15

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2(nx)}{nx}\cdot \mathcal{P}\frac{1}{x}\otimes\delta(y);\varphi(x,y)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2(nx)}{nx}\cdot \mathcal{P}\frac{1}{x};(\delta(y);\varphi(x,y))\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin^2(nx)}{nx}\cdot \mathcal{P}\frac{1}{x};\varphi(x,0)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x};\frac{\sin^2(nx)}{nx}\varphi(x,0)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{1}{x}\left[\frac{\sin^2(nx)}{nx}\varphi(x,0)-\frac{\sin^2(-nx)}{n(-x)}\varphi(-x,0)\right]dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sin^2(nx)}{nx^2}\left[\varphi(x,0)+\varphi(-x,0)\right]dx=\left|\begin{array}{l}y=nx\\ dy=n\,dx\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{\sin^2(y)}{y^2}\left[\varphi\left(\frac{y}{n};0\right)+\varphi\left(-\frac{y}{n};0\right)\right]dy\overset{(*)}{=}2\varphi(0,0)\cdot\int_0^\infty\frac{\sin^2(y)}{y^2}dy=$$

$$=2\varphi(0,0)\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\cdot\varphi(0,0)$$

$$\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2(nx)}{nx}\cdot\mathcal{P}\frac{1}{x}\otimes\delta(y)=\pi\cdot\delta(x,y)$$

- diskuse k součinu $\frac{\sin^2(nx)}{nx}\cdot\mathcal{P}\frac{1}{x}$ $\left(\frac{\sin^2(nx)}{nx}=x\cdot\frac{\sin^2(nx)}{nx^2}\right.$ musí být hladce dodefinovatelná, to je třeba ověřit$\left.\right)$

- zdůvodnění záměny (*)

- explicitní výpočet integrálu $\int_0^\infty\frac{\sin^2(ax)}{x^2}dx$ aplikací Laplaceovy transformace

11b

•) doplnění tvrzení: ... je rovna jedné na okolí nosiče supp(g)

•) zdůvodnění implikace

$$\eta(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \eta(y)\varphi(y+x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \wedge \eta(y)\varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

•) zdůvodnění, že $\tilde{\eta} \cdot \tilde{g} = \tilde{g}$, že $\tilde{\eta}$ je regulární distribucí s hladkým generátorem $\eta(y)$

•) zdůvodnění, že od jistého k_0 platí pro všechna $k > k_0$, že

$$\eta_k(x,y)\,\eta(y)\varphi(x+y) = \eta(y)\varphi(x+y)$$

•) samotný výpočet

$$(\tilde{f} * \tilde{g}; \varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}(x) \otimes \tilde{g}(y); \eta_k(x,y)\varphi(x+y)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}(x); (\tilde{g}(y); \eta_k(x,y)\varphi(x+y))) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}(x); (\tilde{\eta}(y)\tilde{g}(y); \eta_k(x,y)\varphi(x+y))) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}(x); (\tilde{g}(y); \eta(y)\eta_k(x,y)\varphi(x+y))) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\tilde{f}(x); (\tilde{g}(y); \eta(y)\varphi(x+y))) = (\tilde{f}(x) \otimes \tilde{g}(y); \eta(y)\varphi(x+y))$$

8b

•) Q_λ je vektorový prostor, neboť je uzavřený na sčítání a násobení číslem

•) $\varphi, \psi \in Q_\lambda \Rightarrow \hat{L}\varphi = \lambda\varphi \wedge \hat{L}\psi = \lambda\psi \Rightarrow \hat{L}(\varphi+\psi) = \hat{L}\varphi + \hat{L}\psi =$
$= \lambda\varphi + \lambda\psi = \lambda(\varphi+\psi)$

•) $\psi \in Q_\lambda \wedge \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \hat{L}\psi = \lambda\psi \Rightarrow \hat{L}(\alpha\psi) = \alpha\hat{L}\psi = \alpha\lambda\psi = \lambda(\alpha\psi)$

... využito linearity operátoru $\hat{L}$

••) Q_λ není prostorem vlastních funkcí, neboť do něj zjevně patří nulový vektor, což je v rozporu s definicí vlastní funkce

co chci ukázat!

•••) $\varphi \in Q_\lambda$ libovolné $\Rightarrow \hat{L}\varphi = \lambda\varphi$
$\psi \in Q_\mu$ libovolné $\Rightarrow \hat{L}\psi = \mu\psi$
$\Rightarrow$ chci ukázat, že $\varphi \perp \psi \Leftrightarrow \langle\varphi|\psi\rangle = 0$

$$\langle \hat{L}\varphi|\psi\rangle = \lambda\langle\varphi|\psi\rangle$$
$$\langle \hat{L}\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\hat{L}\psi\rangle = \langle\varphi|\mu\psi\rangle = \mu^*\langle\varphi|\psi\rangle \overset{\sigma(\hat{L})\subset\mathbb{R}}{=} \mu\langle\varphi|\psi\rangle$$

tady se ale neobejdu bez hermiteovskosti operátoru

Shrnuto:
$$\lambda\langle\varphi|\psi\rangle = \mu\langle\varphi|\psi\rangle$$
$$\underbrace{(\lambda-\mu)\langle\varphi|\psi\rangle = 0 \quad \& \quad \lambda \neq \mu}$$
$$\Rightarrow \langle\varphi|\psi\rangle \overset{!}{=} 0 \quad \text{q.e.d.}$$

::) Co ale ta hermiteovskost?

Věta říká, že je-li spektrum operátoru s čistě bodovým spektrem podmnožinou $\mathbb{R}$, pak je $\hat{L}$ hermiteovský.

$\Rightarrow$ Oba předpoklady jsou nezbytné!

$\mathcal{F}[xy e^{i(x+y)}] = ?$

Věme z desatera: •) $\mathcal{F}[\delta(\vec{x}-\vec{\mu})] = e^{i\vec{\xi}\vec{\mu}}$, tj $\mathcal{F}[\delta((x,y)-(\mu_1,\mu_2))] =$
$= e^{i\xi_1\mu_1 + i\xi_2\mu_2}$

••) $\mathcal{F}\mathcal{F}[f(\vec{x})] = (2\pi)^2 f(-\vec{x})$

•••) $\mathcal{F}[ix\,iy\,f(x,y)] = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\mathcal{F}[f(x,y)]$

√ za nějaký smysluplný nápad!

Řešení:

$\mathcal{F}[\delta((x,y)-(1,1))] = e^{i\xi}e^{i\eta}$ √ $\quad / \mathcal{F}$

$(2\pi)^2\delta((-x,-y)-(1,1)) = \mathcal{F}[e^{i\xi+i\eta}]$ √ √ $\quad / \leftrightarrow$

$\mathcal{F}[e^{i(x+y)}] = 4\pi^2\delta((-\xi,-\eta)-(1,1)) \quad / \ \delta(\vec{x}-\vec{\mu}) = \delta(\vec{\mu}-\vec{x})$

$\mathcal{F}[e^{i(x+y)}] = 4\pi^2\delta((\xi,\eta)+(1,1)) \quad /$

$\mathcal{F}[i \cdot i\,xy\,e^{i(x+y)}] = 4\pi^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}\delta((\xi,\eta)+(1,1))$ √

$\mathcal{F}[xy e^{i(x+y)}] = -4\pi^2\frac{\partial^2\delta_{(-1,-1)}}{\partial\xi\partial\eta}$ √√

Pokud to někdo řešil jako klasickou Fourierovu transformaci, pak byl mimo, neboť

$xy e^{i(x+y)} \notin \mathcal{S} \wedge xy e^{i(x+y)} \notin \mathcal{L}_1$

pak žádné body!

$$\varphi(x) = 2\int_0^\infty \left(x e^{-x^2-y^2} + x y^2 e^{-x^2}\right)\varphi(y)\,dy - \frac{1}{2} x e^{-x^2}$$

$$\varphi(x) = 2x e^{-x^2} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y^2}\varphi(y)\,dy}_{A} + 2x \underbrace{\int_0^\infty y^2 \varphi(y)\,dy}_{B} \cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2} x e^{-x^2}$$

$$\varphi(x) = 2A x e^{-x^2} + 2B x e^{-x^2} - \frac{1}{2} x e^{-x^2}$$

•) $A = 2A \int_0^\infty x e^{-2x^2}\,dx + 2B \int_0^\infty x e^{-2x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty x e^{-2x^2}\,dx$

••) $B = 2A \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx + 2B \int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

Pomocné výpočty:

$$\int_0^\infty x e^{-2x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} y = 2x^2 \\ dy = 4x\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-y}\,dy = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{matrix} \right| = \int_0^\infty y \frac{1}{2} e^{-y}\,dy = \left| \begin{matrix} u = y & v' = e^{-y} \\ u' = 1 & v = -e^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-y e^{-y}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 2A \cdot \tfrac{1}{4} + 2B \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} \\ B &= 2A \cdot \tfrac{1}{2} + 2B \cdot \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{8} \\ B &= A + B - \tfrac{1}{4} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow A = \tfrac{1}{4} \wedge B = \tfrac{1}{2}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x e^{-x^2} + x e^{-x^2} - \frac{1}{2} x e^{-x^2} = x e^{-x^2}$$

! Metodu iterovaných jader ani metodu postupných aproximací užít nelze, neboť není splněn předpoklad, aby G byla omezenou oblastí!! $G = (0; +\infty)$

V důkazu s výhodou užijeme faktu, že $\mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{n+m})$ je hustá v $\mathcal{D}(\mathbb{E}^{n+m})$, kde

$$\mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{n+m}) = \left\{ \tilde{\varphi}(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y}) : n \in \mathbb{N} \wedge \varphi_k(\vec{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^n) \wedge \psi_k(\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^m) \right\}$$

a) komutativitu prokážeme nejprve pro testovací funkce z $\mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{n+m})$

– zvolme $\eta(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}_{SEP}$ libovolně

$$(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{x},\vec{y})) := \left(\tilde{f}(\vec{x}); \left(\tilde{g}(\vec{y}); \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right)\right) = \left| \begin{array}{l}\text{linearita funkcionálu } \tilde{g} \\ + \text{ linearita funkcionálu } \tilde{f}\end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{f}(\vec{x}); (\tilde{g}(\vec{y}); \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y}))\right) = \left| \begin{array}{l}\text{ve vnitřním funkcionálu: násobení číslem} \\ \text{a kontrola, že } \varphi_k(\vec{x}) \cdot (\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y})) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^n)\end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x}) \cdot (\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y}))\right) = \left| \begin{array}{l}\text{ve vnějším funkcionálu} \\ \text{násobení číslem } (\tilde{g}; \psi_k(\vec{y}))\end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x}))}_{\in \mathbb{C}} \cdot \underbrace{(\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y}))}_{\in \mathbb{C}} = \left| \begin{array}{c}\text{komutativita násobení} \\ \text{v } \mathbb{C}\end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\tilde{g}(\vec{y}); \psi_k(\vec{y})) \cdot (\tilde{f}(\vec{x}); \varphi_k(\vec{x})) = \ldots \quad \text{a dále pokračujeme nazpět}$$

b) komutativitu prokážeme $\forall \eta(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^{n+m})$. Ke každé takové testovací funkci ale existuje posloupnost $\eta_n(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{n+m})$ taká, že $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\vec{x},\vec{y}) = \eta(\vec{x},\vec{y})$.

Proto

$$(\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta(\vec{x},\vec{y})) = (\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \lim_{n\to\infty} \eta_n(\vec{x},\vec{y})) = \left| \begin{array}{c}\text{spojitost} \\ \text{funkcionálu}\end{array} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\tilde{f}(\vec{x}) \otimes \tilde{g}(\vec{y}); \eta_n(\vec{x},\vec{y})) = \left| \begin{array}{c}\eta_n(\vec{x},\vec{y}) \\ \in \mathcal{D}_{SEP}\end{array} \right| + \text{viz bod } ① \Big| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\tilde{g}(\vec{y}) \otimes \tilde{f}(\vec{x}); \eta_n(\vec{x},\vec{y})) = \left| \begin{array}{c}\text{spojitost} \\ \text{funkcionálu}\end{array} \right| = (\tilde{g}(\vec{y}) \otimes \tilde{f}(\vec{x}); \lim_{n\to\infty} \eta_n(\vec{x},\vec{y})) =$$

$$= (\tilde{g}(\vec{y}) \otimes \tilde{f}(\vec{x}); \eta(\vec{x},\vec{y})) \qquad \forall \eta(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^{n+m})$$

q.e.d

$$\mathcal{Y}[f(x)] := \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx =: F(s)$$

1) $\mathrm{Dom}(\mathcal{Y}) = \mathcal{P}$?

1) $\forall x \leq 0 \quad f(x) = 0$
2) $f(x)$ po částech spojitá na $\mathbb{R}$
3) $(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists K > 0)(\exists \alpha \geq 0): \; x > x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq K\cdot e^{\alpha x}$

2) $\mathrm{ind}(f) = \inf\limits_{\alpha \geq 0} \{ |f(x)| \leq K\cdot e^{\alpha x} \text{ od jistého } x_0 \}$

3) Chceme ukázat, že pro všechna $s > \mathrm{ind}(f)$ je integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}$ konečný

$\mathrm{ind}(f)$, β, s, $+\infty$

- vezměme tedy $s \in (\mathrm{ind}(f); +\infty)$ libovolně
- k němu jistě existuje β tak, že $\mathrm{ind}(f) < \beta < s$
- podle definice indexu jistě ale existují $x_0 \in \mathbb{R}$ a $K > 0$ tak, že

$$x > x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq K\cdot e^{\beta x}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx = \underbrace{\int_0^{x_0} x\, f(x)\, e^{-sx}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{x_0}^\infty f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx}_{2}$$

1 jistě existuje, neboť integrand je po částech spojitá funkce, tedy existují intervaly $(0, x_1); (x_1, x_2); \dots; (x_{n-1}; x_0)$, na nichž je integrand spojitý $\Rightarrow \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\, f(x)\, e^{-sx}\,dx \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\int_0^{x_0} x\, f(x)\, e^{-sx}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} x\, f(x)\, e^{-sx}\,dx \in \mathbb{R}$$

2 existuje ze srovnávacího kritéria

$$|f(x)\cdot x\cdot e^{-sx}| \leq K\cdot e^{\beta x}\cdot x\cdot e^{-sx} = K\cdot x\cdot e^{-(s-\beta)x} \in \mathcal{L}(x_0; +\infty)$$

$\Rightarrow$ konvoluce existuje! $\qquad \Leftarrow s-\beta > 0$!

a

b

4) $\mathcal{Y}[f(x) * g(x)] = \left| f,g \in \mathcal{P} \right| = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(a)\cdot g(x-a)\,da\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx =$

$\Leftarrow$ lze uvážit, neboť $f,g \in \mathcal{P}$

$= \left| \text{Fubiniho} \right| = \int_{\mathbb{R}} f(a) \int_{\mathbb{R}} g(x-a)\cdot x\cdot e^{-sx}\,dx\,da = \left| \begin{array}{l} y = x-a \\ \text{substituce ve vnitřním integrálu} \end{array} \right| =$

$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(a) g(y)\, e^{-s(y+a)}\cdot (y+a)\,da\,dy \overset{\text{LIN.}}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(a)\cdot g(y)\cdot y\cdot e^{-sy}\cdot e^{-sa}\,da\,dy + \int_{\mathbb{R}^2} f(a) g(y)\, a\, e^{-sy} e^{-sa}\,dy\,da =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{věta o} \\ \text{separabilitě} \end{array} \right| = \int_{\mathbb{R}} f(a)\, e^{-sa}\,da \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y)\cdot y\cdot e^{-sy}\,dy + \int_{\mathbb{R}} g(y)\, e^{-sy}\,dy \int_{\mathbb{R}} a\, f(a)\, e^{-sa}\,da = \mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{Y}[g] + \mathcal{L}[g]\cdot\mathcal{Y}[f]$

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; u(x,y)\right) = f(x,y)$$

Matice PDE:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} a(x,y) & \frac{1}{2} b(x,y) \\ \frac{1}{2} b(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$$

a) PDE je parabolická v bodě $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pokud má matice $A(x,y)$ alespoň jedno (zde právě jedno) vlastní číslo nulové. Určíme tedy vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b/2 \\ b/2 & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - \frac{b^2}{4} \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 + (b^2 - 4ac)} \right]$$

aby $\lambda_1 = 0$, je nutné aby $b^2 - 4ac = 0$, tj. $D(x,y) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad G_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : D(x,y) = 0\}$$

b) Je-li $D(x,y) > 0$, tj. $b^2 - 4ac > 0$, potom je $\sqrt{(a+c)^2 + D} > a+c$, a obě vlastní čísla jsou buďto kladná. Proto

$$G_E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : D(x,y) > 0\}.$$

c) Je-li $D(x,y) < 0$, pak $\sqrt{(a+c)^2 + D} < a+c$, a buďto jedno z vlastních čísel λ_1, λ_2 je kladné a druhé záporné. Proto

$$G_H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : D(x,y) < 0\}.$$

$$D(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y) \cdot b(x,y)$$

I. $W_0 = \{ f : \cancel{Kf = 0} \}$ definice ✓ $W_f = \{ \varphi : \cancel{Kf = \varphi} \}$

$\mu \hat{K} \varphi = \varphi$ $\quad$ $\mu \hat{K} \varphi + f = \varphi$

- třídy W_0 a W_f mají totožný počet prvků (kardinální číslo), neboť existuje bijekce mezi W_0 a W_φ
- W_f je tohž varieta se zaměřením W_f ✓

$$\forall \varphi, \psi \in W_f : \quad \hat{K}(\varphi - \psi) = \hat{K}\varphi - \hat{K}\psi = f - f = 0 \Rightarrow \varphi - \psi \in W_0$$

- chceme-li kdy např. dokázat, že $\operatorname{card}(W_f) = 1$, pak je to ekvivalentní důkazu, že $\operatorname{card}(W_0) = 1$

II. Jedinečnost řešení Volterrovy integrální rovnice ✓

a) Volterrův integrální operátor je omezený, protože

$$\| \mu^k \hat{K}^k \varphi \|_\sigma \leq |\mu|^k \cdot \frac{M^k \cdot a^k}{k!} \| \varphi \|_\sigma , \checkmark$$

kde $M = \max\limits_{\langle 0,a \rangle^2} |\mathcal{K}(x,y)|$; $V = \lambda_1(\langle 0, a \rangle) = a$

b) řešení bude jednoznačné, pokud bude mít rovnice $\mu \hat{K}\varphi + 0 = \varphi$ s nulovou pravou stranou právě jediné řešení ✓

$$\mu \hat{K} \varphi = \varphi$$

$$\| \mu \hat{K} \varphi \|_\sigma = \| \mu \varphi \|_\sigma \leq |\mu|^k \cdot \frac{M^k \cdot a^k}{k!} \| \varphi \|_\sigma \checkmark$$

Protože $\lim\limits_{k \to \infty} |\mu|^k \frac{M^k \cdot a^k}{k!} = 0$, což víme, protože $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\mu|^k \frac{M^k \cdot a^k}{k!} \| \varphi \|_\sigma = e^{|\mu| \cdot M \cdot a} \cdot \| \varphi \|_\sigma$ a je nutná podmínka ✓, pak lze nerovnici

zdůvodnění, proč platí ✓

$$\| \mu \varphi \|_\sigma \leq |\mu|^k \cdot \frac{M^k \cdot a^k}{k!} \| \varphi \|_\sigma$$

splnit jediné tehdy, pokud $\| \varphi \|_\sigma = 0$, což vzhledem k axiomům normy nastává pouze, je-li

$$\varphi(x) = 0 !$$

✓

7

```
In[6]:= Integrate[Integrate[Integrate[u^A, {u, 0, z}], {z, 0, y}], {y, 0, x}]
```

Out[6]= ConditionalExpression$\left[\frac{x^{3+A}}{6+11A+6A^2+A^3}, \mathrm{Re}[A] > -1\right]$

```
In[7]:= Integrate[s^A * (x - s)^2, {s, 0, x}] / 2
```

Out[7]= ConditionalExpression$\left[\frac{x^{3+A}}{6+11A+6A^2+A^3}, \mathrm{Re}[A] > -1\right]$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\dots dx_3\,dx_2\,dx_1\right] =$$

W za nápad jít přes Laplaceovu transformaci

$$= \frac{1}{p}\mathcal{L}\left[\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_{n-2}}\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\,dx_{n-1}\dots dx_3\,dx_2\right] =$$

$$= \frac{1}{p^2}\mathcal{L}\left[\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\dots dx_3\right] = \frac{1}{p^n}\cdot\mathcal{L}[f(x)] = \checkmark$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{(n-1)!}{p^n}\cdot\mathcal{L}[f(x)] = \underbrace{\frac{1}{(n-1)!}\mathcal{L}[\Theta(x)\cdot x^{n-1}]\cdot\mathcal{L}[f(x)]}_{\checkmark} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\mathcal{L}[\Theta(x)\,x^{n-1} * f(x)]$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{W} \quad \wedge$$

$$\wedge \quad \int_0^x\int_0^{x_1}\dots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n\dots dx_2\,dx_1 = \overbrace{\Theta(x)\,x^{n-1} * f(x)}^{\checkmark} =$$

$$= \Theta(x)\,x^{n-1} * \Theta(x)\,f(x) = \int_0^x (x-s)^{n-1} f(s)\,ds$$

$$\lambda_n = 8\cos\frac{\pi}{2n} - 8i\sin\frac{\pi}{2n} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n \cdot \lambda_n^* = |\lambda_n|^2 = 8^2\cos^2(\alpha) + 8^2\sin^2(\alpha) = 8^2 = 64$$

$$\|f-g\|^2 = \langle f-g|f-g\rangle = \langle f|f\rangle - \langle f|g\rangle - \langle g|f\rangle + \langle g|g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f|g\rangle$$

$$\|\hat{L}f - \hat{L}g\|^2 = \|\hat{L}f\|^2 + \|\hat{L}g\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle \hat{L}f|\hat{L}g\rangle$$

a) $\hat{L}$ je s čistě bodovým spektrem $\Rightarrow$ báze $\{\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3; \dots\}$ je v $\mathcal{H}$ vytvořena pouze z vlastních funkcí operátoru $\hat{L}$ $\Rightarrow$ $\hat{L}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$

za používání divných sum

$\Rightarrow$ každou funkci z $\mathcal{H}$ lze rozepsat do Fourierovy řady, tj. $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$, kde $a_k = \langle f|\varphi_k\rangle$ $\wedge$ $g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k$; $b_k = \langle g|\varphi_k\rangle$

explicitně vypsáno!

$$\Rightarrow \|f\|^2 = \langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k | \sum_{l=1}^{\infty} a_l\varphi_l\rangle = \Big/ \begin{matrix}\text{spojitost}\\ \text{s.s.}\end{matrix} \Big/ = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \langle a_k\varphi_k | a_l\varphi_l\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k a_l^* \langle \varphi_k|\varphi_l\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \quad \wedge \quad \|g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2$$

$$\Rightarrow \|\hat{L}f\|^2 = \langle \hat{L}(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k) | \hat{L}(\sum_{l=1}^{\infty} a_l\varphi_l)\rangle = \Big/ \begin{matrix}\hat{L}\text{ je spojitý} \Leftarrow \hat{L}\text{ je omezený} \Leftarrow \\ \hat{L}\ \mathcal{H}\ \text{OSČBS}\end{matrix} \Big/ =$$

mohl být explicitně vypsán

$$= \langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{L}(a_k\varphi_k) | \sum_{l=1}^{\infty} \hat{L}(a_l\varphi_l)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k\lambda_k\varphi_k | \sum_{l=1}^{\infty} a_l\lambda_l\varphi_l\rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_k\lambda_k a_l^*\lambda_l^* \langle\varphi_k|\varphi_l\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2|a_k|^2 = 64\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2 = 64\|f\|^2$$

analogicky: $\|\hat{L}g\|^2 = 64\|g\|^2$

$$\Rightarrow \langle \hat{L}f|\hat{L}g\rangle = \langle \hat{L}(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k) | \hat{L}(\sum_{l=1}^{\infty} b_l\varphi_l)\rangle = \Big/ \begin{matrix}\text{analogickým}\\ \text{zdůvodněním}\end{matrix}\ (\text{viz výše}) \Big/ =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^* |\lambda_k|^2 = 64\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k^* = 64\langle f|g\rangle$$

$$\Rightarrow \|\hat{L}f - \hat{L}g\|^2 = 64\|f\|^2 + 64\|g\|^2 - 128\,\mathrm{Re}\,\langle f|g\rangle = 64\|f-g\|^2$$

$$\Rightarrow \qquad U = \{8\}$$

b) změnou geometrické násobnosti z $r=1$ (prosté vlastní číslo) na $r=3$ se nic nemění! Tj. $U = \{8\}$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' ; \varphi(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' ; n^2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x)\right) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x} ; 2n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\cos\left(\frac{x}{n}\right)\varphi(x) + n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\varphi'(x)\right) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x} ; n\cdot\sin\left(\frac{2x}{n}\right)\varphi(x) + n^2\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\varphi'(x)\right) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\,\frac{\sin\left(\frac{2x}{n}\right)\varphi(x)+\sin\left(\frac{2x}{n}\right)\varphi(-x)}{x}\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n^2\,\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\varphi'(x)-\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\varphi'(-x)}{x}\,dx =$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n\cdot\sin\left(\frac{2x}{n}\right)\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n^2\cdot\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}\,dx =$$

$$= \left|\ \left|\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{2x}{n}\right)}{\frac{2x}{n}}}_{\rightsquigarrow\ x\to 0_+ \dots y\to 1} 2\left[\varphi(x)+\varphi(-x)\right]\right| \leq \underbrace{2K\cdot\Theta(R-x)}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R})} \quad \left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x^2}{n^2}}\cdot x\cdot\left[\varphi'(x)-\varphi'(-x)\right]\right| \leq \underbrace{Kx\,\Theta(R-x)}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R})}\ \right| =$$

máme $\frac{\varphi'(x)-\varphi'(-x)}{x}$ je omezené

citace věty

$$= -\int_0^\infty \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{x}\cdot 2x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2x}{n}\right)}{\frac{2x}{n}}\,dx - \int_0^\infty x\left[\varphi'(x)-\varphi'(-x)\right]\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x^2}{n^2}}\,dx =$$

$$= -\left[2\int_0^\infty\varphi(x)\,dx + 2\int_0^\infty\varphi(-x)\,dx + \int_0^\infty x\cdot\varphi'(x)\,dx - \int_0^\infty x\,\varphi'(-x)\,dx\right] = \left|\begin{array}{l} y=-x \\ dy=-dx\end{array}\right| =$$

$$= -\left[2\int_0^\infty\varphi(x)\,dx + 2\int_{-\infty}^0\varphi(y)\,dy + \int_0^\infty x\,\varphi'(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 y\,\varphi'(y)\,dy\right] =$$

$$= -\left[2\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}} x\cdot\varphi'(x)\,dx\right] = \left|\begin{array}{ll} u=x & v'=\varphi' \\ u'=1 & v=\varphi\end{array}\right| = -\left[2\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx + \left[x\cdot\varphi(x)\right]_{\mathbb{R}} -\right.$$

$$\left. - \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx\right] = -\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx = (-1;\varphi(x))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} -1$$

$$\int_R f(x)\,G(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} f,g \in \mathcal{S}(R) \\ G(x) = \mathcal{F}[g(s)] = \int_R g(s)\,e^{isx}\,ds \end{array} \right| = \int_R f(x) \int_R g(s)\,e^{isx}\,ds\,dx$$

$$= \left| \; ? \; \right| = \int_{R^2} f(x)\,g(s)\,e^{isx}\,d(x,s) \quad = (*)$$

odvození ✓✓

citace správného předpokladu ve Fubiniově větě ✓✓

potvrzení naplnění předpokladu ✓✓✓

Víme, že:

1) $f(x) \in \mathcal{S}(R)$

2) $G(x) = \mathcal{F}[g(s)] \in \mathcal{S}(R)$

3) $f(x), G(x) \in \mathcal{S}(R) \Rightarrow f(x)\cdot G(x) \in \mathcal{S}(R)$

4) $f(x)G(x) \in \mathcal{S}(R) \Rightarrow f(x)G(x) \in \mathcal{L}_1(R) \Rightarrow f(x)G(x) \in \mathcal{L}(R)$

Předpokladem ve Fubiniově větě je, aby integrand $f(x)G(x)$ patřil do $\mathcal{L}^*(R)$, tj. aby alespoň existoval $\int_R f(x)\,G(x)\,dx$ a nemusí ani být konečný!

$$f(x)G(x) \in \mathcal{L}(R) \;\wedge\; \mathcal{L}(M) \subset \mathcal{L}^*(M) \Rightarrow f(x)G(x) \in \mathcal{L}^*(R)$$

$$(*) = \int_R g(s)\left(\int_R f(x)\,e^{isx}\,dx\right)ds = \int_R g(s)\,F(s)\,ds$$

$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \langle \hat{L} f | \varphi_n \rangle = \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \quad \& \quad \underbrace{\langle f | \varphi_1 \rangle = \pi \quad \& \quad \langle f | \varphi_{n+1} \rangle = \frac{1}{3} \langle f | \varphi_n \rangle}_{a_n = \langle f | \varphi_n \rangle = \pi \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

$$\|\hat{L} f\|^2 = \langle \hat{L} f | \hat{L} f \rangle = \langle \hat{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n\right) | \hat{L}\left(\sum_{e=1}^{\infty} a_e \varphi_e\right) \rangle = \left| \begin{matrix}\text{OSČBS je z definice omezený} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{spojitý}\end{matrix} \right| =$$

$$= \langle \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}(a_n \varphi_n) | \sum_{e=1}^{\infty} \hat{L}(a_e \varphi_e) \rangle = \left| \begin{matrix}\text{spojitost} \\ \text{skal. součinu}\end{matrix} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \langle \hat{L}(a_n \varphi_n) | \hat{L}(a_e \varphi_e) \rangle =$$

bylo-li zdůvodněno

bylo-li zdůvodněno

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} \langle a_n \lambda_n \varphi_n | a_e \lambda_e \varphi_e \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{e=1}^{\infty} a_n a_e^* \lambda_n \lambda_e^* \langle \varphi_n | \varphi_e \rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \cdot |\lambda_n|^2 \qquad \text{[neznáme ale vlastní čísla!]}$$

$$\langle \hat{L} f | \varphi_n \rangle = \langle \hat{L}\left(\sum_{e=1}^{\infty} a_e \varphi_e\right) | \varphi_n \rangle = \left| \begin{matrix}\text{OSČBS je omezený} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{spojitý}\end{matrix} \right| = \langle \sum_{e=1}^{\infty} \hat{L}(a_e \varphi_e) | \varphi_n \rangle =$$

$$= \left| \text{s.s.s.} \right| = \sum_{e=1}^{\infty} \langle \hat{L}(a_e \varphi_e) | \varphi_n \rangle = \sum_{e=1}^{\infty} \langle a_e \lambda_e \varphi_e | \varphi_n \rangle =$$

$$= \sum_{e=1}^{\infty} a_e \lambda_e \langle \varphi_e | \varphi_n \rangle = a_n \cdot \lambda_n \cdot \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = a_n \cdot \lambda_n \overset{!}{=} \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad a_n^* \cdot \lambda_n^* = \sqrt{\frac{2^n}{n!}} \quad \Rightarrow \underbrace{|a_n|^2 \cdot |\lambda_n|^2 = \frac{2^n}{n!}}$$

$$\Rightarrow \quad \|\hat{L} f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-2} = 9\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = 9\pi^2 \frac{1/9}{1 - 1/9} = 9\pi^2 \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\hat{L} f\|}{\|f\|} = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{3\pi} 2\sqrt{2} = \frac{2}{3\pi} \sqrt{2e^2 - 2}$$

*) Alternativně lze řešit přes Parsevalovu rovnost. Zde je ale nutné ověřit předpoklady pro jeho použití!

$$x \cdot \frac{1}{x \pm i0} = ? \quad v \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\left(x \cdot \frac{1}{x \pm i0}; \varphi(x)\right) = \left(\frac{1}{x \pm i0}; x\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}(x \mp i\varepsilon)\, dx = \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\, dx}_{:= I_1} \mp i \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\, dx}_{=: I_2}$$

rozšíření a rozdělení na 2 limity

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\, dx = \Bigg/$$ Potřebujeme integrabilní majorantu k integrandu nezávislou na $\varepsilon > 0$! $\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\right| \leqq |\varphi(x)| \in \mathcal{L}(\langle -R, R\rangle)}$

$$= \int_{-R}^{R} 1 \cdot \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = (1, \varphi(x))$$

$$I_2 = \left| \begin{matrix} y\varepsilon = \cancel{x} \\ \varepsilon\, dy = d\cancel{x} \end{matrix} \right| = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{y\varepsilon^2}{y^2\varepsilon^2+\varepsilon^2}\varphi(y\varepsilon)\,\varepsilon\, dy = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2+1}\varphi(y\varepsilon) \cdot \varepsilon\, dy$$

$= \Big/$ potřebujeme integrab. majorantu k integrandu; využijeme k tomu faktu, že $y \cdot \varphi(y\varepsilon) = \psi(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{y \cdot \varphi(y\varepsilon)}{y^2+1}\varepsilon\right| \leqq \frac{K \cdot 1}{y^2+1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})}$ $\Big/ =$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{y \cdot \varphi(0)}{y^2+1} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, dy = 0$$

Ale musí tohoto výsledku být dosaženo regulérně!

$$\Rightarrow \underbrace{x \cdot \frac{1}{x \pm i0} = 1 \quad v \quad \mathcal{D}'}$$

Rozhodněte, definuje-li předpis

$$(\tilde{g};\varphi(x)) = \int_R \ln|x|\cdot\varphi(x)\,dx \quad \text{zobecněnou funkci.}$$

Je-li, vypočtěte její první derivaci.

12

1) Nejprve ověříme, zda je funkce $\ln|x|$ lokálně integrabilní. Nechť K je kompaktní množina taková, že $K \subset \langle\varepsilon;+\infty)$ pro $\varepsilon>0$. Pak $\int_K \ln|x|\,dx$ jistě existuje, neboť $\ln|x|$ je spojitá na K a K je kompaktní. Zbývá tedy rozhodnout, zda konverguje integrál $\int_0^c \ln|x|\,dx = \int_0^c \ln x\,dx$.

$$\int_0^c \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln x & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x} & v=x \end{matrix} \right| = \left[x\cdot\ln x\right]_0^c - \int_0^c 1\,dx =$$

$$= c\cdot\ln c - \lim_{x\to0_+} x\cdot\ln x - c = c(\ln c-1) - \lim_{x\to0_+}\frac{\ln x}{1/x} \overset{l'H}{=}$$

$$= c(\ln c-1) - \lim_{x\to0_+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = c(\ln c-1) + \lim_{x\to0_+} x = c(\ln c-1)$$

dokázat!

2) Dále dokážeme, že $\int_R \ln|x|\varphi(x)$ existuje $\forall\varphi\in\mathcal{D}(R)$. to chci dokázat. Snadno: $\ln|x|\in L_{loc} \wedge \varphi(x)\in\mathcal{D} \Rightarrow \ln|x|\varphi(x)\in L_{loc}$

$\Rightarrow \ln|x|\cdot\varphi(x)$ je lokálně integrabilní; označme R takový poloměr, že $\operatorname{supp}(\varphi)\subset S_R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_R \ln|x|\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{S_R}\ln|x|\cdot\varphi(x)\,dx = \int_{-R}^{R}\ln|x|\varphi(x)\,dx = \int_{\langle -R,R\rangle}\ln|x|\varphi(x)\,dx =$$

$$= \left| \langle -R,R\rangle \text{ je kompaktní} \right| = \int_{\langle -R,R\rangle}\ln|x|\varphi(x)\,dx \in R$$

3) linearita je splněna triviálně ← pokud ale byla dokázána existence integrálu!

4) dokážeme spojitost: $\varphi_k(x) \rightrightarrows 0 \;\wedge\; \exists K\in R^+ : \forall x\in R: |\varphi(x)|<K \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in R: |\ln|x|\cdot\varphi(x)| \leq K\cdot|\ln|x|| \;\wedge\; |\ln|x||\in\mathcal{L}_{loc}$

(užíváme: $f(x)\in\mathcal{L}(R) \Rightarrow |f(x)|\in\mathcal{L}(R)$)

$|\ln|x||$ je integrabilní majoranta

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int_R \ln|x|\varphi_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{-R}^{R}\ln|x|\cdot\varphi_k(x)\,dx = \int_{-R}^{R}\ln|x|\cdot\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)\,dx = \int_{-R}^{R} 0\,dx = 0$$

5) $$\left(\frac{d}{dx}\ln|x|;\varphi(x)\right) = -\left(\ln|x|;\varphi'(x)\right) = -\int_R \ln|x|\cdot\varphi'(x)\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln|x| & \varphi'(x)=v' \\ u'=\frac{1}{x} & v=\varphi \end{matrix} \right| =$$

$$= \left[\varphi(x)\ln|x|\right]_{-\infty}^{\infty} + \lim_{\varepsilon\to0_+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) = V_p\int_R\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x};\varphi(x)\right)$$

Známe: $\langle \hat{L}(\varphi_k) | \varphi_n \rangle =: \beta_{kn} \in \mathbb{C}$ operátorová báze: $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ 11b

Co víme o číslech β_{kn}? ✓ 1) $k \neq n \Rightarrow \langle \hat{L}(\varphi_k) | \varphi_n \rangle = \langle \lambda_k \varphi_k | \varphi_n \rangle = \lambda_k \langle \varphi_k | \varphi_n \rangle = 0$

✓ 2) $k = n \Rightarrow \langle \hat{L}(\varphi_n) | \varphi_n \rangle = \lambda_n \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle = \lambda_n$

$\Rightarrow$ matice $\mathbb{B} = (\beta_{kn})_{k,n=1}$ je diagonální a na diagonále má vlastní čísla operátoru $\hat{L}$ } ✓

II. definice hermiticity operátoru: $\forall f \in \mathcal{H}: \quad \langle \hat{L} f | g \rangle = \langle f | \hat{L} g \rangle$

- zadání dovoluje užití fourierovských rozvojů: $f = \sum_k a_k \varphi_k \wedge g = \sum_\ell b_\ell \varphi_\ell$

$\boxed{\checkmark \text{ za odlišování typů sumací } (\sum \text{ vs } \sum)}$ ✓ $a_k = \langle f | \varphi_k \rangle$ & $b_\ell = \langle g | \varphi_\ell \rangle$

$$\langle \hat{L} f | g \rangle = \langle \hat{L} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k | \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \varphi_\ell \rangle = \left| \begin{array}{c}\text{OSČBS je z} \\ \text{definice omezený} \\ \Rightarrow \text{spojitý}\end{array} \right| = \langle \sum_{k=1}^{\infty} \hat{L}(a_k \varphi_k) | \sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \varphi_\ell \rangle =$$

co dokazujeme ✓

$$= \left| \begin{array}{c}\text{spojitost} \\ \text{s. s.}\end{array} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \hat{L}(a_k \varphi_k) | b_\ell \varphi_\ell \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell^* \langle \hat{L}(\varphi_k) | \varphi_\ell \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell^* \beta_{k\ell} \checkmark$$

$$\langle f | \hat{L} g \rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k | \hat{L}(\sum_{\ell=1}^{\infty} b_\ell \varphi_\ell) \rangle = | \text{analogicky} | = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell^* \langle \varphi_k | \hat{L}(\varphi_\ell) \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell^* \langle \hat{L}(\varphi_\ell) | \varphi_k \rangle^* = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} a_k b_\ell^* \beta_{\ell k}^* \checkmark$$

Odtud:

✓ { Platí-li $\beta_{k\ell} = \beta_{\ell k}^* \ \forall \ell, k$ (tj. je-li matice $\mathbb{B}$ hermitovská), pak je i $\hat{L}$ hermitovský.

III. ✓✓

$$\|\hat{L} f\|^2 = \langle \hat{L} f | \hat{L} f \rangle = \langle \hat{L}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n) | \hat{L}(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi_m) \rangle = \left| \begin{array}{c}\text{spojitost} \\ \text{operátoru (viz výše)}\end{array} \right| =$$

$$= \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n \hat{L}(\varphi_n) | \sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda_m \varphi_m \rangle = \left| \begin{array}{c}\text{spojitost} \\ \text{s. s.}\end{array} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \langle a_n \hat{L}(\varphi_n) | a_m \lambda_m \varphi_m \rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m^* \lambda_m^* \langle \hat{L} \varphi_n | \varphi_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m^* \lambda_m^* \beta_{mn}$$

lze to ale (na základě první části i upravit):

$$\|\hat{L} f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m^* \beta_m^* \beta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \cdot |\beta_n|^2 \Big\} \checkmark$$

1b

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x^3}\,dx = ?$$

$$\mathcal{L}[\Theta(x)\cdot x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}[\Theta(x)\cdot x^2] = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[\Theta(x)\cdot\sin(x)] = \frac{1}{1+s^2} \quad \& \quad \mathcal{L}[\Theta(x)\cdot\cos(x)] = \frac{s}{1+s^2}$$

$$\mathcal{L}[x\cdot f(x)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(x)] \Rightarrow \mathcal{L}[\Theta(x)\cdot x\cdot\cos(x)] = \frac{1+s^2-2s^2}{(1+s^2)^2}(-1) = \frac{s^2-1}{(1+s^2)^2}$$

$$\mathcal{L}[\Theta(x)\cdot\sin(x) - \Theta(x)\cdot x\cdot\cos(x)] = \frac{1+s^2-s^2+1}{(1+s^2)^2} = \frac{2}{(1+s^2)^2}$$

$$I = \left|\begin{matrix}\text{na výše}\\ \text{která vlastnost}\end{matrix}\right| = \int_0^\infty \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^2 \overset{+1-1}{}}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = [\operatorname{arctg}(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx =$$

za vyřešení 1 integrálu

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = \operatorname{tg}(u) \Rightarrow u = \operatorname{arctg}(x) \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(u)}\,du = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2(u)\,du = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,du =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{w}(x,t)}{\partial t}; \varphi(x,t)\right) = -\left(\tilde{w}(x,t); \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right) = -\int_{\mathbb{R}^2} w(x,t)\cdot \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\, dx\, dt =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} u(x,t)\, \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\, dt\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{per partes ve vnitřním integrálu} \\ u = u \qquad \dot{v} = \dot{\varphi} \\ \dot{u} = \dot{u} \qquad v = \varphi \end{array} \right| =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left[u(x,t)\varphi(x,t)\right]_0^{\infty} dx + \int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\cdot \varphi(x,t)\, dt\, dx =$$

za preciznost zápisu!

$$= +\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t)\cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\varphi(x,t)\, d(t,x) =$$

$$= +\int_{\mathbb{R}} u(x,0)\cdot \left(\delta(t); \varphi(x,t)\right) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \theta(t)\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\varphi(x,t)\, d(t,x) =$$

$$= \left(u(x,0); \left(\delta(t); \varphi(x,t)\right)\right) + \left(\tilde{\theta}(t)\cdot \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t}; \varphi(x,t)\right) =$$

$$= \left(u(x,0) \otimes \delta(t)\right) + \left(\tilde{\theta}(t)\cdot \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t}; \varphi(x,t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{w}(x,t)}{\partial t} = u(x,0) \otimes \delta(t) + \tilde{\theta}(t)\cdot \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t}$$

Pokud $u(x,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, pak lze součin $\tilde{u}(x,t) \cdot \tilde{\theta}(t)$ chápat jako součin libovolné distribuce ($\tilde{\theta}$) s regulární distribucí ($\tilde{u}$) mající hladký generátor. Pak lze předešlý výsledek zjednodušit aplikací Leibnizova pravidla:

$$\frac{\partial \tilde{w}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\theta}(t)\cdot \tilde{u}(x,t)\right) = \delta(t)\cdot \tilde{u}(x,t) + \tilde{\theta}(t)\cdot \frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial t}$$

I. existence funkcionálu $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$?

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^R \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx}_{B} + \underbrace{\int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx}_{A}$$

A ... existuje vždycky $\Leftarrow$ spojitý integrand na $\langle \varepsilon; R\rangle$ a $\langle \varepsilon, R\rangle$ kompakt

B ... $\left|\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqq \frac{K}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}(0,\varepsilon)$ toto je ale třeba dokázat: $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [2\sqrt{x}]_0^\varepsilon = 2\sqrt{\varepsilon} \in \mathbb{R}$

I. linearita funkcionálu

- pokud už víme, že na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ integrál vždy existuje, je linearita banálním důsledkem linearity integrálu

II spojitost funkcionálu

$$\varphi_k(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} a)\ \varphi_k^{(\alpha)}(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0 \\ b)\ \exists L>0:\ \mathrm{Dom}(\varphi_k) \subset B_L \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a) $(\tilde{h}; \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)) = (\tilde{h}; 0) = 0$

b) $\lim_{k\to\infty} (\tilde{h}; \varphi_k(x)) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \Big|$ tady je to místo, kde se zužitkuje stejnoměrná omezenost nosičů (potřebuji univerzální L!) $\Big| =$

$= \lim_{k\to\infty} \int_0^L \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \Big|$ Jistě existuje $M \in \mathbb{R}^+$ tak, že $|\varphi_k(x)| \leqq M \quad \forall x \in \langle 0, L\rangle;\ \forall k \in \mathbb{N}$ $\Leftarrow$ to plyne z toho, že $\langle 0, L\rangle$ je kompakt a zároveň $\varphi_k(x) \overset{\langle 0,L\rangle}{\rightrightarrows} 0$ $\Big| =$

$= \Big|$ $\left|\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{x}}\right| \leqq \frac{M}{\sqrt{x}}$ na $\langle 0, L\rangle$ $\wedge$ $\frac{M}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}(\langle 0, L\rangle)$ $\Leftarrow$ bylo již prokázáno

$\Rightarrow$ jsou splněny podmínky pro záměnu limity a $\int_0^L$ $\Big| =$

$$= \int_0^L \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^L 0\,dx = 0 \qquad \text{q.e.d.}$$

IV. výpočet

$$(\tilde{h}' \cdot x; \varphi(x)) = (\tilde{h}'; x\cdot\varphi(x)) = -(\tilde{h}; \varphi(x) + x\cdot\varphi'(x)) = -(\tilde{h}; \varphi(x)) - (\tilde{h}; x\cdot\varphi'(x)) =$$

$$= -(\tilde{h}; \varphi(x)) - \int_0^\infty \frac{x\cdot\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -(\tilde{h}; \varphi(x)) - \int_0^\infty \sqrt{x}\cdot\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{x} & v' = \varphi' \\ u' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} & v = \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -(\tilde{h}; \varphi(x)) - \underbrace{[\sqrt{x}\cdot\varphi(x)]_0^\infty}_{} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -(\tilde{h}; \varphi(x)) + \frac{1}{2}(\tilde{h}; \varphi(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\tilde{h}; \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot\tilde{h}' \overset{\mathcal{D}'}{=} -\frac{1}{2}\tilde{h}$$

10 bodů

$$\mathcal{F}[e^{-cx^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4c}} \quad \wedge \quad \mathcal{F}[f(x-d)] = e^{id\xi}\, \mathcal{F}[f(x)]$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left[e^{-c(x-d)^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4c}} \cdot e^{id\xi}$$

a) Cauchyova úloha:
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t)$$

$$u(x,0) := \beta(x)$$

$$a, b > 0 \ \wedge \ f(x,t) \in C(t>0, x\in\mathbb{R}) \ \& \ u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^{1+1})$$

b) převedení: $w(x,t) := \theta(t) \cdot u(x,t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \delta(t) \otimes \beta(x) + \theta(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \quad \& \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \theta(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\mathcal{L}\, w(x,t) = \theta(t) \cdot f(x,t) + \delta(t) \otimes \beta(x)$$

c) fundamentální řešení
$$\mathcal{L}\, \mathcal{E}(x,t) = \delta(x,t) = \delta(x) \otimes \delta(t) \quad / \ \mathcal{F}_x$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 (-i\xi)^2 E - b(-i\xi) E = \delta(t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + (a^2\xi^2 + bi\xi) E = \delta(t) \quad / \ \mathcal{L}_t$$

$$pE + (a^2\xi^2 + bi\xi) E = 1$$

$$E = \frac{1}{p + a^2\xi^2 + bi\xi} \quad \Rightarrow \quad E(\xi,t) = \theta(t) \cdot e^{-(a^2\xi^2 + bi\xi)t}$$

$$\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{F}^{-1}_x\left[\theta(t)\, e^{-(a^2\xi^2 + ib\xi)t}\right] = \theta(t)\, \mathcal{F}^{-1}_x\left[e^{-a^2\xi^2 t} \cdot e^{-ib\xi t}\right] =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \frac{1}{4c} = a^2 t \Rightarrow c = \frac{1}{4a^2 t} \\ d = -bt \end{array}\right| = \theta(t) \cdot \sqrt{\frac{1}{4a^2\pi t}}\, e^{-\frac{1}{4a^2 t}(x+bt)^2}$$

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2a} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x+bt)^2}{4a^2 t}}$$

$$(\tilde{g}; \varphi(x)) := \int_0^\infty 2x^2 \varphi'(x)\, dx$$

•) existence integrálu $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- víme, že $\varphi(x) \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi'(x) \in \mathcal{D} \Rightarrow |2x^2 \varphi'(x)| \leqq \underbrace{2x^2 \cdot K \cdot \Theta(R-x)}_{\in \mathcal{L}(0, +\infty)}$

$$\int_0^\infty 2x^2 \cdot K \cdot \Theta(R-x)\, dx = K \int_0^R 2x^2\, dx = \frac{K \cdot 2}{3} R^3 \in \mathbb{R}$$

•) linearita $\tilde{g}$ je zřejmá $\Leftarrow$ plyne z existence integrálu a z faktu, že $(\varphi + \alpha\psi)' = \varphi' + \alpha \cdot \psi'$

$$\Rightarrow \int_0^\infty 2x^2 (\varphi + \alpha\psi)'\, dx \equiv (\tilde{g}; \varphi + \alpha\psi)$$

$$\int_0^\infty 2x^2 (\varphi + \alpha\psi)'\, dx = \int_0^\infty 2x^2 \varphi'(x)\, dx + \alpha \int_0^\infty 2x^2 \psi'(x)\, dx =$$

$$= (\tilde{g}; \varphi) + \alpha (\tilde{g}, \psi)$$

•) spojitost funkcionálu $\tilde{g}$

- pokud $\varphi_k \rightrightarrows \varphi \Rightarrow \varphi_k' \rightrightarrows \varphi' \wedge \varphi_k' \in \mathcal{D} \wedge \varphi' \in \mathcal{D}$

$$\lim_{k\to\infty} (\tilde{g}; \varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty 2x^2 \varphi_k'(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{ze superstejnoměrné konvergence} \\ \text{posl. } (\varphi_k')_{k=1}^\infty \text{ lze k } 2x^2\varphi_k'(x) \text{ najít} \\ \text{integrab. majorantu nezávislou na } k \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{lze využít platnost} \\ \text{Lebesgueovy věty} \end{array} \right| = \int_0^\infty 2x^2 \varphi'(x)\, dx = (\tilde{g}; \varphi) \qquad \text{q.e.d.}$$

•) čemu se kdy $\tilde{g}$ rovná?

$$(\tilde{g}, \varphi(x)) = \int_0^\infty 2x^2 \varphi'(x)\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x^2 & v' = \varphi' \\ u' = 4x & v = \varphi \end{array} \right| = \left[2x^2 \varphi(x) \right]_0^\infty - \int_0^\infty 4x \varphi(x)\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{vlastnosti} \\ \text{funkcí z } \mathcal{D} \end{array} \right| = - \int_0^\infty 4x \varphi(x)\, dx = (-4x; \varphi(x))$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{g} = -4x \quad \& \quad \tilde{g} \in \mathcal{D}'_{reg}$$

$g(x) \in P(\mathbb{R})$ a $g(x)$ je hustota prsti $\Rightarrow$

1) $g(x)$ je exponenciálního růstu
2) $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}: \ g(x) = 0$
3) $g(x)$ je C_{pw} $\leftarrow$ po částech spojitá
4) $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$
5) $\forall x \in \mathbb{R}: \ g(x) \geqq 0$
6) $\forall n \in \mathbb{N}: \ \int_{\mathbb{R}} x^n g(x)\,dx = \sigma_n \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ necentrální momenty

Co lze vysoudit z bodu 1?

$\forall \alpha > ind(g): \quad |g(x)| \leqq K \cdot e^{\alpha x}$

z nezápornosti

$\forall \beta < ind(g) \ \exists x_0 \in \mathbb{R}: \quad \tilde{K} \cdot e^{\beta x} \leqq |g(x)| = g(x)$

Protože platí bod 4, je zřejmé, že $ind(g) < 0$!

Z bodu 4 navíc vidíme, že $G(0) = 1$, kde $G(s) := \mathcal{L}[g(x)]$

Jak ale vypočítat $G^{(n)}(0)$?

$$\underbrace{\frac{d^n G}{ds^n}}_{F(s)} = \mathcal{L}[\underbrace{(-x)^n g(x)}_{f(x)}] \quad \& \quad x^n g(x) \in P$$

víme z desatera: $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{s \to 0_+} F(s)$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty (-x)^n g(x)\,dx = \frac{d^n G}{ds^n}(0)$$

$$\Rightarrow \frac{d^n G}{ds^n}(0) = (-1)^n \cdot \sigma_n \quad \Rightarrow \text{ máme koeficienty Maclaurinovy řady}$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \cdot \sigma_n}{n!} s^n$$

Jedná se ale skutečně o analytickou funkci?

$$\mathcal{L}[g(x)] \equiv G(s) = \int_0^\infty g(x) e^{-sx}\,dx = \int_0^\infty g(x) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-sx)^n}{n!}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot s^n \int_0^\infty g(x) \cdot x^n \cdot \frac{1}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\sigma_n}{n!} s^n$$

tady je ale třeba promyslet, proč to lze!

obor konvergence lze pak určit již snad (viz poloměr konverg.)

10b

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 x^3 e^{-\lambda^2 x^2} \mathcal{P}\frac{1}{x} \otimes y^2 \frac{d^2\delta}{dy^2} \quad v \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

1) $$\left(y^2 \frac{d^2\delta}{dy^2}; \varphi(y)\right) = \left(\frac{d^2\delta}{dy^2}; y^2\cdot\varphi(y)\right) = -\left(\frac{d\delta}{dy}; 2y\varphi(y) + y^2\frac{d\varphi}{dy}\right) =$$

$$= \left(\delta(y);\ 2\varphi(y) + 4y\frac{d\varphi}{dy} + y^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) = 2\varphi(0) = \left(2\delta(y); \varphi(y)\right)$$

$$\Rightarrow \quad y^2\frac{d^2\delta}{dy^2} = 2\delta(y)$$

2) $$\left(\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 x^3 e^{-\lambda^2 x^2}\mathcal{P}\frac{1}{x}; \varphi(x)\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}; \lambda^3 x^3 e^{-\lambda^2 x^2}\cdot\varphi(x)\right) =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^3 x^3 e^{-\lambda^2 x^2}\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{vp}\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda^2x^2}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 x^2 e^{-\lambda^2 x^2}\varphi(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} z = \lambda x \\ dx = \frac{1}{\lambda}dz \end{array}\right| = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \lambda^3 \frac{z^2}{\lambda^2} e^{-z^2}\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\,dz =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2}\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right)dz = \left| \underbrace{\left|z^2 e^{-z^2}\varphi\left(\tfrac{z}{\lambda}\right)\right| \le K z^2 e^{-z^2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})} \right| =$$

$$= \lim \int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2}\varphi(0)\,dz = \varphi(0)\cdot\int_{\mathbb{R}} z^2 e^{-z^2}\,dz = \left|\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad / \frac{d}{da} \\ -\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ax^2}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-3/2} \end{array}\right| =$$

$$= \varphi(0)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(x); \varphi(x)\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3x^3 e^{-\lambda^2x^2}\mathcal{P}\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^3 x^3 e^{-\lambda^2x^2}\mathcal{P}\frac{1}{x} \otimes y^2\frac{d^2\delta}{dy^2} = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\delta(x)\otimes 2\delta(y) = \sqrt{\pi}\,\delta(x,y)}$$

Lemma:

Označme $\mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{r+s}) = \left\{ \omega_n(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y}) : \varphi_k(\vec{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}_r) \wedge \psi_k(\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^s) \right\}$

Pak platí, že $\mathcal{D}_{SEP}$ je hustá v $\mathcal{D}(\mathbb{E}^{r+s})$, což značí, že $\forall\, \omega(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^{r+s})$ lze nalézt posloupnost $(\omega_n(\vec{x},\vec{y}))_{n=1}^{\infty}$ testovacích funkcí z $\mathcal{D}_{SEP}(\mathbb{E}^{r+s})$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(\vec{x},\vec{y}) = \omega(\vec{x},\vec{y})$$

Důkaz komutativity:

•) nejprve pro separabilní testovací funkci, tj. funkci z $\mathcal{D}_{SEP}$:

$$\left(f\otimes g;\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(f\otimes g;\ \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(f(\vec{x});\ (g(\vec{y});\ \varphi_k\psi_k)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(f(\vec{x});\ \varphi_k(\vec{x})\cdot(g(\vec{y});\ \psi_k(\vec{y}))\right) \overset{\text{lin}}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(g(\vec{y});\psi_k(\vec{y})\right)\cdot\left(f(\vec{x});\ \varphi_k(\vec{x})\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(g(\vec{y});\ (f(\vec{x});\ \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y}))\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(g(\vec{y});\ (f(\vec{x});\ \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y}))\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(g\otimes f;\ \varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right) = \left(g\otimes f;\ \sum_{k=1}^{n}\varphi_k(\vec{x})\psi_k(\vec{y})\right)$$

•) zvolme $\omega(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{D}(\mathbb{E}^{r+s})$ libovolně. K ní existuje $(\omega_n(\vec{x},\vec{y}))_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}_{SEP}$ podle výše uvedeného lemmatu. Pak

$$\left(f\otimes g;\ \omega(\vec{x},\vec{y})\right) = \left(f\otimes g;\ \lim_{n\to\infty}\omega_n(\vec{x},\vec{y})\right) \overset{\text{spojitost funkcionálu}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(f\otimes g;\ \omega_n(\vec{x},\vec{y})\right) =$$

$$\underset{\text{první část důkazu}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(g\otimes f;\ \omega_n(\vec{x},\vec{y})\right) \underset{\text{spojitost funkcionálu}}{=} \left(g\otimes f;\ \omega(\vec{x},\vec{y})\right)$$

8b

$$\lim_{c\to\infty}\left(e^{x}\cdot \sin(cy)\left(\delta(x-\mu)\otimes \frac{\sin(cy)}{cy}\,\mathcal{P}\frac{1}{y}\right);\ \varphi(x,y)\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\delta(x-\mu)\otimes\frac{\sin(cy)}{cy}\,\mathcal{P}\frac{1}{y};\ e^{x}\sin(cy)\,\varphi(x,y)\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\delta(x-\mu);\ \left(\frac{\sin(cy)}{cy}\,\mathcal{P}\frac{1}{y};\ e^{x}\sin(cy)\,\varphi(x,y)\right)\right)$$ ⊖ proč

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\delta(x-\mu);\ \left(\mathcal{P}\frac{1}{y};\ \frac{\sin^2(cy)}{cy}\,e^{x}\,\varphi(x,y)\right)\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(\delta(x-\mu);\ \mathrm{Vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(cy)}{cy^2}\,e^{x}\,\varphi(x,y)\,dy\right) =$$

$$= \lim_{c\to\infty}\mathrm{Vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(cy)}{cy^2}\,e^{\mu}\,\varphi(\mu,y)\,dy = \left|\begin{array}{l} cy = u \\ dy = \frac{1}{c}\,du\end{array}\right| =$$

$$= e^{\mu}\cdot\lim_{c\to\infty}\mathrm{Vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\varphi\!\left(\mu,\frac{u}{c}\right)du = \left|\ \left|\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\varphi\!\left(\mu,\frac{u}{c}\right)\right| \le \underbrace{\frac{\sin^2(u)}{u^2}K}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R})}\ \right| =$$

$$= e^{\mu}\,\mathrm{Vp}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,\varphi(\mu,0)\,du = e^{\mu}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du\cdot\varphi(\mu,0) =$$

$$= e^{\mu}\cdot\pi\cdot\varphi(\mu,0) = \left(\pi\cdot e^{\mu}\,\delta_{(\mu,0)};\ \varphi(x,y)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{c\to\infty} e^{x}\sin(cy)\cdot\left(\delta(x-\mu)\otimes\frac{\sin(cy)}{cy}\,\mathcal{P}\frac{1}{y}\right) = \pi\cdot e^{\mu}\cdot\delta_{(\mu,0)}$$

$g(x)$ exponenciálního řádu: $\Rightarrow \exists \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} : x > x_0 \Rightarrow |g(x)| \leq K \cdot e^{\tilde{\alpha} x}$

$\Rightarrow$ pokud toto platí pro $\tilde{\alpha}$, pak to platí pro všechny $\alpha > \tilde{\alpha}$

$\Rightarrow$ infimum všech takových α označíme symbolem $\operatorname{ind}(g)$ ... index růstu

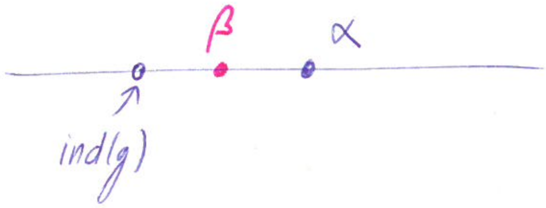
A platí tedy:

$$\alpha > \operatorname{ind}(g) \Rightarrow |g(x)| \leq K_\alpha e^{\alpha x}$$

$\beta < \operatorname{ind}(g) \Rightarrow$ nelze najít $x_0 \in \mathbb{R}$, že by platilo), tzn.

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) e^{-\beta x} = +\infty \; !$$

Ukažme, že dále $\forall \alpha > \operatorname{ind}(g)$ platí: $\lim_{x \to \infty} g(x) e^{-\alpha x} = 0$



jistě existuje $\beta \in (\operatorname{ind}(g); \alpha)$, tj. $\beta < \alpha$

$$|g(x) e^{-\alpha x}| \leq K_\beta \cdot e^{\beta x} \cdot e^{-\alpha x} = K_\beta e^{(\beta - \alpha) x} \quad \& \quad \beta - \alpha < 0$$

$$\underset{0}{\downarrow x \to \infty} \qquad \Leftarrow \qquad \underset{0}{\downarrow x \to \infty}$$

věta o sevření

Dílčí závěr:

$$\beta < \operatorname{ind}(g) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) e^{-\beta x} = +\infty$$

$$\alpha < \operatorname{ind}(g) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} g(x) e^{-\alpha x} = 0$$

To značí: od jistého x_0 : $|g(x)| \leq e^{\alpha x}$

od jistého $\tilde{x}_0$: $e^{\beta x} \leq |g(x)| \Leftarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{g(x) e^{-\beta x}} = 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} \right| e^{\beta x} < \tilde{\varepsilon}$$

Celkem od jistého $\tilde{\tilde{x}}_0$:

$$e^{\beta x} \leq |g(x)| \leq e^{\alpha x}$$

$$\beta x \leq \ln|g(x)| \leq \alpha x$$

$$\beta \leq \frac{\ln|g(x)|}{x} \leq \alpha$$

– tohle ale platí pro všechna $\beta < \operatorname{ind}(g)$ a všechna $\alpha > \operatorname{ind}(g)$

$\Rightarrow$ volbou $\tilde{\tilde{x}}_0$ mohu vždy zařídit, aby se $\frac{\ln|g(x)|}{x}$ lišilo od $\operatorname{ind}(g)$ méně než nějaké ultramalé $\Delta > 0$

$\Rightarrow$ limita $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln|g(x)|}{x}$ vždy existuje

$\Rightarrow$ navíc zjevně: $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln|g(x)|}{x} = \operatorname{ind}(g)$

Otázka stojí takto: $f_\sigma \in \mathcal{D}'_{reg} \wedge \lim\limits_{\sigma \to \pm\infty} f_\sigma \overset{\mathcal{D}'}{=} f \overset{?}{\Rightarrow} \lim\limits_{\sigma \to \pm\infty} f_\sigma' \overset{\mathcal{D}'}{=} f'$

Zkusme dokázat:

$$\left(\lim_{\sigma \to \pm\infty} f_\sigma' ; \varphi(x)\right) = \lim_{\sigma \to \pm\infty} \left(f_\sigma' ; \varphi(x)\right) = -\lim_{\sigma \to \pm\infty} \left(f_\sigma ; \varphi'(x)\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{protože} \\ f_\sigma \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \end{array} \right| = -\left(f ; \varphi'(x)\right) = \left(f' ; \varphi(x)\right) \qquad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \lim_{\sigma \to \pm\infty} f_\sigma' = f'$$

Odpověď na otázku ze zadání je tedy

$$-\frac{2\frac{x}{2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow[\sigma \to 0_+]{\mathcal{D}'} \delta'$$

NEBO:

$$\lim_{\sigma \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \varphi(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{x}{\sigma} \\ dy = \frac{1}{\sigma} dx \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\sigma \to 0_+} \int \frac{y \cdot \sigma}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi(\sigma y)\, \sigma\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\sigma y)}{\sigma} y\, e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \frac{1}{\sigma}\varphi(\sigma y) & v' = y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \\ u' = \varphi'(\sigma y) & v = -e^{-\frac{y^2}{2}} \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \to 0_+} \Big\{ \underbrace{\left[-\tfrac{1}{\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi(\sigma y)\right]_{\mathbb{R}}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi'(\sigma y)\, dy \Big\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\sigma \to 0_+} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \varphi'(\sigma y)\, dy = \left| \text{proč lze zaměnit?} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi'(0) \cdot \sqrt{2\pi} = \varphi'(0) = -\left(\delta' ; \varphi(x)\right)$$

q.e.d.