

Vzorové řešení zápočtového testu z předmětu 01UP2

27. dubna 2023

1. Pokud máme náhodnou veličinu χ a chceme určit její rozptyl, potřebujeme použít vztah pro rozptyl $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$, kde $\mathbb{E}(X^2)$ značí druhý moment náhodné veličiny a $\mathbb{E}^2(X)$ značí druhou mocninu střední hodnoty.

Z textu úlohy víme, že pro k -tý moment náhodné veličiny χ platí rovnost $\mathbb{E}(X^k) = \frac{k!}{5^k}$. Pokud chceme určit rozptyl χ , potřebujeme znát $\mathbb{E}(X^2)$. Dosazením $k = 2$ do zadání získáme $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2!}{5^2} = \frac{2}{25}$. A potřebujeme znát $\mathbb{E}(X)$, dosazením $k = 1$ do zadání získáme $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{5}$.

Nyní již můžeme spočítat rozptyl χ podle vztahu $\text{VAR}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$. Dosazením získaných hodnot $\text{VAR}(X) = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$. Tedy náhodná veličina χ má rozptyl $\frac{1}{25}$.

2. (a) **Jaké rozpětí má tato náhodná veličina?**

Nejprve určíme support (množinu bodů, ve kterých hustota pravděpodobnosti nabývá kladných hodnot). V tomto případě je support roven intervalu $[0, 4]$. Dále vypočítáme levý a pravý ambit, což jsou nejmenší a největší bod supportu, tedy:

$$\text{amb}_L(X) = \inf \text{supp}(X) = 0$$

$$\text{amb}_R(X) = \sup \text{supp}(X) = 4$$

Potom vypočítáme rozpětí nosiče, neboli margin:

$$\text{marg}(X) = \text{amb}_R(X) - \text{amb}_L(X) = 4 - 0 = 4$$

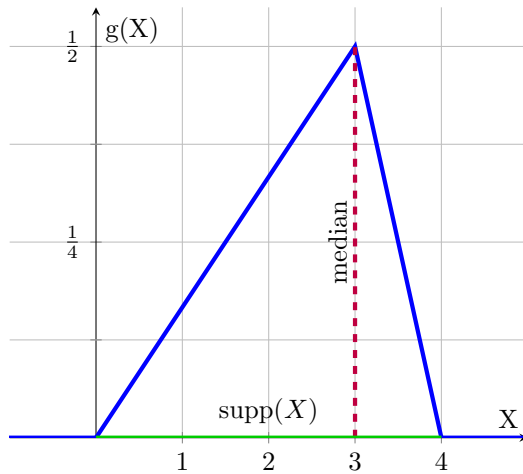
Tedy rozpětí náhodné veličiny je 4.

- (b) **Jaký je modus náhodné veličiny?**

Dále hledáme modus, což je hodnota, pro kterou funkce hustoty pravděpodobnosti nabývá maxima. Z grafu vidíme, že maximum se nachází v bodě $x = 3$, a funkce hustoty pravděpodobnosti v tomto bodě nabývá hodnoty $1/2$. Protože se jedná o náhodnou veličinu s omezeným supportem, modus existuje a je jednoznačně určen.

- (c) **Jaký nosič má náhodná veličina?**

Po určení supportu a modu můžeme ještě zmínit, že nosič náhodné veličiny je shodný se supportem, tedy $[0, 4]$.



3. Chceme zjistit střední hodnotu náhodné veličiny popsané distribuční funkcí:

$$H(x) = 1 - \frac{1}{3}(x+3)e^{-x/3} \quad (1)$$

Vzorec pro střední hodnotu spojité náhodné veličiny je:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx \quad (2)$$

kde $f(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny.

Funkci hustoty pravděpodobnosti můžeme zjistit z distribuční funkce derivací:

$$h(x) = H'(x) = -\frac{1}{3}e^{-x/3} - \frac{1}{3}(x+3)\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-x/3} = \frac{1}{9}xe^{-x/3} \quad (3)$$

Pak můžeme spočítat střední hodnotu podle vzorce:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \frac{1}{9}x^2e^{-x/3} dx \quad (4)$$

Pro řešení tohoto integrálu potřebujeme použít vztah:

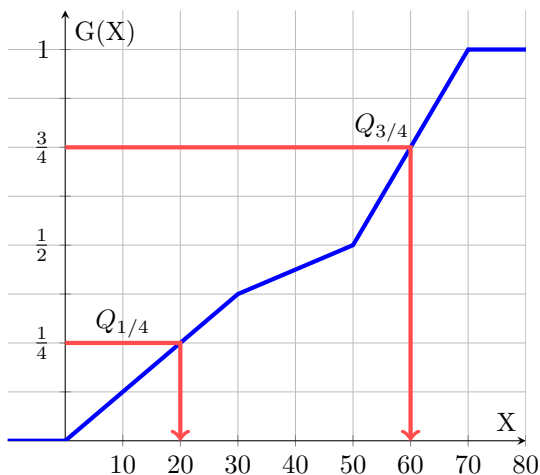
$$\left| \begin{array}{l} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \\ \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3} \end{array} \right|$$

A dostaneme

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{9} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x/3} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = 6 \quad (5)$$

Tedy střední hodnotu náhodné veličiny je 6.

4. Pro výpočet mezikvartilového rozptylu potřebujeme znát horní a dolní kvartil. Dolní kvartil (označovaný jako $Q_{1/4}$) odpovídá 1/4 hodnotám a horní kvartil (označovaný jako $Q_{3/4}$) odpovídá 3/4 hodnotám.



V našem případě jsou dolní a horní kvartil dány hodnotami 20 a 60, které jsme určili z grafu distribuční funkce. Potom můžeme mezikvartilový rozptyl vypočítat jako rozdíl hodnot horního a dolního kvartilu:

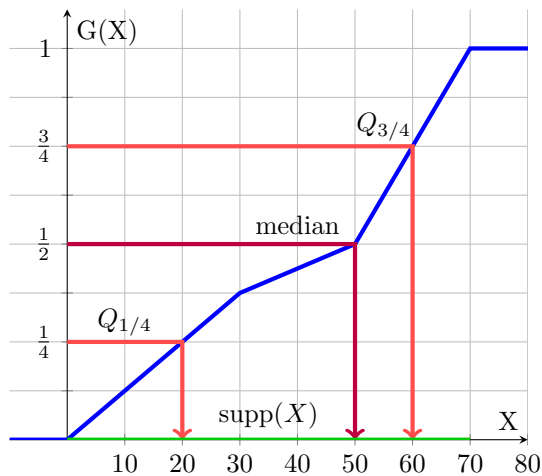
$$\text{IQV}(X) = Q_{3/4} - Q_{1/4} = 60 - 20 = 40 \quad (6)$$

Takže mezikvartilový rozptyl náhodné veličiny popsané distribuční funkcí z obrázku je 40.

5. Pro zjednodušený boxplot, bez odlehlých hodnot, potřebujeme určit median, horní a dolní kvartil a nosič.

Horní a dolní kvartil jsou v tomto případě již z předchozí úlohy známe ($Q_{3/4} = 60$ a $Q_{1/4} = 20$), takže nyní musíme najít median a nosič.

Najdeme median, což je hodnota v polovině rozsahu datové sady, a nosič, neboli support, což je množina hodnot, ve kterých má náhodná veličina nenulovou pravděpodobnost.



V našem případě je median daný hodnotou 50 a nosič jsou hodnoty od 0 do 70.

Pro kreslení boxplotu postupujeme následujícím postupem:

- Nakreslete obdélník, jehož spodní hrana odpovídá dolnímu kvartilu ($Q_{1/4}$) a horní hrana odpovídá hornímu kvartilu ($Q_{3/4}$). V tomto případě tedy obdélník začíná u hodnoty 20 a končí u hodnoty 60.
- V obdélníku vyznačte čáru, která označuje median, tedy hodnotu 50.
- Nakreslete čáry z obdélníku směrem vpravo a vlevo. Tyto čáry ukazují rozsah dat, která nepatří mezi horní ani dolní kvartil. V tomto případě tedy horní čára končí u hodnoty 70 a dolní čára začíná u hodnoty 0.

Boxplot, který bych musel dostat, vypadá takto:

