Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

1.

- 1. Definujte pojmy:
  - hladká funkce na oblasti $G \subset \mathbf{E}^r$
  - matematickým zápisem vystihněte geometrickou interpretaci abstraktního Lebesgueova integrálu
  - Kam míří $\mathrm{grad} f(\vec{a})$? Své tvrzení podpořte výpočtem.
  - Jaký je rozdíl mezi symboly $\lambda(X)$ a $\mu(X)$?
- 2. Vyslovte a dokažte základní větu teorie Riemannova integrálu.
- 3. Dokažte, že má-li funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ na jistém okolí $\mathcal{U}(\vec{a})$ bodu $\vec{a}$ gradient, který je na $\mathcal{U}(\vec{a})$ omezený, pak $f(\vec{x})$ je v bodě $\vec{a}$ spojitá. Kde se v důkazu užívá věta o ekvivalentních metrikách?
- 4. Vyslovte a komentujte Lebesgueovu větu. Porovnejte její znění s větou o záměně limity a integrálu, která byla probírána v rámci 01MAB3. Která věta je obecnější? Na příkladu $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$ své tvrzení (o srovnání obou vět) demonstrujte.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

2.

- 1. Definujte pojmy:
  - parciální derivace vyšších řádů
  - globální extrémy funkce více proměnných (Jakým způsobem se globální extrémy hledají? Jaké teoretické věty se při tom využívá?)
  - vnější míra vytvořená mírou $\mu_\sigma(X)$
- 2. Podle definice ukažte, že funkce $g(x) = x$ je $\lambda-$měřitelná.
- 3. Vyslovte Fubiniovu větu pro Lebesgueův integrál. V čem spočívá extrémní aplikovatelnost této věty? Užití věty demonstrujte na příkladě výpočtu Gaussova integrálu. Výpočet proveďte!
- 4. Vyslovte a dokažte větu o aditivitě Riemannova integrálu v mezích.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

3.

- 1. Definujte pojmy:
  - $\mu-$měřitelná funkce
  - hladká regulární plocha
  - parciální derivace ve směru (pojem podrobně analyzujte)
- 2. Dokažte, že existuje-li v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál funkce $f(\vec{x})$, pak je funkce v tomto bodě spojitá.
- 3. Vyslovte a komentujte větu o substituci v Lebesgueově integrálu. Na příkladu integrálu

$$\int_{x^2+y^2\leqslant \mathrm{R}^2} x^2y^2 \mathrm{d}(x,y) \tag{1}$$

  ukažte propojení teoretického znění věty s praktickou stránkou výpočtu. Všech symboly užité ve znění věty specifikujte tak, aby přesně popisovaly situaci z integrálu (1).
- 4. Dokažte větu o spojitosti složené funkce.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

4.

- 1. Definujte pojmy:
  - parciální limity (Komentujte odlišnost od pojmu *limita vzhledem k množině.*)
  - kód parciální limity
  - regulární zobrazení
  - Lebesgueův integrál z obecné funkce
- 2. Vyslovte integrální formuli pro Lebesgueovu míru a dokažte alespoň první dvě části tvrzení (pro $\mathscr{H}_r$ a $\mathscr{S}_r$).
- 3. Vyslovte a komentujte Stokesovu větu.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o monotonii Riemannova integrálu.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

5.

- 1. Definujte pojmy:
  - direktní součet křivek
  - množinová funkce a některé její vlastnosti
  - třídy $\mathscr{L}^\star(E,\mu)$ a $\mathscr{L}(E,\mu)$
- 2. Vypočítejte Lebesgueovu míru množiny $A = \mathbf{Q} \cap \langle 0, 4)$. Jak souvisí výsledek této úlohy s výsledkem úlohy 25.3.?
- 3. Vyslovte a komentujte Greenovu větu. Na příkladu integrálu

$$\int_A \left(\frac{1}{x^2}; \frac{1}{y^2}\right) \,\mathrm{d}\mu_c(x,y), \tag{2}$$

kde A je kružnice $(x-2)^2 + (y-2)^2 = a^2$ ukažte propojení teoretického znění věty s praktickou stránkou výpočtu. Všech symboly užité ve znění věty specifikujte tak, aby přesně popisovaly situaci z integrálu (2). Pro která $a \in \mathbf{R}$ lze Greenovu větu užít?

- 4. Vyslovte a dokažte větu o tvaru koeficientů v totálním diferenciálu.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4
(akademický školní rok 2019/2020)

Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

6.

- 1. Definujte pojmy:
  - Jacobiho matice
  - plošný integrál prvního a druhého druhu (a důkaz jejich linearity)
  - úplná míra (Ukažte, že $F(X) : \mathscr{H} \mapsto \mathbf{R}$ není obecně úplná.)
- 2. Podle definice ukažte, že funkce $g(x) = \Theta(x)\lfloor x \rfloor$ je $\lambda-$měřitelná.
- 3. Vyslovte a komentujte větu o Lebesgueově integrálu z ekvivalentních funkcí. Její tvrzení dokažte pro případ funkcí ze základního systému.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o derivaci složené funkce.

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

7.

- 1. Definujte pojmy:
  - funkce třídy $C^m(G)$, kde $G \subset \mathbf{E}^r$ je oblast
  - axiomatická definice míry
  - $\sigma-$aditivita množinové funkce
- 2. Vyslovte a dokažte větu o Jacobiho matici inverzního zobrazení. Výsledek užijte k odvození vztahu mezi jacobiány obou zobrazení.
- 3. Dokažte: Každá spojitá funkce nabývá na neprázdné kompaktní množině svého maxima i minima.
- 4. Vyslovte a komentujte Leviho větu pro řady. Porovnejte její znění s větou o záměně sumy a integrálu, která byla probírána v rámci 01MAB3. Která věta je obecnější? Na příkladu $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$ své tvrzení (o srovnání obou vět) demonstrujte.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

8.

- 1. Definujte pojmy:
  - divergence, rotace, Laplaceův operátor
  - základní systém $\mathscr{Z}_\mu$
  - borelovský uzávěr (minimální $\sigma-$okruh generovaný soustavou)
  - transformace prvního a druhého druhu
- 2. Nechť $D(x,y)$ je dvojrozměrná Dirichletova funkce. Ukažte, že $(\mathscr{R})\int_0^1\int_0^1 D(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje, zatímco $D(x,y)\in\mathscr{L}(\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle)$.
- 3. Komentujte postačující podmínku pro vázaný lokální extrém. Podrobněji rozeberte, jak důležitý je předpoklad, že jistá Jacobiho matice má garantovanou hodnost. Kde se tento fakt zúročí?
- 4. Vyslovte a dokažte Bolzano-Cauchyovu podmínku pro limitu funkce více proměnných.
- 5. Vyslovte a dokažte větu o Hessově matici implicitní funkce ve stacionárním bodě.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

9.

- 1. Definujte pojmy:
  - gradient funkce více proměnných a jeho geometrický význam
  - oblast a kompakt v $\mathbf{E}^r$
  - soustava $\mathscr{S}_r$ a diskuse jejích vlastností (okruh, polookruh, algebra, prezident)
- 2. Dokažte, že za vhodných předpokladů platí rovnost $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{G}(\vec{x}) = 0$.
- 3. Vyslovte a komentujte věty o záměnnosti smíšených parciálních derivacích. Jak tato věta souvisí s převodem Taylorovy řady do kompaktního tvaru?
- 4. Vyslovte a dokažte větu o monotónii Lebesgueova integrálu včetně pomocné věty.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

10.

- 1. Definujte pojmy:
  - vlastní limita funkce (a limita vzhledem k množině)
  - potence množiny
  - $\operatorname{argmin} f(\vec{x})$ a $\operatorname{argmax} f(\vec{x})$
  - soustava $\mathscr{H}_r$ a analýza jejích vlastností (okruh, polookruh, algebra, prezident)
- 2. Vyslovte a dokažte větu o měřitelnosti ekvivalentních funkcí.
- 3. Vyslovte a komentujte větu o nezávislosti hodnoty křivkového integrálu na volbě parametrizace.
- 4. Vyslovte a dokažte nutnou podmínku pro vázané lokální extrémy (větu o Lagrangeových multiplikátorech.) Důkaz demonstrujte na případu DVOU vazebních rovnic.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

11.

- 1. Definujte pojmy:
  - generující funkce a generující bod (pro teorii implicitních funkcí)
  - konečnost a $\sigma-$konečnost míry
  - analytická funkce
  - symbol Λ_μ
- 2. Dokažte (pouze na základě definic), že parciální derivace je speciálním případem derivace směrové. Pokuste se vyslovit (a dokázat) co nejobecnější tvar tvrzení.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o konečné aditivitě v mezích pro Lebesgueův integrál.
- 4. Vyslovte a dokažte Heineovu větu pro spojitost.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

12.

- 1. Definujte pojmy:
  - totální diferenciály vyšších řádů (definiční vztah a jeho rozbor) – podrobně vysvětlete (za pomocí odvozování) rekurentní povahu této definice
  - stacionární a sedlový bod
  - ideální míra
- 2. Na základě rekurentní definice odvoďte obecný tvar druhého totálního diferenciálu pro funkci $f(x, y) \in C^2(\mathbf{R}^2)$.
- 3. Dokažte, že je-li funkce $f(\vec{x})$ $\mu-$měřitelná, pak pro každé $c \in \mathbf{R}$ platí
  - $\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : f(\vec{x}) \geqslant c\} \in \mathscr{M}_\mu$,
  - $\{\vec{x} \in \mathbf{E}^r : f(\vec{x}) \leqslant c\} \in \mathscr{M}_\mu$.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o přírůstku.
- 5. Vyslovte a dokažte větu o jedné implicitní funkci $y(\vec{x})$. V důkaze vynechte technickou část zabývající se existenční podmínkou.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

13.

- 1. Definujte pojmy:
  - definiční obor, obor hodnot funkce, obraz a vzor množiny
  - křivkový integrál prvního a druhého druhu
  - rozšířený systém základních funkcí $\mathcal{Z}_\mu^+$
  - ukažte (podle definice), že Heavisideova funkce $\Theta(x)$ patří do $\mathcal{Z}_\lambda^+ \setminus \mathcal{Z}_\lambda$
- 2. Popište celý postup konstrukce Riemannova integrálu. Požaduje se detailní zavedení doprovázené formálně korektními zápisy. Důkazy dílčích tvrzení se nepožadují.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o limitě integrálu s parametrem. Dále vyslovte její důsledek týkající se spojitosti integrálu s parametrem.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o vzorci pro výpočet směrové parciální derivace.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

14.

- 1. Definujte pojmy:
  - symbolika: $g_n(\vec{x}) \nearrow g(\vec{x})$
  - Taylorova řada funkce více proměnných
  - aditivní soustava množin, množinový okruh a množinová algebra
- 2. Vyřešte následující úlohu: Nalezněte směr $\vec{s} \in \mathbf{E}^r$, v němž graf funkce $g(x) \in C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$ stoupá v bodě $\vec{a}$ nejstrměji. K čemu je výhodné předpokládat, že funkce leží v $C^1(\mathcal{U}_\delta(\vec{a}))$?
- 3. Vyslovte a dokažte Taylorovu větu (o koeficientech Taylorovy řady).
- 4. Dokažte větu: Nechť $A \subset \mathbf{E}^r$ je otevřená množina a $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ regulární zobrazení na A. Potom $\vec{F}(A)$ je otevřená množina v $\mathbf{E}^r$.
- 5. Platí některý z výroků $x^{-2} \in \mathscr{L}^\star(\mathbf{R})$, $x^{-2} \in \mathscr{L}(\mathbf{R})$? Proč není nutné uvádět, jakou hodnotu má funkce x^{-2} v bodě nula?

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

15.

- 1. Definujte pojmy:
  - spojitost funkce (odlište od spojitosti vzhledem k množině)
  - plošná parametrizace a plocha
  - graf funkce $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ a jeho vrstevnice
- 2. Ucelené vysvětlete motivaci (proč), metodiku (jak) a formální postupy při sestavování taylorovských aproximací funkcí více proměnných. Vysvětlete rozdíl mezi Taylorovou větou a větou o Taylorově vzorci.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o $\sigma-$aditivitě v mezích pro Lebesgueův integrál.
- 4. Vyslovte a komentujte Gaussovu-Ostrogradského větu.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

16.

- 1. Definujte pojmy:
  - parciální derivace (pojem podrobně analyzujte)
  - lokální extrémy funkce více proměnných
  - jednoduchá plocha
- 2. Dokažte: Nechť je dán prostor $\{E, \mathscr{M}_r \subset 2^E, \mu(X)\}$ s ideální a $\sigma-$konečnou mírou. Nechť $M \in \mathscr{M}_r$ je zvolena libovolně. Pak jednotková funkce

$$\varkappa(x) = \begin{cases} 1 & \ldots \quad x \in M, \\ 0 & \ldots \quad x \in E \backslash M, \end{cases}$$

  patří do třídy $\mathscr{L}^\star(E, \mu)$ a navíc $\mu(M) = \int_E \varkappa(x)\, \mathsf{d}\mu(x)$, resp. $\mu(M) = \int_M 1\, \mathsf{d}\mu(x)$. Kde se v důkaze využívá vlastnost $\sigma-$konečnosti míry $\mu(X)$?
- 3. Vyslovte postačující podmínku pro lokální extrém a tvrzení o lokálním minimu dokažte.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o funkci a kompaktní množině.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

17.

- 1. Definujte pojmy:
  - totální diferenciál funkce více proměnných (pojem totálního diferenciálu podrobně analyzujte)
  - těžiště křivky, resp. plochy
  - $\mu-$skoro všude
  - prezident soustavy množin
- 2. Dokažte, že je-li funkce $h(\vec{x}) \in \mathcal{Z}_\mu$ skoro všude nulová, pak integrál $(\mathscr{L}) \int_{\mathbf{E}^r} h(\vec{x})\, \mathrm{d}\mu(\vec{x})$ vždy existuje a je nulový. Proč je k důkazu nutno užít předpoklad o úplnosti míry?
- 3. Uceleně vysvětlete motivaci (proč), metodiku (jak) a formální postupy při vyšetřování vlastností funkce $y(\vec{x})$, která je zadána implicitně, tj. prostřednictvím rovnice $G(\vec{x}, y) = 0$.
- 4. Vyslovte a dokažte nutnou podmínku pro lokální extrém.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

18.

- 1. Definujte pojmy:
  - funkce zadané implicitně soustavou rovnic
  - Riemannův integrál přes obecnou množinu
  - nosič funkce a pojem finitní funkce
- 2. Popište celý postup konstrukce Lebesgueovy míry. Požaduje se detailní zavedení doprovázené formálně korektními zápisy. Důkazy dílčích tvrzení se nepožadují.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o převodu abstraktního Lebesgueova integrálu na klasický.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o implicitních funkcích. V důkaze vynechte technickou část zabývající se existenční podmínkou.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

19.

- 1. Definujte pojmy:
  - křivková parametrizace, křivka a její významné body
  - $\sigma-$aditivní soustava, $\sigma-$okruh a $\sigma-$algebra
  - soustava $\mathscr{D} = \{X \subset \mathbf{E}^r : X = X^\circ\}$ a její analýza (okruh, polookruh, algebra, prezident)
- 2. Popište základní kroky při konstrukci Lebesgueova integrálu. Požaduje se detailní zavedení doprovázené formálně korektními zápisy. Důkazy dílčích tvrzení se nepožadují. Proč limita z druhého kroku vždy existuje?
- 3. Dokažte implikaci: $f(\vec{x}) \in \mathscr{L}(E,\mu) \;\Rightarrow\; |f(\vec{x})| \in \mathscr{L}(E,\mu)$ a diskutujte také platnost obrácené implikace.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o Jacobiho matici složeného zobrazení.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

20.

- 1. Definujte pojmy:
  - implicitní funkce zadaná jedinou rovnicí

    $$H(x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}) = 0$$

    (Pojem definujte a podrobně rozeberte podmínky nezbytné pro garanci existence takové implicitní funkce.)
  - kritický generující bod
  - Heavisideova skoková funkce $\Theta(x)$
  - vytvořující funkce míry
- 2. Jakou sympatickou vlastnost má funkce

  $$U(\vec{x}) = \prod_{k=1}^{r} \frac{\mathrm{d}\varphi_k(x_k)}{\mathrm{d}x_k}$$

  sestavená z derivací vytvořujících funkcí? A proč je to výhodné?
- 3. Dokažte: Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivaci, která je na tomto okolí spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o aditivitě křivkového integrálu v mezích.
- 5. Dokažte, že aditivní a nezáporná reálná množinová funkce na neprázdném okruhu je mírou.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

21.

- 1. Definujte pojmy:
  - identita a inverzní zobrazení
  - jednoduchá křivka
  - polookruh
  - Lebesgueův integrál z funkcí ze základního systému $\mathcal{Z}_\mu$
- 2. Dokažte větu: Nechť $\vec{F}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$ je regulární a prosté zobrazení na množině $M \subset \mathbf{E}^r$. Pak k němu existuje inverzní zobrazení $\vec{G}(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^r$, které je na množině $\vec{F}(M)$ regulární a prosté.
- 3. Vyslovte a komentujte větu o vztahu Riemannova a Lebesgueova integrálu. Dále vyslovte a komentujte větu o vztahu Newtonova a Lebesgueova integrálu.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o vzoru otevřené množiny.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

22.

- 1. Definujte pojmy:
  - hladká regulární křivka
  - derivace integrálu podle parametru (Vysvětlete podrobně užité symboly a motivaci, proč je důležité tuto problematiku zkoumat. Připravte si jednoduchý ilustrační příklad.)
  - Lebesgueův integrál z funkcí z rozšířeného základního systému $\mathcal{Z}_\mu^+$ (Čím je garantováno, že definiční vztah funguje formálně správně?)
- 2. Vyslovte a dokažte větu o elementární vlastnosti Hessovy matice.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o konvergenci Taylorova polynomu k výchozí funkci.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o obrazu souvislé množiny.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

23.

- 1. Definujte pojmy:
  - prostota zobrazení $g(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{E}^s$
  - po částech hladká regulární křivka
  - klasická varianta Lebesgueova integrálu a třídy $\mathscr{L}^\star(\mathbf{E})$ a $\mathscr{L}(\mathbf{E})$
  - Do které ze tříd $\mathscr{L}^\star(\mathbf{R})$, resp. $\mathscr{L}(\mathbf{R})$ patří funkce $g(x) = \frac{\Theta(x)}{x}$ a $h(x) = \frac{1}{x}$?
- 2. Dokažte existenční větu pro křivkový integrál.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.
- 4. Vyslovte větu o linearitě Lebesgueova integrálu (pro násobek dokažte).

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

24.

- 1. Definujte pojmy:
  - zavedení míry na soustavě $\mathscr{H}_r$
  - uzavřená křivka
  - borelovská množina
  - prostor s ideální mírou a jeho podprostor (jako východisko konstrukce integrálu)
- 2. Které množiny jsou borelovské? Podrobně rozeberte.
- 3. Vyslovte a dokažte větu o separabilitě Lebesgueova integrálu.
- 4. Diskutujte vztah limit

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a},\vec{x}\in M} f(\vec{x}), \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{a},\vec{x}\in N} f(\vec{x})$$

  a praktické aplikace tohoto vztahu. Uveďte konkrétní příklad.
- 5. Vyslovte základní větu o měřitelnosti.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

25.

- 1. Definujte pojmy:
  - Hessova matice a její vlastnosti
  - Riemannův integrál přes dvoudimenzionální interval
  - $\mu-$ekvivalentní funkce
- 2. Reformulujte postačující podmínku pro lokální extrém do tvrzení využívajícího vlastností spektra Hessovy matice.
- 3. Nechť $B = \{2\}$. Ukažte, že $B \in \mathscr{M}_1$ (podle definice) a poté vypočítejte její abstraktní Lebesgueovu míru. Jak se změní výsledek, nebude-li $\varphi(x)$ v bodě $x = 2$ spojitá zprava?
- 4. Dokažte některé z následujících tvrzení: a) Nechť je soustava $\mathscr{A}$ polookruhem. Pak splňuje axiomy okruhu. b) Nechť je soustava $\mathscr{A}$ okruhem. Pak splňuje axiomy polookruhu.
- 5. Vyslovte a dokažte větu o Taylorově vzorci.

✍

Záznam o ústní zkoušce z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Příjmení a jméno studenta	Finální hodnocení	Datum ústní zkoušky
✍		| | |2020

vyplňte první kolonku a přípravu proveďte přímo do tohoto dokumentu

26.

- 1. Definujte pojmy:
  - Taylorův vzorec (a jeho vztah k Taylorově řadě)
  - Analyzujte pojem implicitní funkce $z(x,y)$ zadané rovnicí $F(x,y,z)=0$. Jaké předpoklady musí $F(x,y,z)$ splňovat? Na základě jakých předpokladů lze odvodit hodnotu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,?$$

  - soustava $\mathscr{M}_r$ a diskuse jejích vlastností (okruh, polookruh, algebra, prezident)
- 2. Vyslovte a komentujte srovnávací kritérium pro Lebesgueův integrál.
- 3. Vyslovte a dokažte Heineho větu pro limitu funkce více proměnných.
- 4. Vyslovte a dokažte větu o kvadratické formě druhého totálního diferenciálu.

✍

Neopomeňte si připomenout základní pojmy z předešlých semestrů. Specielně prostudujte níže uvedené pojmy, věty a postupy.

1. vektorový prostor, jeho báze a dimenze
2. ortogonální doplněk podprostoru $\mathcal{V}$ do prostoru $\mathcal{W}$
3. věty o záměnách (pro posloupnosti a řady funkcí jedné proměnné)
4. typologie bodů v množině (vnitřní, hraniční, hromadný, izolovaný, ...)
5. typologie množin (otevřená, kompaktní, uzavřená, oblast,...)
6. definitnost kvadratických forem a jejich určování
7. formální řešení diferenciální rovnice
8. rozvoj funkce jedné proměnné v řadu (a její obor konvergence)
9. metrika, norma a skalární součin
10. ekvivalentnost norem/metrik
11. řešení diferenciálních rovnic (separace, integrační faktor, rovnice s konstantími koeficienty a Eulerova rovnice)