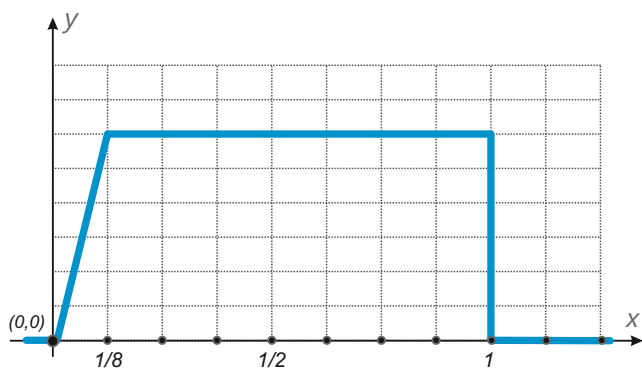
Nechť pro náhodnou proměnnou $\mathcal{X}$ platí, že

$$\mathcal{X} \sim g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)},$$

kde $a > 0$ je pevně zvolený parametr. Vypočítejte horní kvartil.

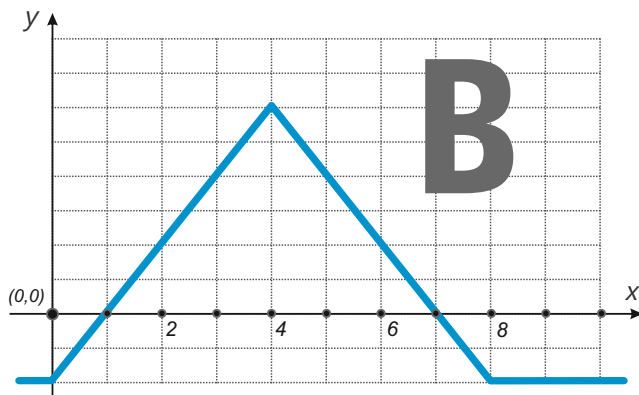
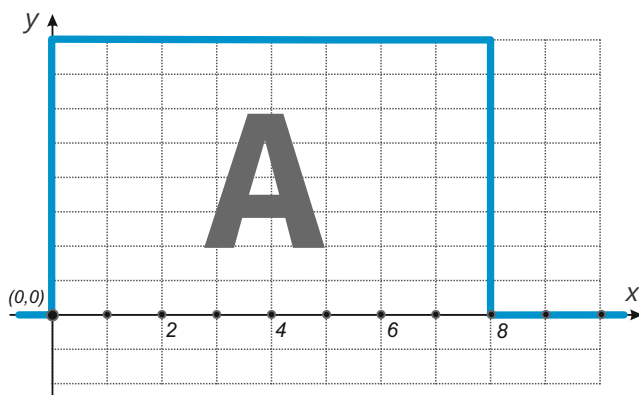
21

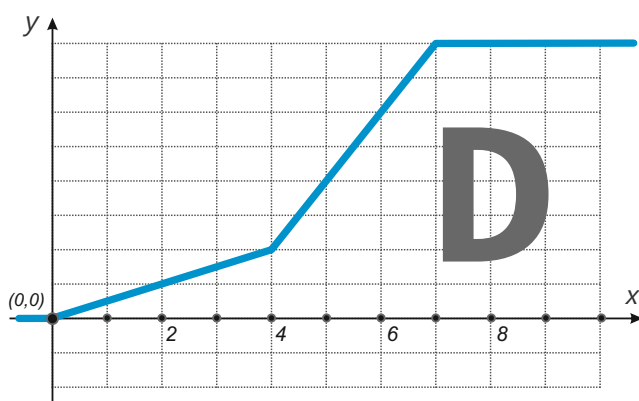
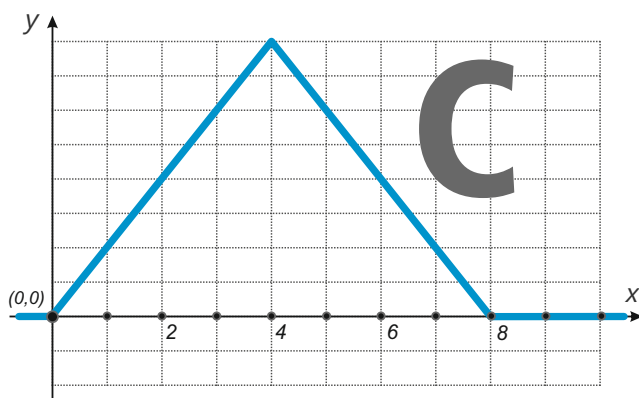
Pro náhodnou proměnnou popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku určete α -kvantil, kde $\alpha = 1/3$.



22

Pouze jediný z obrázků níže představuje distribuční funkci náhodné veličiny. Který to je? Pro tuto vybranou variantu určete, jaká je pravděpodobnost, že výsledkem pokusu bude hodnota z intervalu $\langle 2, 5 \rangle$.





23

Nalezněte takovou hodnotu parametru $a > 0$, aby rozptyl náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{\Theta(a^2 - x^2)}{a} \left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right),$$

kde $\Theta(x)$ je Heavisideova funkce, byl roven 13,5.

24

Načrtněte graf funkce $h(x)$ z předešlého příkladu a určete rozpětí nosiče.

25

Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné (jistého experimentu) má tvar

$$g(x) = Ax\Theta(x)\Theta(4 - x).$$

Stanovte hodnotu A a vyčístele střední hodnotu této proměnné.

26

S jakou pravděpodobností bude výsledek experimentu popsáného v předešlém příkladě menší než jeho střední

hodnota?

27

Náhodná proměnná X je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{3(4 - x^2)}{32} \Theta(4 - x^2).$$

Nalezněte její nosič, rozpětí, levé a pravé pomezí, modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

28

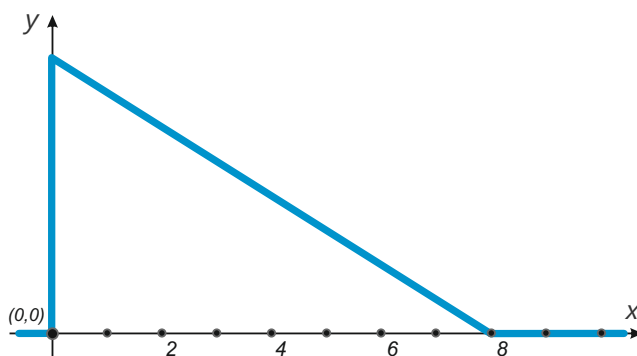
Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné má tvar

$$g(x) = \frac{3x^2}{8} \Theta(x) \Theta(4 - x).$$

Jaká je její střední hodnota a horní kvartil?

29

Najděte pravděpodobnost, že výsledkem pokusu, jehož hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže, nebude hodnota menší než pět.



Hustota pravděpodobnosti k úlohám č. 29, 30 a 31.

30

Pro předešlou úlohu nalezněte střední hodnotu.

31

K hustotě pravděpodobnosti z předešlého obrázku vykreslete odpovídající distribuční funkci.

32

Jakou střední hodnotu a jaký rozptyl má náhodná proměnná distribuovaná podle hustoty pravděpodobnosti

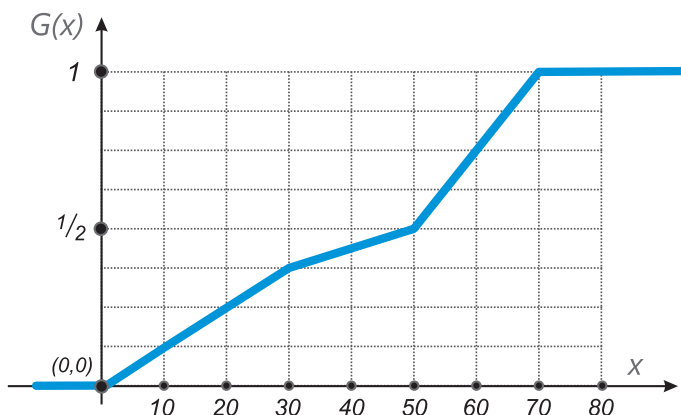
$$h(x) = \frac{8}{3} \Theta(x) x^3 e^{-2x} ?$$

33

Jaký modus má náhodná proměnná z předchozího příkladu?

34

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehlých měření) pro náhodnou veličinu z obrázku.



35

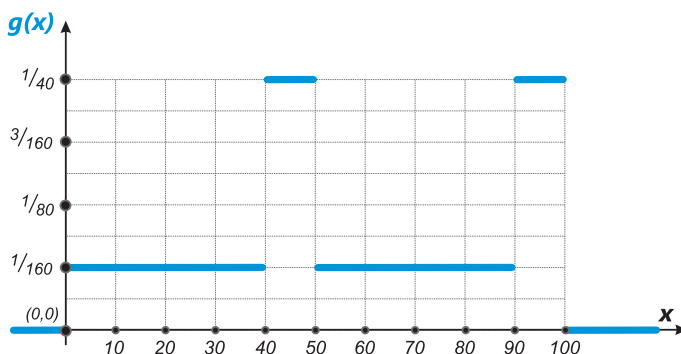
Náhodná veličina X je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{\Theta(2 - |x|)}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}.$$

Vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny $Y = 2X$ a do stejného obrázku vykreslete také $f(x)$.

36

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehlých měření) pro náhodnou veličinu, jejíž hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže.



37

Parametry hustoty pravděpodobnosti

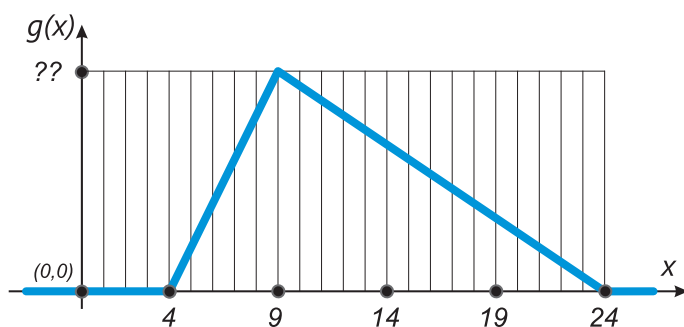
$$f(x) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

nastavte tak, aby střední hodnota náhodné veličiny byla rovna jedné a rozptyl jedné třetině. Užijte vztahu

$$\int_0^{\infty} y^{s-1} e^{-y} dy = \Gamma(s).$$

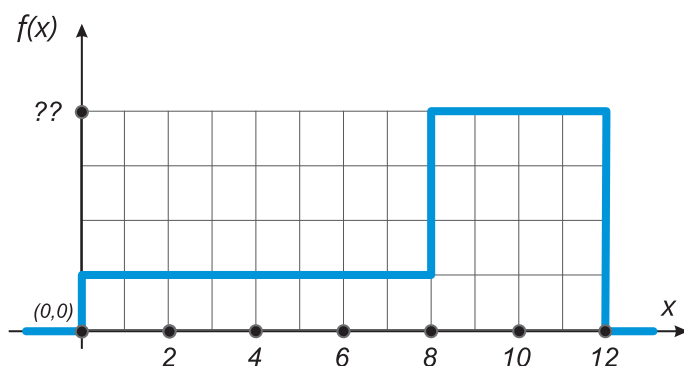
38

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{X}$ je funkce z obrázku. Do obrázku připraveného na druhém papíře vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny $\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X}}{2}$. Doplňte také chybějící údaj v obrázku.



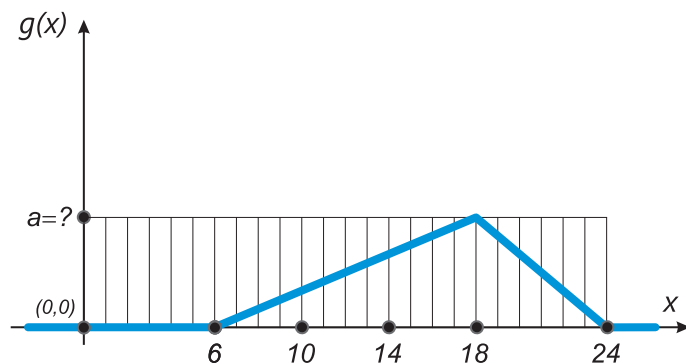
39

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehklých měření) pro náhodnou veličinu, jejíž hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže.



40

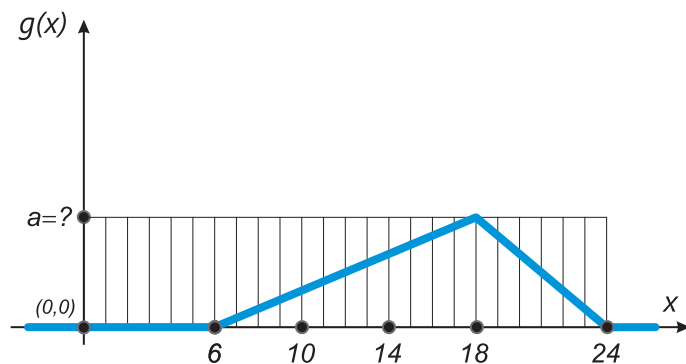
Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny $\mathcal{X}$ je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny $\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{X}}{3}$. Čemu se musí rovnat číslo a z obrázku?



41

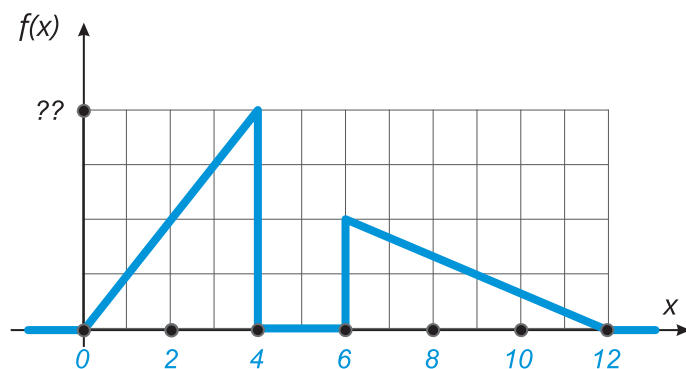
Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$Y = \frac{X}{2} - 3.$$



42

Určete nosič, pravé pomezí a pravděpodobnosti $\mathcal{P}[X < 2 \wedge X > 6]$, $\mathcal{P}[X < 2 \vee X > 6]$ pro náhodnou veličinu X , popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku.



43

Data z úryvku tabulky

Pořadí měření	Naměřená hodnota	Kvadrát naměřené hodnoty
1	4,51	20,3401
2	2,01	4,0401
3	2,88	8,2944
4	1,56	2,4336
5	0,98	0,9604
6	4,25	18,0625
97	6,84	46,7856
98	2,41	5,8081
99	1,86	3,4596
100	3,22	10,3684
Součet hodnot ve sloupci:	200	500

pochází z náhodného výběru popsaného hustotou pravděpodobnosti

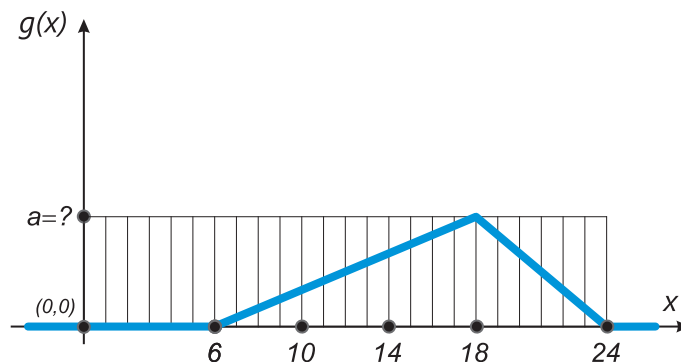
$$f(x) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

Pro jaké konkrétní hodnoty parametrů α a λ byl tento výběr pořízen?

44

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$Y = \frac{X}{3} - 2.$$



45

Dvě náhodné veličiny X a Y pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \Theta(x) \lambda e^{-\lambda x}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$Z = \frac{X + Y}{2}.$$

46

Ukažte, že konvoluce je komutativní operací.

47

Jakou hustotu pravděpodobnosti má součet náhodných veličin

$$\mathcal{X} \sim 2\Theta(x)e^{-2x}; \quad \mathcal{Y} \sim 4\Theta(y)ye^{-2y}?$$

48

Ukažte, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

49

Nechť $\mathcal{X} \sim 4\Theta(x)xe^{-2x}$ a $\mathcal{Y} \sim \frac{8}{3}\Theta(x)x^3e^{-2x}$. Jakou hustotu má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = \frac{2}{3}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})?$$

50

Dvě náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = 4\mathcal{X} + 4\mathcal{Y}.$$

51

Dvě náhodné veličiny $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}.$$

52

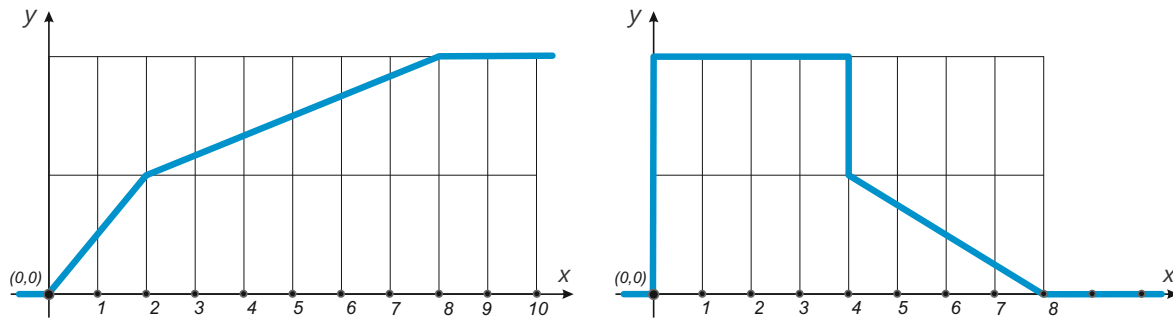
Náhodná veličina $\mathcal{X}$ je popsána distribuční funkcí

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{64} & x \in (-1, 3); \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathcal{X} > 0]$ a střední hodnotu veličiny $\mathcal{X}$.

53

Na obrázku je jedna hustota pravděpodobnosti a jedna distribuční funkce. Náhodná veličina X je popsána hustotou pravděpodobnosti, zatímco náhodná veličina Y je popsána distribuční funkcí. Která z náhodných veličin má větší medián? Hodnoty obou mediánů přesně vyčíslete. Pozor: Osy y nemusejí mít nutně stejná měřítka.



3 (4 body)

Na základě přiložené tabulky obsahující 100 naměřených dat vykreslete kompletní krabicový graf (box-plot) a určete, která z naměřených dat jsou odlehlými měřeními (outliers), tj. měřeními ležícími za vnějšími hradbami.

Číslo měření	Naměřený údaj	Číslo měření	Naměřený údaj
1	0,5	51	6,4
2	0,8	52	6,5
3	1,3	53	6,7
4	1,8	54	6,8
5	1,9	55	6,8
6	2	56	6,9
7	2,2	57	6,9
8	2,3	58	7
9	2,5	59	7,1
10	2,5	60	7,1
11	2,7	61	7,2
12	2,8	62	7,2
13	2,8	63	7,2
14	3	64	7,3
15	3,1	65	7,3
16	3,2	66	7,3
17	3,3	67	7,3
18	3,3	68	7,4
19	3,6	69	7,4
20	3,7	70	7,5
21	3,7	71	7,7
22	3,8	72	7,8
23	3,9	73	7,8
24	3,9	74	7,9
25	3,9	75	7,9
26	3,9	76	7,9
27	4	77	9,5
28	4,1	78	9,6
29	4,2	79	9,8
30	4,2	80	9,8
31	4,3	81	10
32	4,3	82	10
33	4,4	83	10,1
34	4,5	84	10,2
35	4,7	85	10,3
36	4,8	86	10,4
37	4,9	87	10,5
38	5	88	10,6
39	5,1	89	10,6
40	5,2	90	10,7
41	5,3	91	11
42	5,4	92	11
43	5,4	93	11,1
44	5,5	94	11,2
45	5,8	95	11,4
46	5,9	96	11,4
47	6	97	12,5
48	6,2	98	13,6
49	6,4	99	14,8
50	6,4	100	17,2
Součet všech hodnot		650	
Součet kvadrátů všech hodnot		5277	

54

Jakou hustotu pravděpodobnosti má součet náhodných veličin

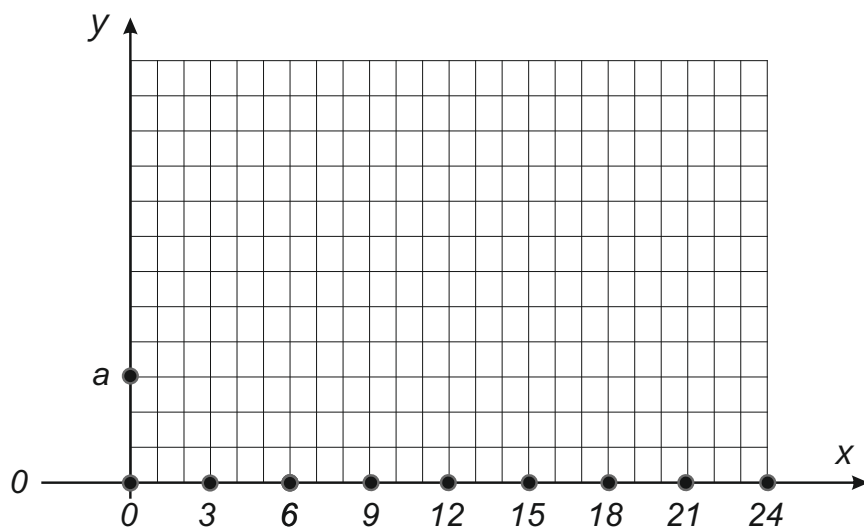
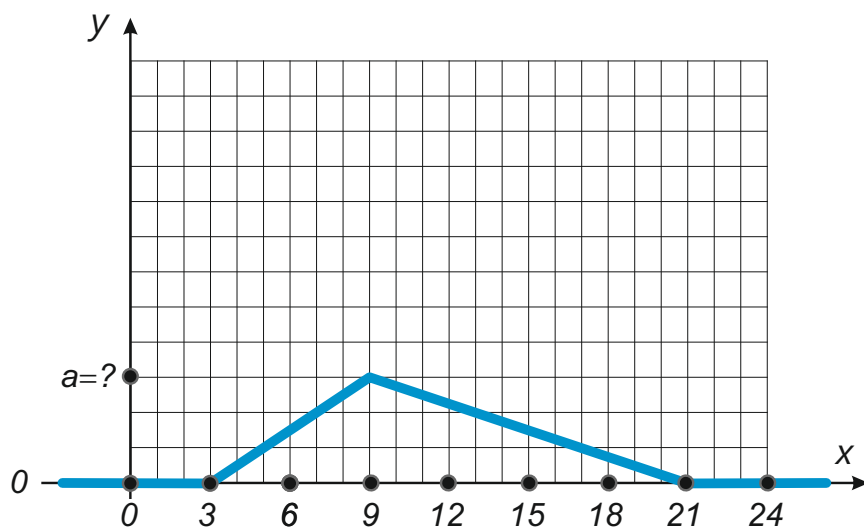
$$\mathcal{X} \sim 4\Theta(x)xe^{-2x}; \quad \mathcal{Y} \sim \frac{8}{3}\Theta(y)y^3e^{-2y},$$

o nichž předpokládáme, že jsou nezávislé.

55

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$Y = \frac{X}{3} + 2.$$



56

Náhodná veličina X je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má veličina $\mathcal{Y} = 5X$?