$$f_n(x) = n^2\left(1 - \cos^4\frac{x}{n} + \sin^4\frac{x}{n}\right)$$

k nule

4 body

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos(2\alpha)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \cdot \left(1 - \cos\left(2\frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(2\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} \overset{l'H}{=} \left\| y = \frac{1}{n} \right\| \overset{l'H}{=}$$

k nule

$$\overset{l'H}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ y\to 0_+}} \frac{1-\cos(2xy)}{y^2} \overset{l'H}{=} \lim_{y\to 0_+} \frac{2x\sin(2xy)}{2y} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{y\to 0_+} \frac{2\cdot 2x^2\cos(2xy)}{2} = 2x^2$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2x^2 \qquad \mathcal{D}om(f) = \mathcal{O} = \mathbb{R}$$

– zcela jasně nelze zaměnit pořadí operací ! 9 bodů

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n+2} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

$$\mathcal{O} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}om(s) = \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ bude třeba zkoumat $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x)$!

tj. bude třeba najít součet s(x)

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(n+1)!}x^{n+1} = -\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(m-1)^2}{m!}x^m = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-1)^2}{m!}y^m \;\&\; y=-x$$

$$s(y) = \| y=-x \| = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\overbrace{-1+1}}{(m-1)!}y^m + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{(m-1)!} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{m!} =$$

$$= -\sum_{m=2}^{\infty}\frac{y^m}{(m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{y^m}{(m-1)!} - (e^y - 1) =$$

$$= -\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y^{i+2}}{i!} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{y^{i+1}}{i!} - e^{y} + 1 =$$

$$= -y^2e^y + ye^y - e^y + 1$$

něco z mezivýpočtu

$$s(x) = e^{-x}(-x^2 - x - 1) + 1 \qquad \mathcal{D}om(s) = \mathbb{R}$$

$$= -e^{-x}(x^2 + x + 1) + 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} s(x) = 1$$

---

7 bodů

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(4n+3)!!!!} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{(4n-1)!!!!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow R = 4$$

aspoň jedno z toho

Raabeovo kritérium:

Krajní řady: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(4n-1)!!!!} \cdot \frac{(\pm 4)^n}{2n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{4n+3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{4^{n+1}}{4^n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\cancel{4n+4}}{4n+3} \cdot \frac{2n-1}{2n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \, \frac{8n^2+10n+3-8n^2-4n+4}{8n^2+10n+3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4 \notin O \wedge -4 \in O$$

$$\Rightarrow O = \langle -4, 4)$$

Cauchyova úloha v zadání má 3 podmínky $\Rightarrow$ operátor $\hat{L}$ je třetího řádu $\Rightarrow$ $\dim(\Omega_0) = 3$

6 bodů

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\Omega_0) = 3 \\ [x^2, e^x] \subset\subset \Omega_0 \\ [e^x, xe^{-2x}] \subset\subset \Omega_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{[x^2, e^x, xe^{-2x}]_\lambda = \Omega_0}$$

Všechna řešení rovnice $\hat{L}(y(x)) = g(x)$ jsou tedy tvaru:

$$\underline{y(x) = \alpha x^2 + \beta e^x + \gamma x e^{-2x} + 3x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = -5 \\ y'(0) = -3 \\ y''(0) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (3, -5, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = -5 \\ \beta + \gamma + 3 = -3 \\ 2\alpha + \beta - 4\gamma = 5 \end{array}\right\}$$

Závěr:

$$\underline{y(x) = 3x^2 - 5e^x - xe^{-2x} + 3x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 9^n}}_{f_n(x)}$$

9 bodů

& označme: $g_n(x) = (x^2-1)^{2n}$; $\mathcal{D}om(g) = I = (-1;2)$

- vyšetříme extrémy funkce $g_n(x)$

$$g_n'(x) = 2n\,(x^2-1)^{2n-1}\cdot 2x \overset{!}{=} 0 \quad ✓$$

$x=-1$ (není v I), $g_n(-1)=0$

$x=1$, $g_n(1)=0$

$x=0$, $g_n(0)=1$

✓ určení stacionárních bodů

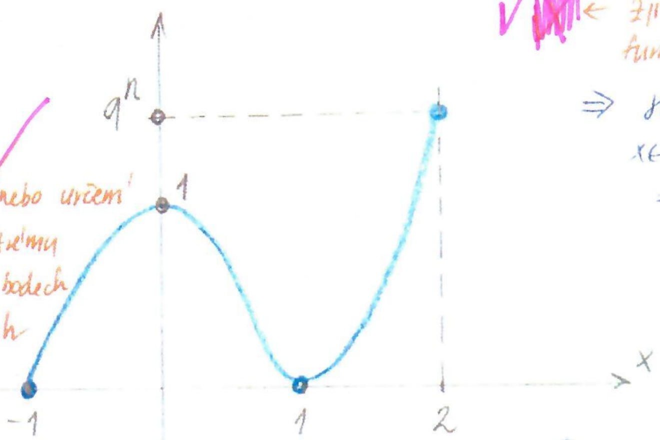
✓ $\left\{ g_n(x)\in C(\mathbb{R}) \;\wedge\; \lim\limits_{x\to -1_+} g_n(x) = g_n(-1) = 0 \;\wedge\; \lim\limits_{x\to 2_-} g_n(x) = g_n(2) = 9^n \right\}$

✓ ← zjištěm, že funkce nabývá svých nejvyšších funkčních hodnot na levém okolí dvojky

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in I} g_n(x) = 9^n$ ✓

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{9^n}9^n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

✓ obrázek nebo určení typu extrému ve stac. bodech a na krajích



$$\Rightarrow \forall x\in(-1,2) \quad \left|(-1)^n \frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n}\;9^n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ✓$$

- jenomže majorantní číselná řada $\sum 1/\sqrt{n}$ bohužel nekonverguje a lepší majoranta nalezena být nemůže ✓

$\Rightarrow$ na daný příklad W-kritérium nefunguje ✓

! je-li supremum určeno chybně, nelze již získat žádný další bod !

5 bodů

$$g(x) = x(1-2x)^{-1} = x \cdot \frac{1}{1-2x} = x \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

geometrická řada s kvocientem

$q = 2x$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^{n+1}$$

$$R^{-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Rightarrow R = 1/2$$

$$O = (-1, 1)$$

- nekonverguje stejnoměrně, neboť

$$2^n x^{n+1} \to 0 \,, \text{ ale}$$

$$2^n x^{n+1} \not\rightrightarrows 0$$

$$\sigma_n = \sup |2^n x^{n+1}| = 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim \sigma_n = \frac{1}{2} \neq 0$$

10 bodů

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n!} x^n \qquad I = \langle 0; +\infty)$$

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

$$\Rightarrow O = \mathbb{R}$$

ale $\mathrm{Dom}(s) = \langle 0; +\infty)$ ... kvůli podmínce v zadání

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2n+1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}(-x)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}(-x)^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-1)!} + e^{-x} =$$

$-1+1$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!}(-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-1)!} + 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^{m+1}}{m!} + e^{-x} =$$

něco zde

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^{m+1}}{m!} - 2xe^{-x} + e^{-x} =$$

$$= x^2 e^{-x} - xe^{-x} - 2xe^{-x} + e^{-x} = \underline{e^{-x}(x^2 - 3x + 1)}$$

! Není-li součet správně, dál se neopravuje!

Hledáme extrém $s(x)$ na $I = \langle 0; +\infty)$

– vidíme: $s(x) \in C(I)$ & $s(0) = 1$ & $\lim_{x\to+\infty} s(x) = 0$

$$s'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + 1) + e^{-x}(2x - 3) \overset{!}{=} 0$$

$$-x^2 + 3x - 1 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$\Rightarrow$ dva stacionární body

Víme: $s(0) = 1$ & $s(1) = -e^{-1} < 0$ & $s(4) = 5e^{-4} > 0$ & $\lim_{x\to\infty} s(x) = 0$

$\Downarrow$

Bodem globálního minima je bod $x_0 = 1$

$$\underline{s(1) = -\frac{1}{e}}$$

7 bodů

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{(4n+5)!!!!\,(3n+2)} \cdot \frac{(4n+1)!!!!\,(3n-1)}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{4n+5} \cdot \frac{3n-1}{3n+2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad R = 4$$

Krajní řady: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mp 4)^n (n+1)!}{(4n+1)!!!!\,(3n-1)}$

nebo toto

Raabeovo kritérium

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4^{n+1}(n+2)!}{(4n+5)!!!!\,(3n+2)} \cdot \frac{(4n+1)!!!!\,(3n-1)}{4^n (n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{4n+8}{4n+5} \cdot \frac{3n-1}{3n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{12n^2+20n-8}{12n^2+23n+10}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+18n}{12n^2+23n+10} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \in (0,1)$$

!

$$\Rightarrow \quad 4 \in O \;\wedge\; -4 \notin O$$

$$\Rightarrow \quad O = (-4, 4\rangle$$

Cauchyova úloha v zadání má 3 podmínky $\Rightarrow$ diferenciální operátor $\hat{L}$ 6 bodů
je třetího řádu $\Rightarrow$ $\dim(\Omega_0) = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\Omega_0) = 3 \\ [x^2, e^{-x}, x^2 + e^{-x}]_\lambda \subset\subset \Omega_0 \\ [4x^2, xe^{2x}] \subset\subset \Omega_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\Omega_0 = [x^2, e^{-x}, xe^{2x}]_\lambda}}$$

Všechna řešení rovnice $\hat{L}(y(x)) = q(x)$ jsou tedy tvaru:

$$\underline{\underline{y(x) = \alpha x^2 + \beta e^{-x} + \gamma x e^{2x} + 3\cos(2x)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) \overset{!}{=} 8 \\ y'(0) \overset{!}{=} -2 \\ y''(0) \overset{!}{=} -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 + \beta \overset{!}{=} 8 \\ -\beta + \gamma \overset{!}{=} -2 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma - 12 \overset{!}{=} -3 \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (-4, 5, 3)$$

Závěr:

$$\underline{\underline{y(x) = -4x^2 + 5e^{-x} + 3xe^{2x} + 3\cos(2x)}}$$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}\sqrt{x^2+n} \qquad f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n}\frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$$

$\equiv$ značí stejnoměrnou konvergenci řad

9 bodů

3 předpoklady příslušné věty:

1) $f_n(x)$ diferencovatelná na $I=(-1,1)$ ... snadné

2) $\sum f_n(x)$ konverguje alespoň v jednom bodě
$x_0 = 0 \Rightarrow \sum f_n(x_0) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
... a ta konverguje

3) $\sum f_n'(x) \overset{I}{\equiv}$ ... to je klíčová vlastnost (*) viz dole

Vlastnost č. 3

– označme: $g_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+n}}$

$$g_n'(x) = \frac{\sqrt{x^2+n} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+n}}}{x^2+n} = \frac{x^2+n-x^2}{(x^2+n)^{3/2}} = \frac{n}{(x^2+n)^{3/2}} > 0$$

$\Rightarrow$ $g_n(x)$ na $(-1,1)$ stále roste $\Rightarrow$ maximum nastává v bodě $x=1$

... přesněji:
$$\sup_{x\in(-1,1)} |g_n(x)| = \lim_{x\to 1_-} \frac{x}{\sqrt{x^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$$

Na $I=(-1,1)$ tedy platí:

$$\left| \frac{(-1)^n}{n}\frac{x}{\sqrt{x^2+n}} \right| \leq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

nesmějí tam být sumy!

Řada (číselná) $\sum_n 1/n^{3/2}$ konverguje z integrálního kritéria

$\Rightarrow$ z Weierstrassova kritéria tedy $\sum f_n'(x) = \sum \frac{(-1)^n}{n}\frac{x}{\sqrt{x^2+n}} \overset{(-1,1)}{\equiv}$

Proto rovnost ze zadání platí!

nebo (*)

4 body

$h(x) = \ln(1+3x)$

$$h'(x) = \frac{3}{1+3x} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{n+1} \cdot x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(integrační konstanta je nulová, neboť $\ln(1+3\cdot 0) = \ln 1 = 0$)

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{3^{n+1}}\right| = 3$$

$$O = \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$