

## Cvičení z předmětu 01UP2 (Úvod do pravděpodobnosti 2)

1

Jaký rozptyl má náhodná veličina  $X$ , pro jejíž  $k$ -tý moment platí rovnost

$$E(X^k) = \frac{k!}{5^k} ?$$

*Řešení:*

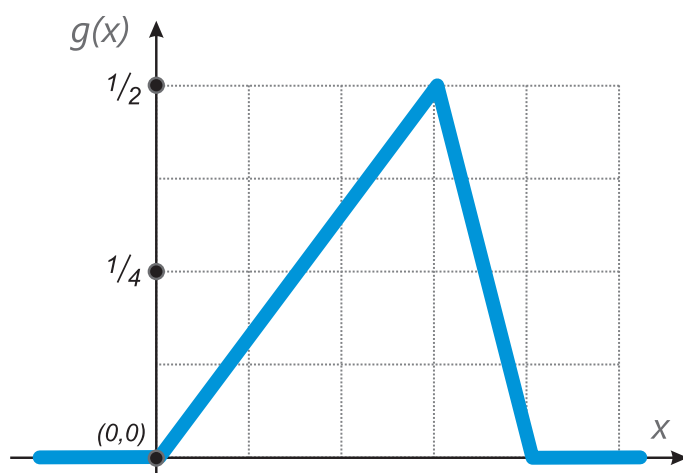
Abychom mohli zodpovědět jaký má tato náhodná veličina rozptyl, tak si stačí uvědomit, jak ho můžeme vypočítat:  $\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ . Druhý moment náhodné veličiny a střední hodnoty můžeme ovšem vypočítat ze zadaného vztahu:  $E(X^2) = \frac{2!}{5^2}$  a  $E(X^1) = \frac{1!}{5^1}$ . Tyto hodnoty teď již jen dosadíme do vzorce pro rozptyl a budeme hotovi

$$\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2!}{5^2} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}.$$

2

Zodpovězte následující otázky týkající se náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti z obrázku níže. Odpovědi pište rovnou za příslušné otázky zde na zadání.

- Jaké rozpětí má tato náhodná veličina?
- Jaký je modus náhodné veličiny?
- Jaký nosič má náhodná veličina?



*Řešení:*

Ani jedinou z položených otázek nelze zodpovědět bez zjištění horizontálního rozměru obdélníků v zadaném grafu. Bude tedy nezbytné vyřešit nejprve tuto otázku. Označme zmíněný horizontální rozměr písmenkem  $a$ . Vertikální rozměr známe. Je jím hodnota  $1/8$ . Aby zadaný graf skutečně reprezentoval hustotu pravděpodobnosti, jak tvrdí zadání, musí podle známých vlastností hustot pravděpodobnosti platit, že

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx \stackrel{!}{=} 1.$$

Protože ale hodnota tohoto integrálu představuje obsah útvaru vymezeného osou  $x$  a grafem funkce  $g(x)$ , je zřejmé (při triviální aplikaci učiva základní školy), že

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a.$$

Odtud pak snadno dopočteme, že  $a = 1$ . Nyní již snadno určíme, že nosičem příslušné náhodné veličiny je interval

$$\text{supp}(X) = \{x \in \mathbf{R} : g(x) > 0\} = (0, 4).$$

A protože rozpětím náhodné veličiny rozumíme délku jejího nosiče (ve zobecněném smyslu), snadno nahlédneme, že  $\text{marg}(X) = 4$ . Modusem náhodné veličiny, jak známo, rozumíme hodnotu (hodnoty), v nichž příslušná hustota pravděpodobnosti nabývá svého maxima, tj.

$$\text{mod}(X) = \arg \max_{x \in \mathbf{R}} g(x) = 3.$$

### 3

Jakou střední hodnotu má náhodná veličina popsaná distribuční funkcí

$$H(x) = 1 - \frac{1}{3}(x+3)e^{-x/3}?$$

Nejprve ovšem zjistěte, jaký je nosič této distribuční funkce.

*Řešení:*

K nalezení nosiče se nejdříve podívejme na následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{3}(x+3)e^{-x/3} = +\infty.$$

Toto ovšem pro distribuční funkci z definice nemůže být platné, jelikož z definice víme:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} H(x) = 0$ . Toto nám naznačuje, že  $H(x)$  nebude definována pro všechna reálná čísla. Vypočtěme dále hustotu ze zadané distribuční funkce. Hustotu získáme z definičního vztahu:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

Nyní zderivujeme tento integrál jako funkci horní meze:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Touto derivací dostaneme:

$$f(x) = \frac{x}{9} e^{-\frac{x}{3}}.$$

Je vidět, že  $\forall x \in (-\infty, 0) : f(x) < 0$ . To ale víme, že z definice hustoty nemůže platit. Zároveň platí, že  $f(x)$  je pozitivní pro  $x \in (0, +\infty)$ . Pro hodnotu  $x = 0 \implies f(x) = 0$ . Limita  $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = 1$  je splněna. Z tohoto už můžeme psát:

$$\text{supp} f(x) = [0, +\infty).$$

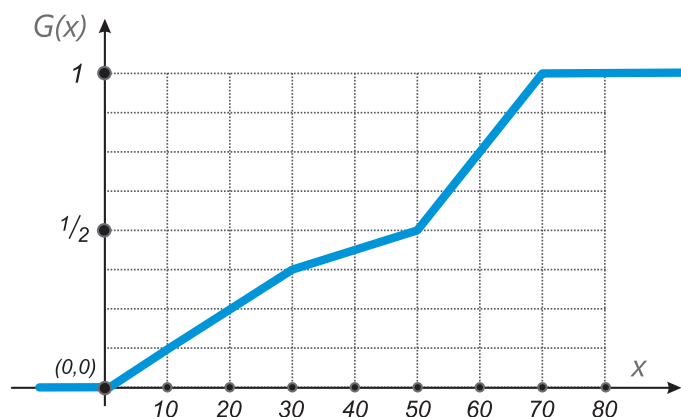
Přejdeme nyní výpočtu střední hodnoty této náhodné veličiny. Střední hodnotu teď spočteme z definičního vztahu:

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} x \cdot f_X(x) dx = \frac{1}{9} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx \stackrel{t=\frac{x}{3}}{=} 3 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 6.$$

Při dosazování hustoty jsme zúžili integrační obor na interval  $[0, +\infty)$  díky nosiči náhodné veličiny.

## 4

Jaký je mezikvartilový rozptyl náhodné veličiny popsané distribuční funkcí z obrázku?



*Řešení:*

Mezikvartilový rozptyl vypočteme z dolního a horní kvartilu. Tyto hodnoty vypočteme jako

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_{-\infty}^a g(x) dx = G(a) \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}$$

$$Q_{\frac{3}{4}} = \int_{-\infty}^b g(x) dx = G(b) \stackrel{!}{=} \frac{3}{4},$$

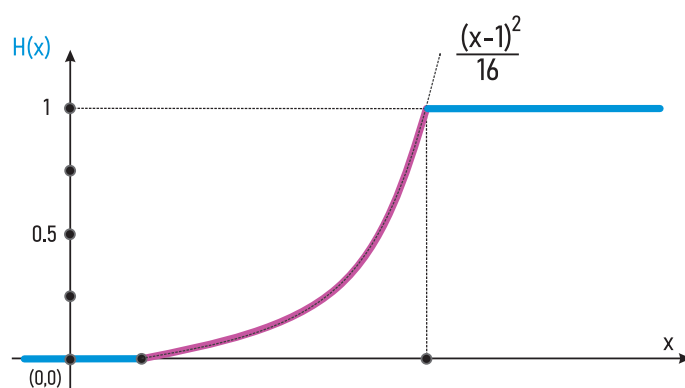
kde jsme pouze použili definici distribuční funkce. Pro určení těchto hodnot nám bude stačit číst ze svislé osy z grafu. Ve vertikálním směru je velikost jednoho dílku rovna  $\frac{1}{8}$ . To ovšem znamená, že jsme schopni najít hodnoty  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{3}{4}$ . Z grafu vidíme, že funkce  $G$  nabude hodnoty  $\frac{1}{4}$  v bodě  $x_1 = 20$  a hodnoty  $\frac{3}{4}$  v bodě  $x_2 = 60$ . Mezikvartilový rozptyl je definován jako

$$\text{IQV}(X) = Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}} = 60 - 20 = 40.$$

Dostáváme tedy, že mezikvartilový rozptyl je 40.

## 5

Na obrázku níže je vyobrazena distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ . Určete její nosič, rozpětí, střední hodnotu a medián.



*Řešení:*

Nosič této náhodné veličiny určíme z obrázku pomocí průsečíků zadané křivky s osou  $x$  a hodnoty, kdy je distribuční funkce poprvé rovna jedné. Dolní hranici dostaneme za pomoci řešení rovnice

$$\frac{1}{16}(x-2)^2 = 0 \implies x = 2.$$

Horní hranici dostaneme jako řešení rovnice

$$\frac{1}{16}(x-2)^2 = 1 \implies x = 6.$$

Nosič je tím pádem  $\text{supp}(h) = (2, 6)$ . Rozpětí je definováno jako rozdíl infima a suprema z nosiče. To je 4 a máme tedy  $\text{marg}(X) = 4$ . Střední hodnotu této náhodné veličiny získáme integrací hustoty pravděpodobnosti přes nosič a hustotu pravděpodobnosti dostaneme jako derivaci distribuční funkce, a proto  $h(x) = \frac{x-2}{8}$ . Střední hodnotu pak vypočteme jako

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{8} \int_2^6 x(x-2) dx = \frac{1}{8} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_2^6 = \frac{20}{3}.$$

A nakonec výpočet mediánu. Medián je takové  $a$ , pro které platí

$$\int_{-\infty}^a h(x) dx = \frac{1}{8} \int_2^a x - 1 dx = \frac{1}{16} a(a-2) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$a(a-2) = 8 \implies x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = 4.$$

Z nalezeného nosiče je pro nás ale přípustná pouze jedna hodnota a to  $x_2 = 4$ . Mediánem je tedy hodnota 4,  $\text{MED}(X) = 4$ .

## 6

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti  $z(x) = 4\Theta(x)xe^{-2x}$ .

*Řešení:*

Modus náhodné veličiny  $X$  je definovaný jako argument maxima z hustoty pravděpodobnosti:  $\text{mod}(X) = \arg \max f_X(x)$ . Tudíž ho budeme hledat pomocí derivace a následného vyšetření extrému. Provedme tedy derivace hustoty:

$$\frac{df_X}{dx}(x) = 4\Theta(x)e^{-2x}(1-2x).$$

Jelikož máme heavysideovu funkci v bodě  $x$ , tak víme, že hustota pravděpodobnosti je nulová pro všechna záporná  $x$ . Díky tomu se nám zúží obor na hledání extrému pouze na kladnou osu. Pojďme hledat extrém:

$$4e^{-2x}(1-2x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$1-2x = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Našli jsme bod podezřelý z extrému. Je doopravdy hledaným bodem? Podívejme se na intervaly monotonie této funkce:

$$\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : f'_X(x) > 0 \implies \text{funkce roste,}$$

$$\forall x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) : f'_X(x) < 0 \implies \text{funkce klesá.}$$

Z toho již vidíme, že tento bod je skutečně hledaným extrémem a máme  $\text{mod}(X) = \frac{1}{2}$ .

---

## 7

Pro náhodnou veličinu zadanou distribuční funkcí

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{(x-2)^2}{36} & x \in (2, 8) \\ 1 & x \geq 8 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a dolní kvartil.

*Řešení:*

Dolní kvartil je definován jako číslo, které rozděluje plochu pod křivkou na  $\frac{1}{4}$  a  $\frac{3}{4}$ . Platí proto pro něj následující

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_{-\infty}^a h(x) dx = H(a) \stackrel{!}{=} \frac{1}{4},$$

kde jsme využili definice distribuční funkce. Vyřešme rovnici

$$\begin{aligned} H(a) &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{36}(a-2)^2 &= \frac{1}{4} \\ a &= 5. \end{aligned}$$

Z našeho výpočtu plyne, že dolní kvartil je roven 5,  $Q_{\frac{1}{4}} = 5$ . Abychom toto cvičení úspěšně dořešili, tak si budeme muset zjistit hustoty pravděpodobnosti ze zadané distribuční funkce. Hustotu pravděpodobnosti získáme derivací distribuční funkce:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{18} & x \in (2, 8) \\ 0 & x \geq 8. \end{cases}$$

Je vidět, že nosič této hustoty je  $\text{supp}(h) = (2, 8)$ . To nám zúží integrační obor při hledání střední hodnoty.

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} xh(x) dx = \frac{1}{18} \int_2^8 x(x-2) dx = 6$$

Střední hodnota je tedy rovna 6.

---

## 8

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$z(x) = \frac{1}{416} (x^3 - 12x^2 + 45x),$$

definovanou na intervalu  $\langle 0, 8 \rangle$ . Mimo tento interval je hustota pravděpodobnosti nulová.

*Řešení:*

Modus je definovaný jako argument maxima hustoty pravděpodobnosti. Budeme proto hledat extrém této hustoty. Začneme vypočtením derivace a nalezením kritických bodů.

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{1}{416} (3x^2 - 24x + 45) \stackrel{!}{=} 0 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \\ (x-3)(x-5) &= 0 \implies x_1 = 3 \quad \wedge \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

Nalezli jsme 2 body podezřelé z extrému. Pojd'me je vyšetřit pomocí druhé derivace

$$\begin{aligned} z''(x) &= \frac{1}{416} (6x - 24) \\ z''(3) &= \frac{1}{416} (18 - 24) < 0 \\ z''(5) &= \frac{1}{416} (30 - 24) > 0. \end{aligned}$$

Z druhých derivací již vidíme, že bod  $x_2$  je minimem. Hledaným bodem je bod  $x_1 = 2$ , má zápornou druhou derivaci a můžeme ho prohlásit za námi hledaný modus,  $\text{mod}(X) = 3$ .

---

## 9

Ukažte, že rozptyl náhodné veličiny může být vypočten na základě znalosti několika málo momentů.

*Řešení:*

Víme, že rozptyl je definován jako  $\text{VAR}(X) = E(X - EX)^2$ . Abychom se někam dostali, tak nám nezbyvá nic jiného než umocnit.

$$\text{VAR}(X) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2)$$

Střední hodnota se chová jako lineární operátor:

$$E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X))^2.$$

Důležité je si dále uvědomit, že střední hodnota z čísla je to samé číslo:  $E(a) = a$ . Ještě bychom si měli uvědomit, že  $E(EX) = E(X)$ , protože  $E(X)$  je číslo.

$$E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Ted' už jsme dospěli k požadovanému výsledku. Rozptyl je možno počítat jako rozdíl druhého momentu a druhé mocniny momentu prvního náhodné veličiny. V praxi je to mnohem příjemnější vzoreček.

## 10

Nalezněte rozptyl náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{2x\Theta(x)}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}.$$

*Řešení:*

Abychom zjistili rozptyl náhodné veličiny dané hustotou  $h(x)$ , tak využijeme vzorce  $\text{VAR}(\mathcal{X}) = E(X^2) - (E\mathcal{X})^2$ . Budeme muset tedy vypočítat první a druhý moment náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ . To uděláme následujícím způsobem:

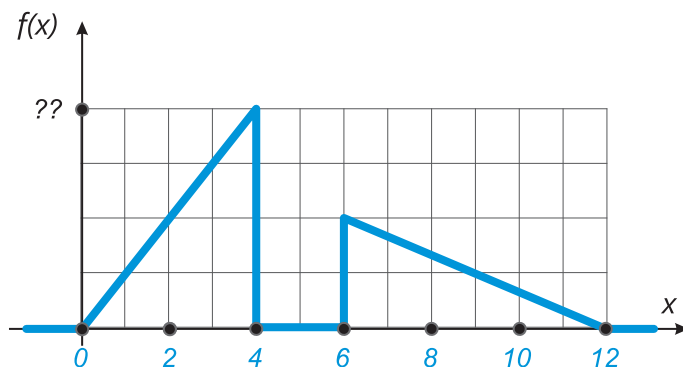
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{\mathbf{R}} x^2 \cdot f_{\mathcal{X}}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} x^2 \cdot \frac{2x\Theta(x)}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx = \\ &\stackrel{t=\frac{x^2}{\sigma^2}}{=} \frac{2}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{+\infty} t^1 e^{-t} dt = \sigma^2 \Gamma(2) = \sigma^2 \\ E(X) &= \int_{\mathbf{R}} x f_{\mathcal{X}}(x) dx = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx \stackrel{t=\frac{x^2}{\sigma^2}}{=} \sigma \int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt = \sigma \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sigma \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Ted' už můžeme vypočítat chtěný rozptyl:

$$\text{VAR}(\mathcal{X}) = \sigma^2 - \left(\sigma \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

## 11

Určete nosič, pravé pomezí a pravděpodobnost  $\mathcal{P}[\mathcal{X} < 3 \vee \mathcal{X} > 9]$  pro náhodnou veličinu  $\mathcal{X}$ , popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku.



*Řešení:*

Měli bychom si nejdříve ujasnit jaký rozměr mají obdélníčky na vertikální ose. To zjistíme pomocí vypočítání obsahu pro obrazec na obrázku a následnému položení do rovnosti s hodnotou 1, jelikož hustota pravděpodobnosti musí být normalizovaná na jedničku. Označme  $a$  jako délku jednoho obdélníčku. Pak musí platit:

$$\frac{4 \cdot 4a}{2} + \frac{6 \cdot 2a}{2} \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{1}{14}.$$

Nosič jsou takové  $x$ , kde hustota pravděpodobnosti nabývá nenulových hodnot a tím pádem je  $\text{supp}(f) = (2, 4) \cup (6, 12)$ . Právě pomezí je definováno jako  $\text{amb}_R(X) = \sup \text{supp}(f) = 12$ .

Pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X < 3 \vee X > 9]$  vypočteme jako součet jednotlivých pravděpodobností

$$\mathcal{P}[X < 3 \vee X > 9] = \mathcal{P}[X < 3] + \mathcal{P}[X > 9] = \mathcal{P}[X < 3] + 1 - \mathcal{P}[X \leq 9],$$

na konci jsme využili pravděpodobnost doplňkového jevu. Tyto pravděpodobnosti pro nás už pouze představují plochu pod křivkou do specifikované hodnoty.  $\mathcal{P}[X < 3]$  vypočteme jako obsah trojúhelníku se základnou na ose  $x$  o velikosti 3. Tento obsah se rovná  $\frac{9}{28}$ .  $\mathcal{P}[X \leq 9]$  vypočteme jako součet prvního trojúhelníku a rozdělení druhého trojúhelníku do jednoho obdélníku a trojúhelníku.

$$\mathcal{P}[X \leq 9] = \frac{4 \cdot \frac{4}{12}}{2} + \frac{1}{14} \cdot 3 + \frac{\frac{1}{14} \cdot 3}{2} = \frac{25}{28} \implies \mathcal{P}[X > 9] = \frac{3}{28}$$

Celková hledaná pravděpodobnost je tedy rovna  $\mathcal{P}[X < 3 \vee X > 9] = \frac{3}{7}$ .

---

## 12

Pro náhodnou veličinu zadanou hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 4 \\ \frac{x-4}{32} & x \in (4, 12) \\ 0 & x \geq 12 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a dolní kvartil.

*Řešení:*

V tomto příkladu si budeme muset dát pozor na integrační obor. Pojdme vypočítat střední hodnotu pro spojitou náhodnou veličinu. Začneme z definice:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} x \cdot h_X(x) \, dx = \int_4^{12} \frac{x^2 - 4x}{32} \, dx = \left[ \frac{x^3}{96} - \frac{4x^2}{64} \right]_4^{12} = \frac{28}{3}$$

V druhé rovnosti jsme se omezili pouze na nosič. Přejděme nyní k výpočtu dolního kvartilu. Dolní kvartil  $Q_{\frac{1}{4}}$  je definován jako:

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_{-\infty}^a h(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}.$$

Dosaďme a vuyžijme nosiče naší hustoty na zúžení integračního oboru

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_4^a \frac{x-4}{32} dx = \frac{1}{32} \left[ \frac{x^2}{2} - 4x \right]_4^a = \frac{1}{32} \left( \frac{a^2}{2} - 4a + 8 \right).$$

Výsledek už jen položíme roven  $\frac{1}{4}$ , dopočítáme  $a$  a jsme hotovi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{32} \left( \frac{a^2}{2} - 4a + 8 \right) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \\ a(a-8) &= 0 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

Dolní kvartil této náhodné veličiny je roven 8.

## 13

Pravděpodobnost je množinová funkce, která množinám přiřazuje číslo udávající pravděpodobnost, že výsledkem pokusu bude hodnota z dané množiny. Jaké obecné vlastnosti tato pravděpodobnost nutně splňuje?

*Řešení:*

Obecně máme daný pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Necht' dále  $(\forall j \in \mathbf{N}) (A_j \in \mathcal{A})$  a  $B \in \mathcal{A}$ . Pak platí:

- $P(\emptyset) = 0$
- **Aditivita:**  $P\left(\sum_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ ,
- **Monotonie:**  $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ ,
- **Subtraktivita:**  $A \subseteq B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,
- **Omezenost:**  $(\forall A \in \mathcal{A}) (P(A) \leq 1)$ ,
- **Komplementarita:**  $A \in \mathcal{A} \implies P(A^c) = 1 - P(A)$ .

Můžeme ještě doplnit pár poznatků o sjednocení množin (jevů):

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ,
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$ ,  
kde  $C \in \mathcal{A}$ ,

- $(\forall j \in N, A_j \in \mathcal{A}) \left[ P \left( \bigcup_{j=1}^{n_1+\infty} A_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n_1+\infty} P(A_j) \right].$

## 14

Pro náhodnou veličinu zadanou hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{18} & x \in (2, 8) \\ 0 & x \geq 8 \end{cases}$$

určete střední hodnotu a  $\alpha$ -kvantil, kde  $\alpha = 4/9$ . Vypočítejte také a co nejpřesněji vykreslete distribuční funkci.

*Řešení:*

Abychom toto cvičení vyřešili, tak si budeme muset zapsat nosič této náhodné veličiny. Ten je  $\text{supp}(h) = (2, 8)$ . To nám teď umožní zúžit obor integrace při výpočtu střední hodnoty a kvantilu.

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} xh(x) dx = \frac{1}{18} \int_2^8 x(x-2) dx = 6$$

$\alpha$ -kvantil rozděluje plochu pod křivkou na  $\alpha$  a  $1 - \alpha$ . Pro nás tedy rozděluje na  $\frac{4}{9}$  a  $\frac{5}{9}$ . Hledáme proto takové  $\beta$ , pro které platí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\beta} h(x) dx &= \frac{1}{18} \int_2^{\beta} x - 2 dx = \frac{1}{18} \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^{\beta} \stackrel{!}{=} \frac{4}{9} \\ \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^{\beta} &= 8 \\ \frac{\beta^2}{2} - 2\beta + 2 &= 8 \\ \beta^2 - 4\beta - 12 &= 0 \\ (\beta - 6)(\beta + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Pro nás je díky nosiči přípustný pouze kořen  $\beta = 6$  a je to hledaný  $\frac{4}{9}$ -kvantil.

## 15

Nalezněte modus náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = \frac{x}{216} (2x^2 - 21x + 60),$$

definovanou na intervalu  $\langle 0, 6 \rangle$ . Mimo tento interval je hustota pravděpodobnosti nulová.

*Řešení:*

Pro nalezení maxima budeme naši hustotu derivovat. Provedme tedy tuto derivaci

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}(x) &= \frac{1}{216} (6x^2 - 42x + 60) \stackrel{!}{=} 0 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ (x - 2)(x - 5) &= 0\end{aligned}$$

Našli jsme dva kritické body  $x_1 = 2, x_2 = 5$ . Dále vypočteme druhou derivaci pro určení typu extrému a dosadíme si kritické body

$$\begin{aligned}\frac{d^2g}{dx^2}(x) &= \frac{2x - 7}{36} \\ g''(2) &= -\frac{1}{12} < 0 \\ g''(5) &= \frac{1}{12} > 0\end{aligned}$$

Z tohoto již vidíme, že  $x_2$  je lokální minimum. Ještě bychom měli zkontrolovat body na hranici intervalu.

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ g(6) &= \frac{1}{6} \\ g(2) &= \frac{52}{216} \implies g(2) > g(6)\end{aligned}$$

Tedy už můžeme s jistotou říci, že modus této náhodné veličiny je 2,  $\text{mod}(X) = 2$ .

---

## 16

Nalezněte druhý moment náhodné veličiny  $X$  popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{32x^2 \Theta(x)}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2}.$$

Lze užít faktu, že  $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ .

*Řešení:*

Druhý moment náhodné veličiny vypočteme následujícím způsobem:

$$E(X^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 \cdot h(x) dx$$

Při výpočtu se zúžíme na nosič, jež je roven  $[0, +\infty)$ .

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 \cdot h(x) dx = \frac{32}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-4x^2} dx$$

Ted' bychom asi měli nějak využít zadaného vztahu  $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ . Jak? Mohli bychom si všimnout, že pokud budeme dvakrát tuto rovnost derivovat dle  $a$ , tak dostaneme náš integrál. Ovšem bychom si měli rozmyslet, zda je legální prohodit derivaci a integrál. Na přednášce se čtenář dozví, že tato záměna je skutečně oprávněná a odůvodňuje ji věta o derivaci integrálu s parametrem.

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \int_0^{\infty} (-x^2) e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \\ \frac{d^2}{da^2} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \int_0^{\infty} (x^4) e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

V našem případě je  $a = 4$ , takže už jen dosadíme a nezapomeneme na konstantu  $\frac{32}{\sqrt{\pi}}$ .

$$\frac{32}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} x^4 e^{-4x^2} dx = \frac{32}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{5}{2}} \stackrel{a=4}{=} \frac{3}{8}$$

## 17

Náhodná veličina  $\mathcal{Y}$  je popsána distribuční funkcí

$$H(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1; \\ \frac{(y-1)^3}{27} & y \in (1, 4); \\ 1 & y \geq 4. \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost  $\mathcal{P}[\mathcal{Y} > 2 \wedge \mathcal{Y} < 3]$  a střední hodnotu  $\mathcal{Y}$ .

*Řešení:*

Budeme postupovat dle definice distribuční funkce  $H(y) = \mathcal{P}(\mathcal{Y} \leq y)$  a upravíme si zadanou pravděpodobnost, kterou máme vypočítat

$$\mathcal{P}[\mathcal{Y} > 2 \wedge \mathcal{Y} < 3] = \mathcal{P}[2 < \mathcal{Y} < 3] = H(3) - H(2) = \frac{7}{27}.$$

Střední hodnotu vypočteme tak, že najdeme hustotu pravděpodobnosti a vyintegrujeme přes nosič.

$$H'(y) = \frac{(y-1)^2}{9} = f_Y(y)$$

Nosič je interval  $(1, 4)$ .

$$E(Y) = \int_{\mathbf{R}} y f_Y(y) dy = \int_1^4 y \frac{(y-1)^2}{9} dy = \frac{1}{9} \left[ \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} \right]_0^3 = \frac{13}{4}$$

Integrační meze se nám změnil, kvůli použití substituce  $t = y - 1$ .

---

## 18

Nosičem náhodné veličiny

$$X \sim g(x) = Ax(2x^2 - 21x + 60)$$

je interval  $(1, 6)$ . Nalezněte její modus.  $A$  je normalizační konstanta, jejíž hodnota nemá na výsledek žádný vliv.

*Řešení:*

Modus je argument maxima hustoty pravděpodobnosti. Budeme ho hledat pomocí derivace jako extrém. Derivujme hustotu  $g(x)$

$$g'(x) = A(6x^2 - 42x + 60)$$

Položme derivaci rovnou nule a najděme kritické body

$$A(6x^2 - 42x + 60) \stackrel{!}{=} 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x-2)(x-5) = 0$$

Našli jsme dva kritické body  $x_1 = 2, x_2 = 5$ . Dále vypočteme druhou derivaci pro určení typu extrému a dosadíme si kritické body

$$g''(x) = A(12x - 42)$$

$$g''(2) = -18A < 0$$

$$g''(5) = 18A > 0$$

Teď už můžeme s jistotou říci, že modus této náhodné veličiny je 2,  $\text{mod}(X) = 2$ . Krajní body nám výsledek neovlivní.

## 19

Diskrétní náhodná veličina  $\mathcal{Z}$  je popsána Poissonovým rozdělením

$$\mathcal{P}[\mathcal{Z} = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Vypočítejte střední hodnotu této náhodné veličiny. Číslo  $\lambda$  je pevně zvolený kladný parametr.

*Řešení:*

Abychom vypočítali střední hodnotu této diskrétní náhodné veličiny, budeme muset spočítat následující sumu

$$\mathbb{E}(\mathcal{Z}) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathcal{P}[\mathcal{Z} = k] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Začneme uvědoměním si, že pro  $k = 0$  je výraz roven nule a můžeme sčítat od  $k = 1$ .

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \left\| j = k-1 \right\| = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Dospěli jsme tudíž k celkem zajímavému výsledku  $\mathbb{E}(\mathcal{Z}) = \lambda$ .

## 20

Nechť pro náhodnou proměnnou  $\mathcal{X}$  platí, že

$$\mathcal{X} \sim g(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)},$$

kde  $a > 0$  je pevně zvolený parametr. Vypočítejte horní kvartil.

*Řešení:*

Horní kvartil nám rozděluje plochu pod zadanou křivkou na  $\frac{3}{4}$  a  $\frac{1}{4}$ . Je to tedy takové  $\alpha$ , pro které platí

$$\int_{-\infty}^{\alpha} g(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{3}{4}$$

Na nosič v zadání, ani z předpisu funkce nemáme žádné omezení a proto  $\text{supp}(g) = \mathbf{R}$ . Pustíme se

do výpočtu

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\alpha} g(x) dx &= \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{(a^2 + x^2)} dx = \frac{a}{\pi a^2} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx \stackrel{t=\frac{x}{a}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{a}} \frac{1}{1 + t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-\infty}^{\alpha} = \frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{a}\right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) \right)\end{aligned}$$

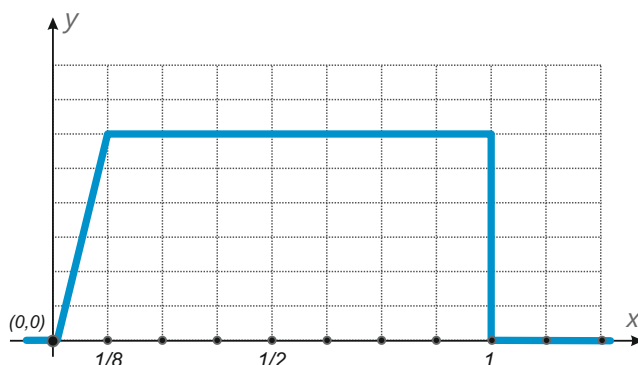
Tato hodnota se musí pro nějaké  $\alpha$  rovnat  $\frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \left( \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{a}\right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) \right) &\stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{a}\right) &\stackrel{!}{=} \frac{5}{4}\pi \quad / \operatorname{tg} \\ \alpha &= a\end{aligned}$$

Horní kvartil je roven  $a$ ,  $Q_{\frac{3}{4}} = a$ .

## 21

Pro náhodnou proměnnou popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku určete  $\alpha$ -kvantil, kde



$$\alpha = 1/3.$$

*Řešení:*

Pro úspěšné vyřešení tohoto příkladu budeme muset zjistit rozměr obdélníků ve vertikálním směru. Označme si ho  $a$ . Jelikož máme zadanou hustotu pravděpodobnosti, tak musí platit normalizační podmínka

$$\frac{\frac{1}{8} \cdot 6a}{2} + \frac{7}{8} \cdot 6a \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{8}{45}.$$

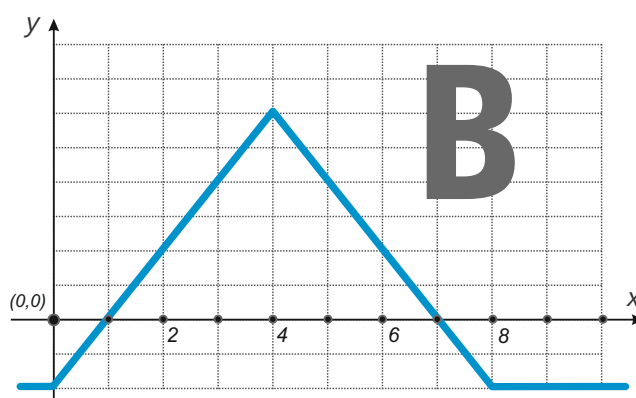
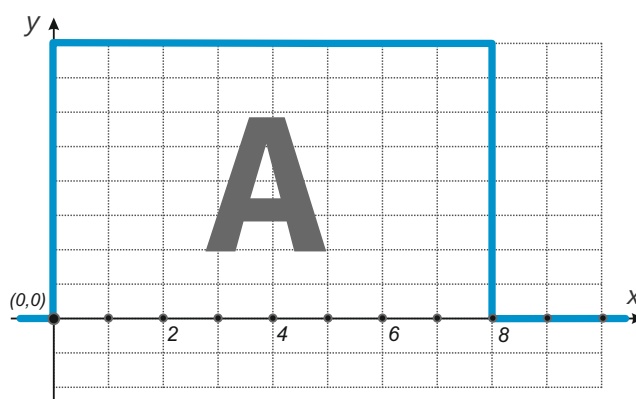
Dále máme najít  $\alpha$ -kvantil, kde  $\alpha = \frac{1}{3}$ . Tudíž hledáme takové  $x$ , které bude plochu pod křivkou rozdělovat na  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{2}{3}$ . Vypočteme si nejdříve obsah trojúhelníčku na levé straně obrazce.  $S_{\Delta} = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot \frac{8}{45} = \frac{2}{15}$ . Teď musíme najít takové  $c$ , aby platilo, že pokud sečteme  $\frac{2}{15} + c = \frac{1}{3} \implies c = \frac{3}{15}$ .  $c$  musí být obsah pod zbývajícím čtvercem v obrazci. Výška čtverce je jasně daná a tudíž musíme

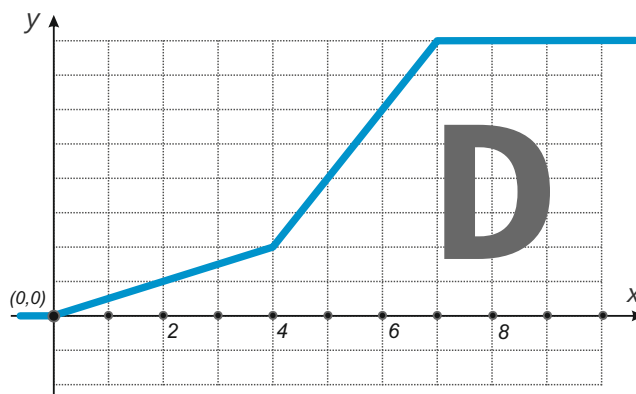
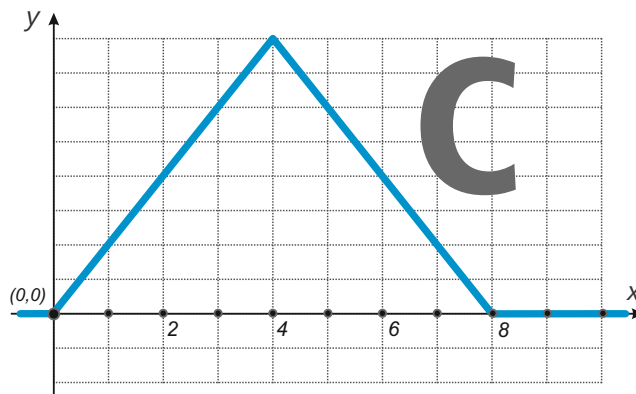
najít délku strany na ose  $x$  tak, aby platilo  $6 \cdot \frac{8}{45} \cdot d \stackrel{!}{=} \frac{3}{15}$ . Z toho už plyne  $d = \frac{3}{16}$ . Celkově dostáváme, že námi hledaný  $\alpha$ -kvantil, kde  $\alpha = \frac{1}{3}$  je:  $Q_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$ .

---

22

Pouze jediný z obrázků níže představuje distribuční funkci náhodné veličiny. Který to je? Pro tuto vybranou variantu určete, jaká je pravděpodobnost, že výsledkem pokusu bude hodnota z intervalu  $\langle 2, 5 \rangle$ .





*Řešení:*

Musíme si uvědomit jaké vlastnosti má distribuční funkce. Víme, že musí platit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ . Tato podmínka ovšem rozhodně není splněna pro obrázky *A*, *B* a *C*. Dále bychom je mohli také vyloučit dle další vlastnosti a to, že distribuční funkce je monotonně rostoucí. To nám nechává jediného kandidáta a to *D*.

Pro tuto distribuční funkci máme určit  $\mathcal{P}[2 \leq X \leq 5]$ . To je ovšem pouze rozdíl hodnot distribučních funkcí v krajních bodech  $\mathcal{P}[2 \leq X \leq 5] = H(5) - H(2)$ . Jak zjistit tyto hodnoty? Musíme určit rozměr na ose  $y$ . Jelikož maximální hodnota může být 1, tak to nám nutně dá rozměr jednoho čtverečku, označme vertikální rozměr čtverečku jako  $a$ . Musí platit, že

$$8 \cdot a \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{1}{8}.$$

Ted' již můžeme vyčíslit hodnoty distribučních funkcí v zadaných bodech:

$$\begin{aligned} H(2) &= \frac{1}{8} \\ H(5) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a tím pádem hodnota  $\mathcal{P}[2 \leq X \leq 5] = H(5) - H(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ .

## 23

Nalezněte takovou hodnotu parametru  $a > 0$ , aby rozptyl náhodné veličiny popsané hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{\Theta(a^2 - x^2)}{a} \left(1 - \left|\frac{x}{a}\right|\right),$$

kde  $\Theta(x)$  je Heavisideova funkce, byl roven 13,5.

*Řešení:*

Jako první si uvědomíme, co máme vypočítat, máme najít  $a$  tak, aby  $\text{VAR}(X) = 13,5$ . Pro výpočet rozptylu budeme potřebovat střední hodnotu této náhodné veličiny a její druhý moment. Krucální pro nás bude vyřešit jak vypadá nosič této náhodné veličiny s obecnou konstantou  $a$ . Jelikož je  $a > 0$ , tak si ještě můžeme tvar hustoty zjednodušit

$$h(x) = \frac{\Theta(a^2 - x^2)}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right)$$

Dále bychom se chtěli zbavit Heavisideovy funkce. Budeme proto řešit, kdy je její argument menší než nula.

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &< 0 \\ a &< |x| \end{aligned}$$

Argument funkce je záporný pro kladné i záporné  $x$ , které jsou větší než  $a$ , tedy  $\forall x \in (-a, a)$  je argument nezáporný. To nám automaticky dává nosič hustoty,  $\text{supp}(h) = (-a, a)$ . Se známým nosičem se již můžeme pustit do integrace.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xh(x) \, dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^a x \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \, dx$$

Než bychom se snažili dále upravovat, je užitečné se kouknout na integrand,  $|x|$  je sudá funkce a jestliže přidáme konstantu, tak se sudost nezmění, tudíž i  $1 - |x|$  je sudá funkce.  $x$  je naopak funkce lichá. Z prvního ročníku dále víme, že pokud vynásobíme funkci sudou a lichou, tak dostaneme funkci lichou. Tím pádem máme integrál přes symetrický interval z liché funkce a to je 0 a máme  $E(X) = 0$ . Druhý moment bude vypadat skoro stejně

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 h(x) \, dx = \frac{1}{a} \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \, dx$$

Tentokrát nenásobíme závorku funkcí lichou, nýbrž funkcí sudou. Jelikož máme integrál ze sudé funkce na symetrickém intervalu, jsme schopni tento integrál napsat jako dvojnásobek přes interval poloviční. Zároveň jsme tak schopni se zbavit absolutní hodnoty.

$$\frac{2}{a} \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \, dx = \frac{a^2}{6}$$

Konečně dosadíme do vzorce pro výpočet rozptylu a položíme rovno 13,5.

$$\begin{aligned}\text{VAR}(\mathcal{X}) &= \text{E}(\mathcal{X}^2) - (\text{E}(\mathcal{X}))^2 = \frac{a^2}{6} \\ \frac{a^2}{6} &\stackrel{!}{=} 13,5 \\ a &= 9\end{aligned}$$

A jsme hotovi, našli jsme konstantu  $a$  tak, aby byl rozptyl této náhodné veličiny roven 13,5.

---

## 24

Načrtněte graf funkce  $h(x)$  z předešlého příkladu a určete rozpětí nosiče.

*Řešení:*

Graf:

Nosič je  $\text{supp}(h) = (-9, 9)$  jak jsme určili v předchozím příkladě. Tvar hustoty pravděpodobnosti je  $h(x) = \frac{\Theta(9^2 - x^2)}{9} \left(1 - \frac{|x|}{9}\right)$ . Průsečíky s osou  $x$  jsou v bodech  $-9$  a  $9$ , přičemž průsečík s osou  $y$  je na hodnotě  $\frac{1}{9}$ . Musíme proto vykreslit dvě lineární funkce:

$$\begin{aligned}y_1(x) &= \frac{x}{81} + \frac{1}{9}, \forall x \in (-9, 0] \\ y_2(x) &= -\frac{x}{81} + \frac{1}{9}, \forall x \in (0, 9),\end{aligned}$$

kde nám tyto dvě úsečky společně s osou  $x$  tvoří rovnoramenný trojúhelník. Rozpětí nosiče vypočteme jako rozdíl pravého a levého pomezí naší náhodné veličiny.

$$\begin{aligned}\text{amb}_L &= \inf \text{supp}(\mathcal{X}) = -9 \\ \text{amb}_R &= \sup \text{supp}(\mathcal{X}) = 9 \\ \text{marg}(\mathcal{X}) &= \text{amb}_R - \text{amb}_L = 18\end{aligned}$$

Rozpětí nosiče je tedy 18.

---

## 25

Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné (jistého experimentu) má tvar

$$g(x) = Ax\Theta(x)\Theta(4-x).$$

Stanovte hodnotu  $A$  a vyčíslete střední hodnotu této proměnné.

*Řešení:*

V tomto příkladě je nutné si rozmyslet nosič zadané náhodné veličiny. Funkce  $\Theta(x)$  nám nuluje všechna  $x \in \mathbf{R}^-$ . Funkce  $\Theta(4-x)$  nám zase nuluje všechna  $x \in (4, +\infty)$ . Tyto dvě podmínky nám nechávají interval  $[0, 4]$ , pro který mají obě theta funkce hodnotu rovnu jedné. Teď musíme určit konstantu  $A$  tak, aby funkce  $g(x)$  byla skutečnou hustotou pravděpodobnosti. Musíme zaručit platnost podmínky

$$\int_{\mathbf{R}} g(x) dx \stackrel{!}{=} 1.$$

Ve výpočtu se z celého  $\mathbf{R}$  omezíme pouze na skutečný nosič.

$$A \int_0^4 x dx \stackrel{!}{=} 1$$
$$A = \frac{1}{8}$$

Máme tedy plný tvar funkce  $g(x) = \frac{1}{8}x\Theta(x)\Theta(4-x)$ . Střední hodnotu teď již dopočteme snadno

$$E(X) = \frac{1}{8} \int_0^4 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

---

## 26

S jakou pravděpodobností bude výsledek experimentu popsaného v předešlém příkladě menší než jeho střední hodnota?

*Řešení:*

Střední hodnota z minulé příkladu je  $\frac{8}{3}$ . Označme si  $p$  jako hledanou pravděpodobnost a mějme stejnou náhodnou veličinu  $X$ . Musíme vypočítat následující hodnotu

$$\mathcal{P}[X < \frac{8}{3}] \equiv p$$

Tuto hodnotu můžeme buď vypočítat jako hodnotu distribuční funkce v bodě  $\frac{8}{3} \rightarrow G(\frac{8}{3})$ , nebo vypočítat integrál z hustoty od 0 do  $\frac{8}{3}$ . Když máme hustotu, tak bude nejjednodušší provést integraci

$$p = \int_{-\infty}^{\frac{8}{3}} g(x) dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{8}{3}} x dx = \frac{4}{9}.$$

Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny  $X$  s hustotou pravděpodobnosti  $g(x) = \frac{1}{8}x\Theta(x)\Theta(4-x)$  bude menší než její střední hodnota  $\frac{8}{3}$  je rovna  $\frac{4}{9}$ .

---

Náhodná proměnná  $X$  je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{3(4-x^2)}{32} \Theta(4-x^2).$$

Nalezněte její nosič, rozpětí, levé a pravé pomezí, modus, medián, střední hodnotu a rozptyl.

*Řešení:*

Začneme s nosičem. Ten je dán heavisideovou funkcí a jejím argumentem. Musíme vyřešit podmínku  $4-x^2 < 0$ . Ta je splněna pro  $\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-2, 2]$ . Ještě se koukneme na závorku ve funkci  $4-x^2$ , jež je nulová pro  $x = \pm 2$ . Máme tedy  $\text{supp}(h) = (-2, 2)$ . Vyřešme dále rozpětí a levé a pravé pomezí. Levé a pravé pomezí je definováno následovně

$$\begin{aligned} \text{amb}_L(X) &= \inf \text{supp}(X) & \implies & \text{amb}_L(X) = -2 \\ \text{amb}_R(X) &= \sup \text{supp}(X) & \implies & \text{amb}_R(X) = 2 \end{aligned}$$

Rozpětí nosiče je definováno jako rozdíl pravého a levého pomezí  $\implies \text{marg}(X) = 4$ .

Abychom našli modus, tak bychom měli derivovat, najít body podezřelé z extrému a vyšetřit je. My si ovšem ušetříme práci. Koukneme se na předpis této funkce  $h(x) = \frac{3(4-x^2)}{32}$ . Konstanty nemusíme řešit, zaměříme se pouze na  $4-x^2$ . Je to parabola a díky znaménku mínus je oteřená směrem dolů. Z toho můžeme usoudit, že bod maxima této funkce je v 0. Modus této náhodné veličiny je roven 0,  $\text{mod}(X) = 0$ .

Dále vypočteme medián. Medián rozděluje plochu pod grafem funkce  $h(x)$  na polovinu. Musí platit

$$\int_{-\infty}^{\text{MED}(X)} h(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}.$$

Pro nás

$$\frac{3}{32} \int_{-2}^{\text{MED}(X)} (4-x^2) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}.$$

Po integraci dostaneme kubickou rovnici, ale jenom jeden její kořen je součástí nosiče. Tento kořen má hodnotu 0. Proto  $\text{MED}(X) = 0$ . K tomuto jsme také mohli dojít mnohem rychleji.  $4-x^2$  je sudá funkce a proto plocha pod křivkou bude rovna jedné polovině pro takové  $x$ , které je extrémem  $\implies \text{mod}(X)$ .

Střední hodnotu a rozptyl najdeme opět integrací z jejich definice a následným zúžením na nosič.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbf{R}} xh(x) dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^2 x(4-x^2) dx \stackrel{\text{lichost}}{=} 0 \\ E(X^2) &= \int_{\mathbf{R}} x^2h(x) dx \stackrel{\text{sudost}}{=} 2 \cdot \frac{3}{32} \int_0^2 x^2(4-x^2) dx = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Rozptyl je pak dán jako  $\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{4}{5}$ .

## 28

Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné má tvar

$$g(x) = \frac{3x^2}{64} \Theta(x) \Theta(4-x).$$

Jaká je její střední hodnota a horní kvartil?

*Řešení:*

Opět začneme nosičem. Nosič je díky heavisideovým funkcím omezen na interval  $(0, 4]$ . Střední hodnota je

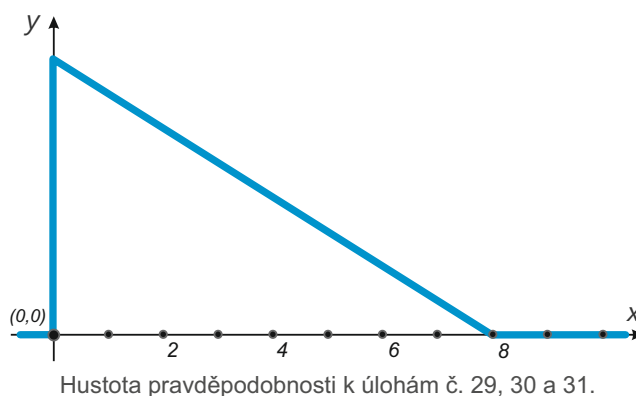
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbf{R}} xg(x) \, dx = \frac{3}{64} \int_0^4 x^3 \, dx = 3.$$

Horní kvartil, což je takové  $a$ , pro které je plocha pod křivkou rovna  $\frac{3}{4}$ , je

$$Q_{\frac{3}{4}} = \int_{-\infty}^a g(x) \, dx = \frac{3}{64} \int_0^a x^2 \, dx = \frac{a^3}{64} \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \implies a = 2 \cdot 6^{\frac{1}{3}}.$$

## 29

Najděte pravděpodobnost, že výsledkem pokusu, jehož hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže, nebude hodnota menší než pět.



*Řešení:*

Abychom mohli najít požadovanou pravděpodobnost, tak budeme nejdříve muset najít předpis přímky na obrázku. Začneme s obecným předpisem přímky a její koeficienty najdeme pomocí

normalizační podmínky a průsečíku s osou  $x$ . Mějme

$$f(x) = ax + b,$$

musí platit, že  $f(8) = 0$  a  $\int_0^8 f(x) dx = 1$ .

$$\int_0^8 f(x) dx = \int_0^8 ax + b dx = \left[ a \frac{x^2}{2} + bx \right]_0^8 = 32a + 8b$$

Máme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 8a + b &= 0 \\ 32a + 8b &= 1 \quad \implies \quad a = -\frac{1}{32}, b = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Předpis vyobrazené hustoty je  $f(x) = -\frac{1}{32}x + \frac{1}{4}$ . Teď již můžeme přejít k výpočtu chtěné pravděpodobnosti:  $\mathcal{P}[X > 5]$ . Máme dvě možnosti jak tuto hodnotu vypočítat. Buď budeme počítat pravděpodobnost doplňkového jevu a nebo přímo zadanou pravděpodobnost. Je to v podstatě jedno. Výpočet obou je nakonec stejný:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[X > 5] &= \int_5^8 f(x) dx = 1 - \int_0^5 f(x) dx \\ &= \int_5^8 \left( -\frac{1}{32}x + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{9}{64}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X$  nabyde hodnoty větší jak 5 je  $\mathcal{P}[X > 5] = \frac{9}{64}$ .

---

## 30

Pro předešlou úlohu nalezněte střední hodnotu.

*Řešení:*

Střední hodnota je definována jako  $E(X) = \int_{\mathbf{R}} xf(x) dx$ . Dosadíme, omezíme se na nosič a dopočteme

$$E(X) = \int_0^8 \left( -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{4}x \right) dx = \frac{8}{3}.$$

---

## 31

K hustotě pravděpodobnosti z předešlého obrázku vykreslete odpovídající distribuční funkci.

*Řešení:*

Abychom mohli distribuční funkci vykreslit, tak ji musíme nejdříve vypočítat. Distribuční funkce je definována jako

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Při dosazení se omezíme na nosič hustoty pravděpodobnosti  $\text{supp}(f) = [0, 8)$ .

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{4} - \frac{t}{32} dt = \left[ \frac{t}{4} - \frac{t^2}{64} \right]_0^x = -\frac{x^2}{64} + \frac{x}{4}$$

Celkovou distribuční funkci můžeme tedy zapsat následovně:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 8 \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Distribuční funkce bude začínat v 0 dle předpisu  $-\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{4}x$ . Bude to parabola otevřená směrem dolů a dosáhne 1 pro  $x = 8$ .

---

## 32

Jakou střední hodnotu a jaký rozptyl má náhodná proměnná distribuovaná podle hustoty pravděpodobnosti

$$h(x) = \frac{8}{3}\Theta(x)x^3e^{-2x}?$$

*Řešení:*

Předtím než začneme počítat střední hodnotu tak si ujasněme nosič této náhodné veličiny. Nosič je  $\text{supp}(h) = (0, +\infty)$ . Střední hodnotu najdeme následovně

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} xh(x) dx = \frac{8}{3} \int_0^{+\infty} x^4 e^{-2x} dx \stackrel{t=2x}{=} \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t} dt = \frac{1}{12} \Gamma(5) = \frac{1}{12} 4! = 2.$$

Pro rozptyl budeme muset ještě vypočítat druhý moment. Ten však vypočteme skoro stejně jako střední hodnotu, použitá substituce bude úplně stejná.

$$E(X^2) = \int_{\mathbf{R}} x^2 h(x) dx = \frac{8}{3} \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^5} \int_0^{+\infty} t^5 e^{-t} dt = \frac{1}{24} \Gamma(6) = \frac{1}{24} 5! = 5$$

Rozptyl je tudíž:  $\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 4 = 1$ .

### 33

Jaký modus má náhodná proměnná z předchozího příkladu?

*Řešení:*

Modus zde nevypozorujeme triviálně. Budeme hledat argument maxima hustoty pravděpodobnosti  $h(x) = \frac{8}{3}x^3e^{-2x}$ . Provedeme derivaci a položíme ji rovnou nule. Dále najdeme body podezřelé z extrému a vyšetříme je.

$$h'(x) = \frac{8}{3}x^2e^{-2x}(3 - 2x) \stackrel{!}{=} 0$$

$$x^2(3 - 2x) = 0 \implies x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$$

Máme dva body podezřelé z extrému. Podíváme se ještě na druhou derivaci.

$$g''(x) = \frac{16}{3}e^{-2x}x(2x^2 - 6x + 3)$$

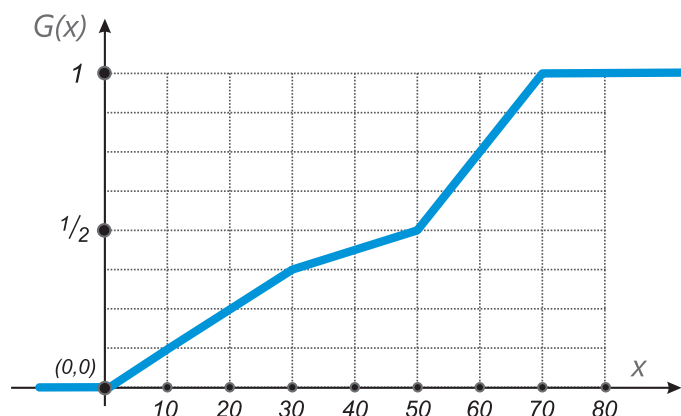
$$g''(0) = 0$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{12}{e^3} < 0 \implies \text{maximum}$$

Vidíme, že nula bodem maxima není, ovšem  $x_2$  bodem maxima už je. Můžeme tudíž už prohlásit, že  $\text{mod}(X) = \frac{3}{2}$ .

### 34

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehých měření) pro náhodnou veličinu z obrázku.



*Řešení:*

Pro vykreslení box-plotu budeme potřebovat kvartily: dolní kvartil, horní kvartil a také medián. Dolní kvartil je takové  $x$ , pro které je plocha pod hustotou pravděpodobnosti rovna  $\frac{1}{4}$ . To je ovšem stejné jako když budeme hledat takové  $x$ , pro které je  $G(x) = \frac{1}{4}$ . Takto najdeme všechny následující hodnoty:

$$\begin{aligned}x_1 : G(x_1) &= \frac{1}{4} \implies x_1 = 20 \\x_2 : G(x_2) &= \frac{1}{2} \implies x_2 = 50 \text{ (medián)} \\x_3 : G(x_3) &= \frac{3}{4} \implies x_3 = 60.\end{aligned}$$

Tyto hodnoty nám už stačí k vykreslení box-plotu.

## 35

Náhodná veličina  $X$  je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{\Theta(2 - |x|)}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}.$$

Vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny  $Y = 2X$  a do stejného obrázku vykreslete také  $f(x)$ .

*Řešení:*

Nejdříve rozeberme trochu jak vypadá zadaná hustota pravděpodobnosti. Je to parabola, která je otevřená směrem dolů. Průsečíky s osou  $x$  jsou  $-2$  a  $2$ ,  $\text{supp}(f) = (-2, 2)$ . Průsečík s osou  $y$  je roven  $\frac{1}{\pi}$ .

Náhodná veličina  $Y$  je definována jako lineární transformace  $Y = aX = b$ , kde  $a = 2$  a  $b = 0$ . Z přednásky víme, že hustota transformované náhodné veličiny je

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{x - b}{a}\right).$$

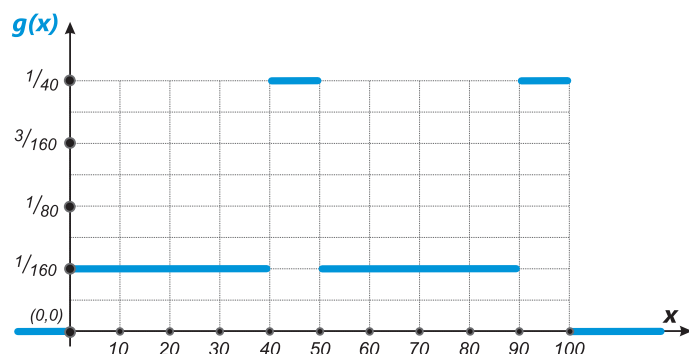
Pro nás to tedy je

$$f_Y(x) = \frac{1}{2} f_X\left(\frac{x - 0}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \Theta\left(2 - \frac{|x|}{2}\right) \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4\pi} \Theta\left(2 - \frac{|x|}{2}\right) \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}.$$

Můžeme si všimnout, že nosič náhodné veličiny se nám zvětšil na  $\text{supp}(f_Y) = (-4, 4)$ . Tvar paraboly se zachoval a je stále otevřená směrem dolů. Průsečík s osou  $y$  se nám posunul níže na hodnotu  $\frac{1}{2\pi}$ . Hustota se nám touto transformací lehce rozplácla.

## 36

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehklých měření) pro náhodnou veličinu, jejíž hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže.



*Řešení:*

Pro vykreslení box-plotu budeme potřebovat dolní a horní kvartil a medián. Budeme tedy hledat vždy takové  $a$ , pro které platí následující:

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_{-\infty}^{a_1} g(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{4}$$

$$Q_{\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{a_2} g(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$Q_{\frac{3}{4}} = \int_{-\infty}^{a_3} g(x) dx \stackrel{!}{=} \frac{3}{4}$$

Toto jsou ovšem zbytečně složité výpočty pro tento příklad. Jednodušší bude počítat obsahy pod jednotlivými částmi zadané hustoty. Zkusme najít  $Q_{\frac{1}{4}}$ . Plocha pod první částí křivky je  $S_1 = 40 \cdot \frac{1}{160} = \frac{1}{4}$ . Z toho vidíme, že  $Q_{\frac{1}{4}} = 40$ . Plocha pod druhou částí křivky je  $S_2 = 10 \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$ . To je ovšem příhodné, protože plocha pod první a druhou křivkou je rovna  $\frac{1}{2}$ . To tím pádem znamená, že  $Q_{\frac{1}{2}} = 50$ . Plocha pod třetí křivkou  $S_3 = 40 \cdot \frac{1}{160} = \frac{1}{4}$ . Tento výsledek nám dá náš poslední kvartil, protože  $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{4}$  a tím pádem  $Q_{\frac{3}{4}} = 90$ .

## 37

Parametry hustoty pravděpodobnosti

$$f(x) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

nastavte tak, aby střední hodnota náhodné veličiny byla rovna jedné a rozptyl jedné třetině. Užijte vztahu

$$\int_0^\infty y^{s-1} e^{-y} dy = \Gamma(s).$$

Řešení:

Parametry hustoty, které máme nastavit jsou  $\alpha$  a  $\lambda$ . Abychom tyto hodnoty určili nezbývá nám nic jiného než vypočítat střední hodnotu a rozptyl, ty položit do rovnosti se zadanými hodnotami a z těchto dvou rovnic určit hodnoty paramterů. Nicméně bychom si ještě měli ujasnit jaký je nosič této hustoty. To ale zjistíme velmi jednoduše, heavisideova funkce nám prostor  $\mathbf{R}$  redukuje pouze na  $[0, +\infty)$ . Samotné  $x$  v argumentu nám ho ještě zúží na  $\text{supp}(f) = (0, +\infty)$ . Při integracích využijeme Gamma funkce.

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\lambda x} dx \stackrel{t=\lambda x}{=} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda^\alpha} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 1) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \\ E(X^2) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \left\| \text{stejný postup} \right\| = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Dopočtěme rozptyl

$$\text{VAR}(X) = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} - \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \right)^2.$$

Položme do rovností se zadanými hodnotami

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \stackrel{!}{=} 1 & \implies \lambda &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \\ \text{VAR}(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\lambda^2 \Gamma(\alpha)} - \left( \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} \right)^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dosadíme  $\lambda$  do rozptylu

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha)} - \underbrace{\left( \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} \right)^2}_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)^2} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

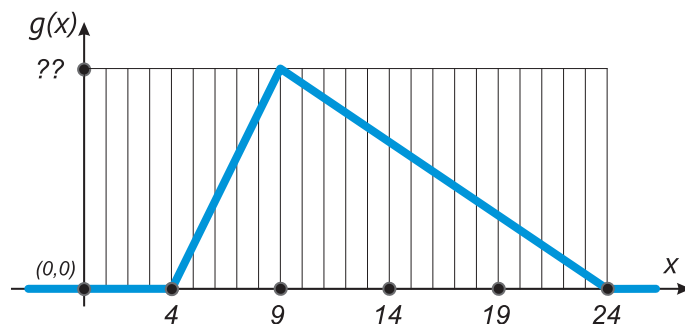
Uvažujme  $\alpha \in \mathbf{N}$ , pak  $\Gamma(s) = (s - 1)!$  a dostaneme

$$\frac{(\alpha + 1)!(\alpha - 1)!}{(\alpha!)^2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \stackrel{!}{=} \frac{4}{3} \implies \alpha = 1 \implies \lambda = 1.$$

## 38

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  je funkce z obrázku. Do obrázku připraveného na druhém papíře vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny  $Y = \frac{X}{2}$ . Doplňte také chybějící

údaj v obrázku.



*Řešení:*

Abychom příklad úspěšně dořešili, tak musíme najít vertikální rozměr v obrázku. To zjistíme pomocí normalizační podmínky, označme si vertikální rozměr  $a$ .

$$\frac{20 \cdot a}{2} \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{1}{10}$$

Pro zjištění tvaru transformované hustoty pravděpodobnosti by se nám vyplatilo ještě zjistit tvar původní hustoty. Ta se bude skládat ze dvou úsečků. Ty najdeme následovně:

$$y(x) = ax + b$$

$$y_1(4) = 0 = 4a + b$$

$$y_2(9) = \frac{1}{10} = 9a + b$$

$$y_1(9) = \frac{1}{10} = 9a + b$$

$$y_2(24) = 0 = 24a + b$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$y_1(x) = \frac{1}{50}x - \frac{2}{25}, x \in (4, 9]$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{150}x + \frac{4}{25}, x \in (9, 24].$$

Původní hustotu můžeme zapsat jako:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 4] \\ y_1(x) = \frac{1}{50}(x - 4), & x \in (4, 9] \\ y_2(x) = -\frac{1}{150}(x - 9) + \frac{1}{10}, & x \in (9, 24] \\ 0, & x \in (24, +\infty). \end{cases}$$

Transformovaná hustota pravděpodobnosti bude vypadat dle lineární transformace takto

$$g_Y(x) = \frac{1}{|a|}g\left(\frac{x-b}{a}\right), \text{ kde } a = \frac{1}{2} \text{ a } b = 0$$

$$g_Y(x) = 2g(2x).$$

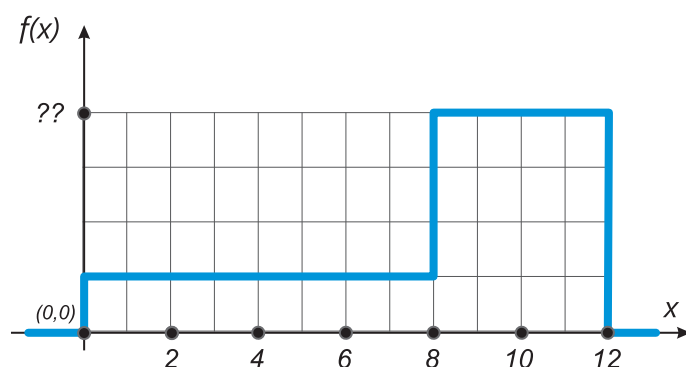
Ted' dosad' me

$$g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2] \\ y_1(x) = \frac{2}{25}(x-2), & x \in (2, 4.5] \\ y_2(x) = -\frac{1}{75}(2x-9) + \frac{1}{5}, & x \in (4.5, 12] \\ 0, & x \in (12, +\infty) \end{cases}$$

Je vidět, že se nám zmenšil nosič na interval  $\text{supp}(f_Y) = (2, 12)$ , přičemž nám jednotlivé usečky vytvořili 'špičatější' trojúhelník s kratší základnou.

39

Nakreslete zjednodušený box-plot (tj. bez odlehklých měření) pro náhodnou veličinu, jejíž hustota pravděpodobnosti je vyobrazena na obrázku níže.



Řešení:

Nejdříve si zjistíme vertikální rozměr obdélníčků. Již klasicky tento rozměr zjistíme z normalizační podmínky. Označme si vertikální rozměr obdélníčku  $a$ . Pak musí platit následující:

$$8 \cdot a + 4 \cdot 4a \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{1}{24}.$$

Zadaná hustota z obrázku jde zapsat tím pádem takto:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus [0, 12) \\ \frac{1}{24}, & x \in [0, 8) \\ \frac{1}{6}, & x \in [8, 12). \end{cases}$$

Pro nakreslení box-plotu budeme potřebovat zjistit medián a dolní a horní kvartil. Lepší než tipovat, jaké  $x$  je který kvartil, bude lepší je najít pomocí integrace. Integrační obor zde volíme dle intuice. Dolní kvartil se bude nejspíše vyskytovat v první části zadané hustoty. Medián a horní kvartil budou

již v druhé části.

$$Q_{\frac{1}{4}} = \int_{-\infty}^{a_1} f(x) dx = \int_0^{a_1} \frac{1}{24} dx = \frac{a_1}{24} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = 6$$

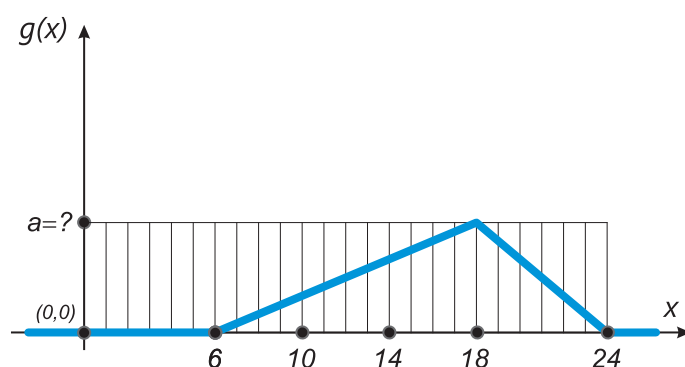
$$Q_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \cdot 8 + \int_8^{a_2} \frac{1}{6} dx = \frac{a_2}{6} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow a_2 = 9$$

$$Q_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24} \cdot 8 + \int_8^{a_3} \frac{1}{6} dx = \frac{a_3}{6} - 1 \stackrel{!}{=} \frac{3}{4} \Rightarrow a_3 = \frac{21}{2}$$

Ted' již máme vše pro nakreslení box-plotu.

## 40

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny  $Y = \frac{X}{3}$ . Čemu se musí rovnat číslo  $a$  z obrázku?



*Řešení:*

Nejdříve musíme zjistit jakou hodnotu má konstanta  $a$ . Tu určíme z normalizační podmínky a obsahu trojúhelníku. Musí platit, že

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{18 \cdot a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

Z obrázku vidíme, že hustota  $g(x)$  je tvořena dvěma usečkami. Jejich předpis určíme pomocí krajních bodů:

$$y(x) = ax + b$$

$$y_1(6) = 0 = 6a + b$$

$$y_2(18) = \frac{1}{9} = 18a + b$$

$$y_1(18) = \frac{1}{9} = 18a + b$$

$$y_2(24) = 0 = 24a + b$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$y_1(x) = \frac{1}{108}x - \frac{1}{18}, x \in (6, 18]$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{54}x + \frac{4}{9}, x \in (18, 24].$$

Původní hustotu můžeme zapsat jako:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 6] \\ y_1(x) = \frac{1}{108}(x-6), & x \in (6, 18] \\ y_2(x) = -\frac{1}{54}(x-24), & x \in (18, 24] \\ 0, & x \in (24, +\infty). \end{cases}$$

Transformovaná hustota pravděpodobnosti bude vypadat dle lineární transformace takto

$$g_Y(x) = \frac{1}{|a|}g\left(\frac{x-b}{a}\right), \text{ kde } a = \frac{1}{3} \text{ a } b = 0$$

$$g_Y(x) = 3g(3x).$$

Tedy dosadíme

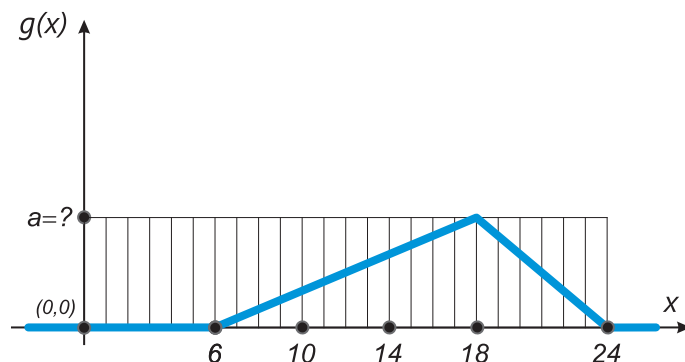
$$g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2] \\ y_1(x) = \frac{1}{12}(x-2), & x \in (2, 6] \\ y_2(x) = -\frac{1}{6}(x-8), & x \in (6, 8] \\ 0, & x \in (8, +\infty). \end{cases}$$

Toto je naše transformovaná hustota pravděpodobnosti. Do obrázku už jen zakreslíme tyto dvě úsečky. Můžeme si všimnout, že nosič transformované náhodné veličiny se zmenšil na  $\text{supp}(g_Y) = (2, 8)$  a hustota je špičatější.

## 41

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$Y = \frac{X}{2} - 3.$$



Řešení:

Tvar hustoty pravděpodobnosti máme určený již z minulého příkladu:

$$g_X(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 6] \\ y_1(x) = \frac{1}{108}(x-6), & x \in (6, 18] \\ y_2(x) = -\frac{1}{54}(x-24), & x \in (18, 24] \\ 0, & x \in (24, +\infty). \end{cases}$$

Náhodná veličina  $\mathcal{Y}$  vznikne lineární transformací z náhodné veličiny  $\mathcal{X}$ .

$$\mathcal{Y} = a\mathcal{X} + b, \text{ kde } a = \frac{1}{2} \text{ a } b = -3.$$

Tvar hustoty pravděpodobnosti dostaneme následovně

$$g_Y(x) = \frac{1}{|a|} g_X\left(\frac{x-b}{a}\right) = 2g_X(2x+6).$$

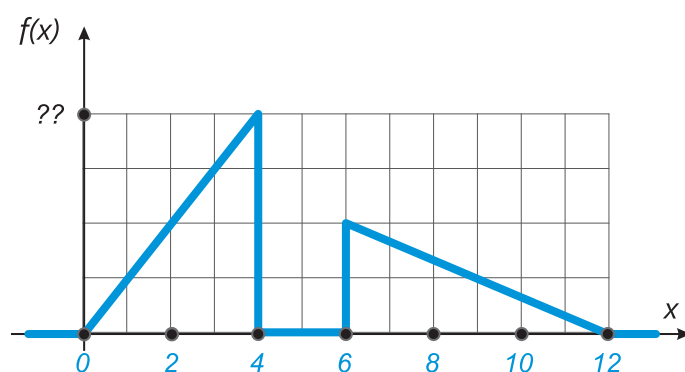
Po dosazení dostaneme transformovanou hustotu náhodné veličiny  $\mathcal{Y}$ :

$$g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ y_1(x) = \frac{1}{27}x, & x \in (0, 6] \\ y_2(x) = -\frac{2}{27}(x-9), & x \in (6, 9] \\ 0, & x \in (9, +\infty). \end{cases}$$

Na nové hustotě můžeme vidět nejenom, že nosič se zmenšil, ale celkově se posunula vlevo.

## 42

Určete nosič, pravé pomezí a pravděpodobnosti  $\mathcal{P}[X < 2 \wedge X > 6]$ ,  $\mathcal{P}[X < 2 \vee X > 6]$  pro náhodnou veličinu  $\mathcal{X}$ , popsanou hustotou pravděpodobnosti z obrázku.



*Řešení:*

Nosič je definován jako množina bodů  $x$ , pro které hustota pravděpodobnosti nabývá nenulových hodnot. Z obrázku vidíme, že nosič je  $\text{supp}(f) = (0, 4) \cup (6, 12)$ . Pravé pomezí je definováno jako

suprémum z nosiče a proto  $\text{amb}_R = 12$ . Abychom mohli dále postupovat, bude nutné opět určit vertikální rozměr. Označme si délku jednoho obdélníčku  $a$ . Pak musí z normalizační podmínky platit:

$$\frac{4 \cdot 4a}{2} + \frac{6 \cdot 2a}{2} \stackrel{!}{=} 1 \implies a = \frac{1}{14}.$$

$\mathcal{P}[X < 2 \wedge X > 6]$  vyřešíme lehce. Musí platit  $X < 2 \wedge X > 6$ , to ovšem nemůže platit současně a tím pádem je tento jev nemožný  $\implies \mathcal{P}[X < 2 \wedge X > 6] = 0$ . Druhá pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X < 2 \vee X > 6]$  nám již vypočítat půjde a to roztržením na součet jednotlivých pravděpodobností  $\mathcal{P}[X < 2]$  a  $\mathcal{P}[X > 6] = 1 - \mathcal{P}[X \leq 6]$ .

První pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X < 2]$  vypočteme jako obsah trojúhelníka s délkou podstavy 2.

$$\mathcal{P}[X < 2] = \frac{2 \cdot \frac{2}{14}}{2} = \frac{1}{7}$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X$  nabyde hodnoty menší než 6 je při stejné úvaze rovna obsahu celého prvního trojúhelníku.

$$\mathcal{P}[X > 6] = 1 - \mathcal{P}[X \leq 6] = 1 - \frac{4 \cdot \frac{4}{14}}{2} = 1 - \frac{8}{14} = \frac{3}{7}$$

Dostáváme tudíž výslednou hodnotu pro celkovou pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X < 2 \vee X > 6]$  a to

$$\mathcal{P}[X < 2 \vee X > 6] = \mathcal{P}[X < 2] + \mathcal{P}[X > 6] = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

## 43

Data z úryvku tabulky

| Pořadí měření             | Naměřená hodnota | Kvadrát naměřené hodnoty |
|---------------------------|------------------|--------------------------|
| 1                         | 4,51             | 20,3401                  |
| 2                         | 2,01             | 4,0401                   |
| 3                         | 2,88             | 8,2944                   |
| 4                         | 1,56             | 2,4336                   |
| 5                         | 0,98             | 0,9604                   |
| 6                         | 4,25             | 18,0625                  |
|                           |                  |                          |
|                           |                  |                          |
| 97                        | 6,84             | 46,7856                  |
| 98                        | 2,41             | 5,8081                   |
| 99                        | 1,86             | 3,4596                   |
| 100                       | 3,22             | 10,3684                  |
| Součet hodnot ve sloupci: | 200              | 500                      |

pochází z náhodného výběru popsaného hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \Theta(x) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

Pro jaké konkrétní hodnoty parametrů  $\alpha$  a  $\lambda$  byl tento výběr pořízen?

*Řešení:*

Pro vyřešení tohoto příkladu si musíme uvědomit jak se počítá střední hodnota a rozptyl pro Gamma rozdělení. Proč? Obsahuje totiž právě požadované parametry  $\alpha$  a  $\lambda$ . Jelikož máme k dispozici data, tak si můžeme napočítat odhady střední hodnoty a rozptylu. Začneme zmíněnými odhady. Střední hodnotu můžeme pro data odhadnout následovně  $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , kde  $n$  je počet dat a  $X_i$  jsou jednotlivé naměřené hodnoty. Rozptyl pak získáme ještě pomocí odhadu druhého momentu,  $\hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , a využití vzorce  $\text{VAR}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .

Po sečtení hodnot dostaneme, že

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 3.052 \\ \hat{v} &= 12.05528.\end{aligned}$$

Rozptyl je poté roven  $\text{VAR}(X) = 2.74058$ . Teď již přejdeme k zadanému rozdělení. Je to obecné Gamma rozdělení, pro které je možno vypočítat jak střední hodnotu tak i rozptyl v uzavřené formě. Pro náhodnou veličinu  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$  platí

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{\alpha}{\lambda} \\ \text{VAR}(X) &= \frac{\alpha}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

To nám už ovšem dává dvě rovnice o dvou neznámých, protože pro střední hodnotu a rozptyl máme odhady. Dosadíme, soustavu vyřešíme a dostaneme hledané parametry.

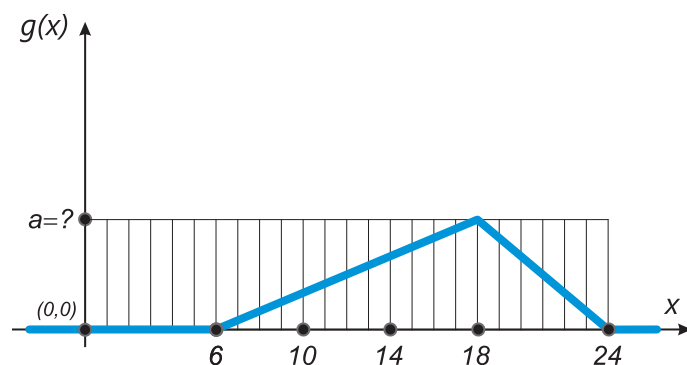
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(E(X))^2}{\text{VAR}(X)} \doteq 3.39 \\ \lambda &= \frac{E(X)}{\text{VAR}(X)} \doteq 1.11\end{aligned}$$

---

## 44

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$y = \frac{x}{3} - 2.$$



*Řešení:*

Nejdříve musíme zjistit jakou hodnotu má konstanta  $a$ . Tu určíme z normalizační podmínky a obsahu trojúhelníku. Musí platit, že

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{18 \cdot a}{2} \implies a = \frac{1}{9}.$$

Z obrázku vidíme, že hustota  $g(x)$  je tvořena dvěma přímkami. Jejich předpis určíme pomocí krajních bodů:

$$y(x) = ax + b$$

$$y_1(6) = 0 = 6a + b$$

$$y_2(18) = \frac{1}{9} = 18a + b$$

$$y_1(18) = \frac{1}{9} = 18a + b$$

$$y_2(24) = 0 = 24a + b$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$$y_1(x) = \frac{1}{108}x - \frac{1}{18}, x \in (6, 18]$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{54}x + \frac{4}{9}, x \in (18, 24].$$

Původní hustotu můžeme zapsat jako:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 6] \\ y_1(x) = \frac{1}{108}(x - 6), & x \in (6, 18] \\ y_2(x) = -\frac{1}{54}(x - 24), & x \in (18, 24] \\ 0, & x \in (24, +\infty). \end{cases}$$

Transformovaná hustota pravděpodobnosti bude vypadat dle lineární transformace takto

$$g_Y(x) = \frac{1}{|a|}g\left(\frac{x-b}{a}\right), \text{ kde } a = \frac{1}{3} \text{ a } b = -2$$

$$g_Y(x) = 3g(3x + 6).$$

Po dosazení dostaneme následující hustotu pravděpodobnosti

$$g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0] \\ y_1(x) = \frac{1}{12}x, & x \in (0, 4] \\ y_2(x) = -\frac{1}{6}(x - 6), & x \in (4, 6] \\ 0, & x \in (6, +\infty). \end{cases}$$

Opět si můžeme všimnout, že transformace nám zúžila nosič na  $\text{supp}(g_Y) = (0, 6)$ .

## 45

Dvě náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \Theta(x)\lambda e^{-\lambda x}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$Z = \frac{X + Y}{2}.$$

*Řešení:*

Nejdříve budeme muset najít hustotu pomocné náhodné veličiny  $W = X + Y$ . Tu získáme jako konvoluci dvou původních.

$$\begin{aligned} f_W(w) &= (f_X * f_Y)(w) = \int_{\mathbf{R}} f_X(w - \alpha) f_Y(\alpha) d\alpha = \int_{\mathbf{R}} \Theta(w - \alpha) \lambda e^{-\lambda(w - \alpha)} \Theta(\alpha) \lambda e^{-\lambda \alpha} d\alpha = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda w} \int_0^w d\alpha = \lambda^2 w e^{-\lambda w} \end{aligned}$$

Tedy, když již máme hustotu pravděpodobnosti pro součet dvou náhodných veličin můžeme přejít k získání výsledné hustoty. Náhodná veličina  $Z$  je pro nás definována jako  $Z = \frac{X+Y}{2} = \frac{1}{2}W$ . Musíme tedy již jen provést lineární transformaci. Hustotu pro  $Z = a \cdot W + b$  získáme jako  $f_Z(z) = \frac{1}{|a|} f_W\left(\frac{z-b}{a}\right)$ , kde  $a = \frac{1}{2}$  a  $b = 0$ . Pojďme dosadit a jsme hotovi

$$f_Z(z) = 2f_W(2z) = 2 \cdot \lambda^2(2z)e^{-\lambda 2z} = 4\lambda^2 z e^{-2\lambda z}.$$

## 46

Ukažte, že konvoluce je komutativní operací.

*Řešení:*

Mějme funkce  $f$  a  $g$ . Máme ukázat, že platí  $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ . Začneme výrazem vlevo a provedeme substituci za argument funkce  $f$ :

$$(f * g)(x) = \int_R f(x - \alpha)g(\alpha)d\alpha \stackrel{\beta=x-\alpha}{=} \int_R f(\beta)g(x - \beta)d\beta = (g * f)(x).$$

## 47

Jakou hustotu pravděpodobnosti má součet náhodných veličin

$$\mathcal{X} \sim 2\Theta(x)e^{-2x}; \quad \mathcal{Y} \sim 4\Theta(y)ye^{-2y}?$$

*Řešení:*

Hustotou pravděpodobnosti součtu dvou náhodných veličin  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}$  je konvoluce dvou původních hustot.

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{Z}}(z) &= (f_{\mathcal{X}} * f_{\mathcal{Y}})(z) = \int_{\mathbf{R}} f_{\mathcal{X}}(z - \alpha)f_{\mathcal{Y}}(\alpha) d\alpha = \\ &= \int_{\mathbf{R}} 2\Theta(z - \alpha)e^{-2(z-\alpha)}4\Theta(\alpha)\alpha e^{-2\alpha} d\alpha = 8e^{-2z} \int_0^z \alpha d\alpha = 4z^2 e^{-2z} \end{aligned}$$

## 48

Ukažte, že střední hodnota součtu náhodných veličin je rovna součtu jejich středních hodnot.

*Řešení:*

Mějme náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$ . Chceme ukázat, že  $E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y})$ . Toto je logické, protože střední hodnota se chová jako lineární operátor na prostoru  $L_1$ . Budeme začínat z levé strany rovnosti

$$\begin{aligned} E(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) &= \iint_{\mathbf{R}^2} (x + y)f_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}(x, y)d(x, y) = \\ &= \iint_{\mathbf{R}^2} xf_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}(x, y)d(x, y) + \iint_{\mathbf{R}^2} yf_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}(x, y)d(x, y) = \\ &= \int_R x \left( \int_R f_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}(x, y)dy \right) dx + \int_R y \left( \int_R f_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}}(x, y)dx \right) dy = \\ &= \int_R xf_{\mathcal{X}}(x) dx + \int_R yf_{\mathcal{Y}}(y)dy = E(\mathcal{X}) + E(\mathcal{Y}). \end{aligned}$$

Důležité je si uvědomit, že můžeme použít Fubiniho větu a zaměnit pořadí integrace. Pak už jen uděláme integraci přes jednu proměnnou, čímž dostaneme jednotlivé marginály z nichž získáme střední hodnoty.

49

Nechť  $\mathcal{X} \sim 4\Theta(x)xe^{-2x}$  a  $\mathcal{Y} \sim \frac{8}{3}\Theta(x)x^3e^{-2x}$ . Jakou hustotu má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = \frac{2}{3}(\mathcal{X} + \mathcal{Y})?$$

*Řešení:*

Hustota součtu náhodných veličin je konvolucí dvou původních. Provedme tudíž nejdříve to a poté se budeme věnovat přeskálování.

$$\begin{aligned}(f * g)(w) &= \int_R f(w - \alpha)(g(\alpha)d\alpha = \int_R 4\Theta(w - \alpha)(w - \alpha)e^{-2(w-\alpha)} \frac{8}{3}\Theta(\alpha)\alpha^3e^{-2\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{32}{3}e^{-2w} \int_0^w \alpha^3(w - \alpha) d\alpha = \frac{8}{15}w^5e^{-2w}\end{aligned}$$

Po dosazení nám obě theta funkce výrazně zúží integrační obor a provedeme jednoduchou integraci polynomů.

Máme tedy  $f_w(w) = \frac{8}{15}w^5e^{-2w}$ . Hustotu náhodné veličiny  $\mathcal{Z} = \frac{2}{3}W$  získáme lineární transformací

$$f_Z(z) = \frac{1}{|a|}f_w\left(\frac{z-b}{a}\right),$$

kde  $a = \frac{2}{3}$  a  $b = 0$ . Teď už jen dosadíme a jsme hotovi

$$f_Z(z) = \frac{1}{|\frac{2}{3}|}f_w\left(\frac{z}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}f_w\left(\frac{3}{2}z\right) = \frac{3}{2}\frac{8}{15}\left(\frac{3}{2}z\right)^5e^{-2\frac{3}{2}z} = \frac{243}{40}z^5e^{-3z}.$$

50

Dvě náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = 4\mathcal{X} + 4\mathcal{Y}.$$

Řešení:

Zde máme na výběr. Buď můžeme udělat jednotlivé transformace a pak konvoluci transformovaných hustot, nebo nejdříve udělat konvoluci a poté udělat jednu transformaci. Půjdeme druhou cestou.

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{w}}(w) &= (f_x * f_y)(w) = \int_{\mathbf{R}} f_x(w - \alpha) * f_y(\alpha) d\alpha = \int_{\mathbf{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^2 e^{-\frac{(w-\alpha)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2} - \frac{\alpha^2 - w\alpha}{\sigma^2}\right) d\alpha = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\mathbf{R}} \exp\left(-\frac{w^2}{4\sigma^2} - \frac{\left(\alpha^2 - \frac{w}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{4\sigma^2}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(\alpha - \frac{w}{2})^2}{\sigma^2}} d\alpha = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{4\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{4\sigma^2}} \sigma \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{4\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme umocnili v exponencích, převedli na čtverec a využili Gaussův integrál  $\int_{\mathbf{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ .

Teď už jen provedeme lineární transformaci, abychom získali hustotu pro  $\mathcal{Z} = 4\mathbf{W}$ . Víme, že

$$f_{\mathcal{Z}}(z) = \frac{1}{|a|} f_{\mathbf{w}}\left(\frac{z-b}{a}\right),$$

kde pro nás je  $a = 4$  a  $b = 0$ . Dosadíme a jsme hotovi:

$$f_{\mathcal{Z}}(z) = \frac{1}{4} f_{\mathbf{w}}\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{\left(\frac{z}{4}\right)^2}{4\sigma^2}\right) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{z^2}{64\sigma^2}\right).$$

## 51

Dvě náhodné veličiny  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Y}$  pocházejí ze stejné distribuce

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-\mu)^2}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má náhodná veličina

$$\mathcal{Z} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}.$$

Řešení:

Jelikož víme, že hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny  $\mathcal{Z}$  je rovna konvoluci hustot sčítaných náhodných veličin, tak ji provedme

$$\begin{aligned} f(z) &= (g_{\mathcal{X}} * g_{\mathcal{Y}})(z) = \int_{\mathbf{R}} g_{\mathcal{X}}(z - \alpha) g_{\mathcal{Y}}(\alpha) d\alpha = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(z-\alpha-\mu)^2} e^{-(\alpha-\mu)^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}(z-2\mu)^2}. \end{aligned}$$

Při integraci jsme umocnili, rozdělili členy a pak postupně integrovali.

---

## 52

Náhodná veličina  $X$  je popsána distribuční funkcí

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1; \\ \frac{(x+1)^3}{64} & x \in (-1, 3); \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

Vypočítejte pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X > 0]$  a střední hodnotu veličiny  $X$ .

*Řešení:*

Jestliže máme zadanou distribuční funkci, tak lze vypočítat pravděpodobnost  $\mathcal{P}[X > 0]$ . Využijeme doplňkového jevu  $\mathcal{P}[X > 0] = 1 - \mathcal{P}[X \leq 0]$ . To už ovšem není nic jiného než  $1 - H(0) = 1 - \frac{(0+1)^3}{64} = \frac{63}{64}$ .

Abychom vypočítali střední hodnotu, budeme muset zjistit hustotu pravděpodobnosti, která přísluší této náhodné veličině. Hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny dostaneme jako derivaci distribuční funkce

$$\frac{dH}{dx}(x) = h(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ \frac{3(x+1)^2}{64} & x \in (-1, 3), \\ 0 & x \geq 3. \end{cases}$$

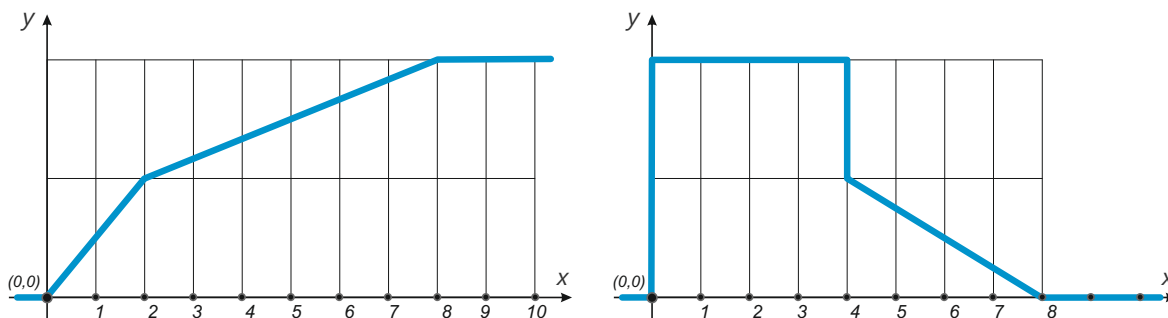
Pro získání střední hodnoty už jen integrujeme jako v předchozích příkladech

$$E(X) = \int_{\mathbf{R}} xh(x) dx = \frac{3}{64} \int_{-1}^3 x(x+1)^2 dx = 2.$$

---

## 53

Na obrázku je jedna hustota pravděpodobnosti a jedna distribuční funkce. Náhodná veličina  $X$  je popsána hustotou pravděpodobnosti, zatímco náhodná veličina  $Y$  je popsána distribuční funkcí. Která z náhodných veličin má větší medián? Hodnoty obou mediánů přesně vyčíslete. Pozor: Osy  $y$  nemusejí mít nutně stejná měřítka.



*Řešení:*

Na obrázku vlevo máme distribuční funkci pro náhodnou veličinu, kterou označme  $X_1$ . Jak zjistit medián? Musíme přijít na y-ový rozměr. Ten je ovšem poměrně jasný. O distribuční funkci víme, že  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$  a tím pádem maximální hodnota na ose y je 1. To už jasně udává vertikální rozměr jednoho obdélníčku  $\Rightarrow \frac{1}{2}$ . Medián je kvartil pro hodnotu  $\frac{1}{2}$  a to je tedy takové  $c$ , pro které platí:  $F(c) = \frac{1}{2}$ . To už z obrázku vyčteme jednoduše, je to hodnota  $x = 2$  a proto  $\text{MED}(X_1) = 2$ .

Vpravo máme hustotu pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu, kterou si označme jako  $X_2$ . Musíme nejdříve opět zjistit vertikální rozdíl jednoho obdélníčku. Ten vyplyne z normalizační podmínky. Musí totiž platit následující

$$2a \cdot 4 + \frac{a \cdot 4}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a = \frac{1}{10}.$$

Hustota se bude skládat ze dvou úsečků. První je konstantou a druhou najdeme pomocí předpisu lineární funkce s podmínkami pro krajní body. Nakonec dostaneme

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ y_1(x) = \frac{1}{5}, & x \in [0, 4) \\ y_2(x) = -\frac{1}{40}(x - 8), & x \in [4, 8) \\ 0, & x \in (8, +\infty). \end{cases}$$

Medián pro  $X_2$  najdeme dle definice

$$\int_{-\infty}^{\text{MED}(X_2)} f_{X_2}(x) \, dx.$$

Dosadíme a zúžíme integrační obor. Jelikož obsah pod konstantní částí křivky je  $\frac{4}{5}$ , tak medián se musí nacházet v této části.

$$\int_0^{\text{MED}(X_2)} \frac{1}{5} \, dx = \frac{1}{5} \text{MED}(X_2) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}$$

$$\text{MED}(X_2) = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Z toho tedy vyvozujeme, že náhodná veličina  $X_2$  má větší medián.

---

3 (4 body)

Na základě přiložené tabulky obsahující 100 naměřených dat vykreslete kompletní krabicový graf (box-plot) a určete, která z naměřených dat jsou odlehlými měřeními (outliers), tj. měřeními ležícími za vnějšími hradbami.

| Číslo měření                 | Naměřený údaj | Číslo měření | Naměřený údaj |
|------------------------------|---------------|--------------|---------------|
| 1                            | 0,5           | 51           | 6,4           |
| 2                            | 0,8           | 52           | 6,5           |
| 3                            | 1,3           | 53           | 6,7           |
| 4                            | 1,8           | 54           | 6,8           |
| 5                            | 1,9           | 55           | 6,8           |
| 6                            | 2             | 56           | 6,9           |
| 7                            | 2,2           | 57           | 6,9           |
| 8                            | 2,3           | 58           | 7             |
| 9                            | 2,5           | 59           | 7,1           |
| 10                           | 2,5           | 60           | 7,1           |
| 11                           | 2,7           | 61           | 7,2           |
| 12                           | 2,8           | 62           | 7,2           |
| 13                           | 2,8           | 63           | 7,2           |
| 14                           | 3             | 64           | 7,3           |
| 15                           | 3,1           | 65           | 7,3           |
| 16                           | 3,2           | 66           | 7,3           |
| 17                           | 3,3           | 67           | 7,3           |
| 18                           | 3,3           | 68           | 7,4           |
| 19                           | 3,6           | 69           | 7,4           |
| 20                           | 3,7           | 70           | 7,5           |
| 21                           | 3,7           | 71           | 7,7           |
| 22                           | 3,8           | 72           | 7,8           |
| 23                           | 3,9           | 73           | 7,8           |
| 24                           | 3,9           | 74           | 7,9           |
| 25                           | 3,9           | 75           | 7,9           |
| 26                           | 3,9           | 76           | 7,9           |
| 27                           | 4             | 77           | 9,5           |
| 28                           | 4,1           | 78           | 9,6           |
| 29                           | 4,2           | 79           | 9,8           |
| 30                           | 4,2           | 80           | 9,8           |
| 31                           | 4,3           | 81           | 10            |
| 32                           | 4,3           | 82           | 10            |
| 33                           | 4,4           | 83           | 10,1          |
| 34                           | 4,5           | 84           | 10,2          |
| 35                           | 4,7           | 85           | 10,3          |
| 36                           | 4,8           | 86           | 10,4          |
| 37                           | 4,9           | 87           | 10,5          |
| 38                           | 5             | 88           | 10,6          |
| 39                           | 5,1           | 89           | 10,6          |
| 40                           | 5,2           | 90           | 10,7          |
| 41                           | 5,3           | 91           | 11            |
| 42                           | 5,4           | 92           | 11            |
| 43                           | 5,4           | 93           | 11,1          |
| 44                           | 5,5           | 94           | 11,2          |
| 45                           | 5,8           | 95           | 11,4          |
| 46                           | 5,9           | 96           | 11,4          |
| 47                           | 6             | 97           | 12,5          |
| 48                           | 6,2           | 98           | 13,6          |
| 49                           | 6,4           | 99           | 14,8          |
| 50                           | 6,4           | 100          | 17,2          |
| Součet všech hodnot          |               | 650          |               |
| Součet kvadrátů všech hodnot |               | 5277         |               |

Řešení:

Pro vykreslení box-plotu budeme potřebovat zjistit kvartily. Začneme dolním kvantilem. První kvartil se často počítá pomocí tzv. poziční interpolace. To znamená, že se bude počítat z prvku, který sedí na pozici  $0,25 \cdot (n + 1)$ , kde  $n$  je počet dat. Pro nás je to 25,5 a proto použijeme průměr z

dvou sousedních hodnot.

$$Q_{\frac{1}{4}} = \frac{3,9 + 4,0}{2} = 3,95$$

Úplně stejným způsobem dopočteme ostatní hodnoty,  $Q_{\frac{3}{4}} = 6,45$  a  $Q_{\frac{3}{4}} = 7,9$ . Mezikvartilový rozptyl dle definice vypočteme jako  $IQV(X) = Q_{\frac{3}{4}} - Q_{\frac{1}{4}} = 3,95$ . Dolní a horní hradba se vypočte následujícím způsobem

$$\text{Dolní hradba} = Q_{\frac{1}{4}} - 1,5 \cdot IQV(X) = -1,975$$

$$\text{Horní hradba} = Q_{\frac{3}{4}} + 1,5 \cdot IQV(X) = 13,825.$$

Odlehlé naměřené hodnoty identifikujeme jako ty, které leží mimo hradby. Po nahlédnutí do naměřených dat můžeme říci, že odlehlé hodnoty jsou 14,8 a 17,2.

## 54

Jakou hustotu pravděpodobnosti má součet náhodných veličin

$$X \sim 4\Theta(x)xe^{-2x}; \quad Y \sim \frac{8}{3}\Theta(y)y^3e^{-2y},$$

o nichž předpokládáme, že jsou nezávislé.

*Řešení:*

Víme, že hustotu náhodné veličiny, která je definována jako součet náhodných veličin dostaneme jako konvoluci dvou původních hustot. Označme  $Z = X + Y$ . Hustota náhodné veličiny  $Z$  je

$$h_Z(z) = (f_X * g_Y)(z) = \int_{\mathbf{R}} f_X(z - \alpha)g_Y(\alpha) d\alpha = \int_{\mathbf{R}} 4\Theta(z - \alpha)(z - \alpha)e^{-2(z-\alpha)} \frac{8}{3}\Theta(\alpha)\alpha^3e^{-2\alpha} d\alpha.$$

Krátce se zde zastavme a uvědomme si, jak nám Heavisideovy funkce změni integrační obor.  $\Theta(z)$  nám integrační obor zúží na  $\mathbf{R}_0^+$ . Funkce  $\Theta(x - z)$  nám ho dále zmenší na interval  $[0, x]$ . Teď již integrál dopočteme

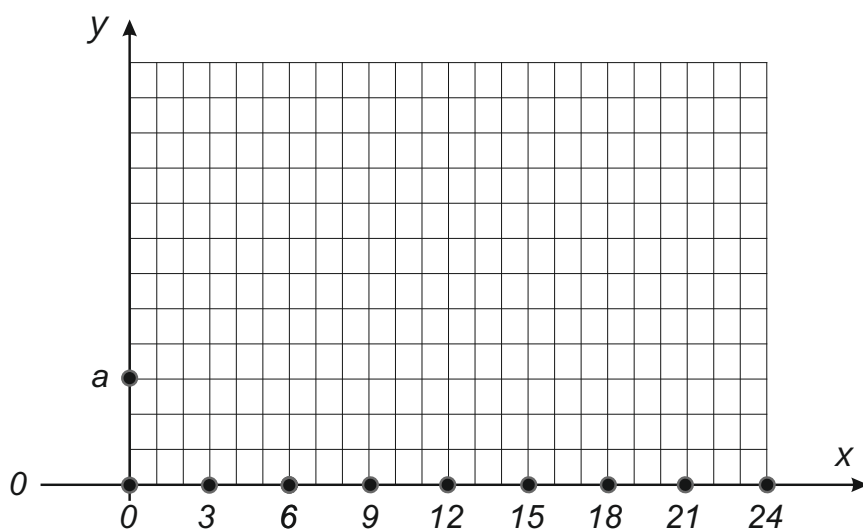
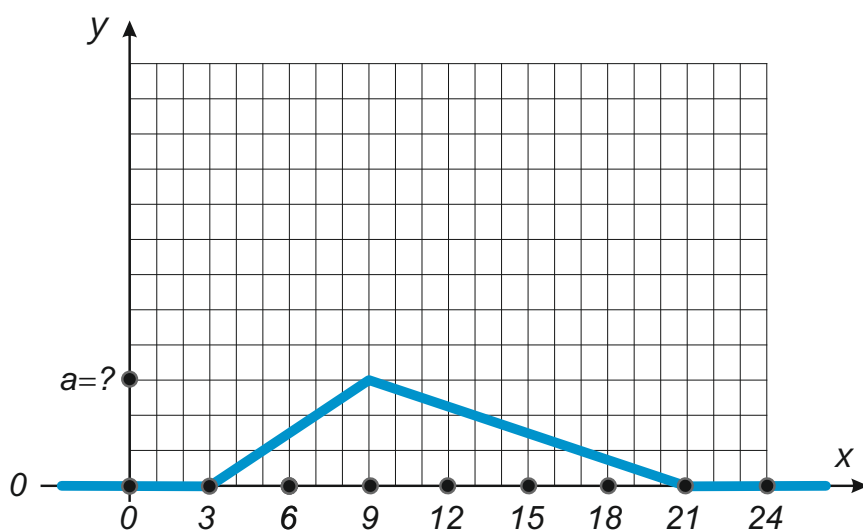
$$\frac{32}{3}e^{-2z} \int_0^z (z - \alpha)\alpha^3 d\alpha = \frac{8}{15}e^{-2\alpha}\alpha^5.$$

Zároveň si uvědomíme, že obor hodnot náhodné veličiny  $Z$  je interval  $(0, +\infty)$ .

## 55

Hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny  $X$  je funkce z obrázku. Do obrázku přímo zde na zadání vykreslete graf hustoty pravděpodobnosti veličiny

$$Y = \frac{X}{3} + 2.$$



*Řešení:*

Nejdříve musíme zjistit jakou hodnotu má konstanta  $a$ . Tu určíme z normalizační podmínky a obsahu trojúhelníku. Musí platit, že

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{18 \cdot a}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{9}.$$

Z obrázku vidíme, že hustota  $g(x)$  je tvořena dvěma úsečkami. Jejich předpis určíme pomocí

krajních bodů:

$$y(x) = ax + b$$

$$y_1(3) = 0 = 3a + b$$

$$y_2(9) = \frac{1}{9} = 9a + b$$

$$y_1(9) = \frac{1}{9} = 9a + b$$

$$y_2(21) = 0 = 21a + b$$

⇓

⇓

$$y_1(x) = \frac{1}{54}x - \frac{1}{18}, x \in (3, 9]$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{108}x + \frac{7}{36}, x \in (9, 21].$$

Původní hustotu můžeme zapsat jako:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3] \\ y_1(x) = \frac{1}{54}(x-3), & x \in (3, 9] \\ y_2(x) = -\frac{1}{108}(x-21), & x \in (9, 21] \\ 0, & x \in (21, +\infty). \end{cases}$$

Transformovaná hustota pravděpodobnosti bude vypadat dle lineární transformace takto

$$g_Y(x) = \frac{1}{|a|}g\left(\frac{x-b}{a}\right), \text{ kde } a = \frac{1}{3} \text{ a } b = 2$$

$$g_Y(x) = 3g(3x-6).$$

Po dosazení dostaneme následující hustotu pravděpodobnosti

$$g_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3] \\ y_1(x) = \frac{1}{6}(x-3), & x \in (3, 5] \\ y_2(x) = -\frac{1}{12}(x-9), & x \in (5, 9] \\ 0, & x \in (9, +\infty). \end{cases}$$

Mr užeme všimnout, že transformace nám zúžila nosič na  $\text{supp}(g_Y) = (3, 9)$ .

## 56

Náhodná veličina  $X$  je popsána hustotou pravděpodobnosti

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

Jakou hustotu pravděpodobnosti má veličina  $Y = 5X$ ?

*Řešení:*

Máme zde lineární transformaci náhodné veličiny. Pokud si vzpomeneme na obecnou lineární transformaci  $\mathcal{Y} = a\mathcal{X} + b$ , tak zde je pro nás  $a = 5, b = 0$ . Z přednášky víme, že obecně tvar transformované hustoty lze zapsat takto:

$$f_{\mathcal{Y}}(x) = \frac{1}{|a|} g\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Dosaďme tedy naše konstanty a jsme hotovi

$$f_{\mathcal{Y}}(x) = \frac{1}{5} g\left(\frac{x}{5}\right) = \frac{1}{5\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{25}}.$$

---