Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 2 z předmětu 01CAS – verze B

úterý 10. ledna 2023, 9:30–11:30

1 (8 bodů)
Semipoissonovský systém vznikne z Poissonova systému odebráním lichých částic. Jaký generátor má tento systém? Neopomeňte generátor přeškálovat na správnou střední hodnotu. Vše řádně odvoďte!

2 (13 bodů)
Nechť N_L je intervalová frekvence balančního částicového systému a $g_k(x)$ hustota pravděpodobnosti pro $k-$tou multirozteč. Odvoďte vztah mezi $\mathbb{E}(N_L^2)$ a $g_k(x)$. V rámci řešení ukažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k g_k(x)$ konverguje stejnoměrně na každém intervalu $\langle 0, a \rangle$. K čemu se vám tento poznatek bude hodit?

3 (13 bodů)
Pro částicový systém s generátorem $h(x) = 4x\Theta(x)\mathrm{e}^{-2x}$ vypočítejte celý průběh statistické rigidity. Užijte vztahu

$$s^3\mathfrak{L}[\Delta(L)] = 2 + sH(s)\cdot\frac{s-2}{1-H(s)} + 2s^2\frac{H^2(s)+H'(s)}{(1-H(s))^2}$$

Nalezený průběh výstižně načrtněte.

4 (12 bodů)
Dokažte, že ve škálovaném částicovém systému s generátorem $h(x)$ má trendová funkce $\omega(L) = \mathbb{E}(N_L)$ lineární asymptotu, jejíž rovnicí je

$$y(L) = L - 1 + \frac{\mu_2(h)}{2}.$$

5 (8 bodů)
Laplaceovou transformací vypočítejte integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\mathrm{d}x.$$

6 (6 bodů)
Odvoďte tzv. konvoluční teorém pro Laplaceovu transformaci (viz tabulka Laplaceova desatera).

Poissonův systém: $h(x) = \Theta(x)e^{-x}$

$$H(s) = \mathcal{L}[h(x)] = \frac{1}{s+1}$$

Odebrání lichých částic: $g(x) = (h * h)(x) = ?$

$$G(s) = H^2(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = \Theta(x)\cdot x\cdot e^{-x}$$

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} \Theta(x)\cdot x^2\cdot e^{-x}\,dx = 2 \;\ldots \Rightarrow \text{nutno přeškálovat}$$

$$f(x) = \lambda\cdot g(\lambda x) \quad \& \quad \lambda = ?$$

$$\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,dx \overset{!}{=} 1, \text{ tj.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda\cdot x\cdot g(\lambda x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda x(\lambda\cdot x)\cdot e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2\int_{\mathbb{R}} \overset{\Theta(x)}{\downarrow} x^2 e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \left| y = \lambda x \right| = \lambda^2\int_{\mathbb{R}} \Theta(y)\cdot\frac{y^2}{\lambda^2}e^{-y}\,dy\,\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \overset{!}{=} 1 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$f(x) = 2\cdot g(2x) = 2\cdot\Theta(2x)\cdot 2\cdot x\cdot e^{-2x} =$$

$$= 4\,\Theta(x)\cdot x\cdot e^{-2x}$$

$$\text{c)}$$

$$g_1(x) = \theta(x)\int_0^x h(y)\,h(x-y)\,dy \leqq K^2\cdot\theta(x)\cdot x \quad \Leftarrow \quad h(x)\in\mathcal{B} \text{ a } h(x) \text{ je omezená}$$

$$g_2(x) = \theta(x)\int_0^x g_1(y)\,h(x-y)\,dy \leqq \theta(x)\,K^3\int_0^x y\,dy = \theta(x)\frac{K^3}{2}x^2$$

$$g_3(x) = \theta(x)\int_0^x g_2(x)\,h(x-y)\,dy \leqq \theta(x)\frac{K^4}{2}\int_0^x y^2\,dy = \theta(x)\frac{K^4}{3!}x^3$$

$$g_m(x) \leqq K^{m+1}\frac{L^m}{m!}$$

$$m\cdot g_m(x) \leqq K^{m+1}\frac{L^m}{(m-1)!} \quad \Big/ \sum_m$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot g_m(x) \leqq \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} K^{m+1}\frac{L^m}{(m-1)!} = \left|\, m=n+1 \,\right\| = K^2\cdot L\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(KL)^n}{n!} = K^2 L\, e^{KL}}_{\text{číselná majoranta tedy konvergují}}$$

$\Rightarrow$ podle Weierstrasse: $\sum m\,g_m(x) \overset{\langle 0,a\rangle}{\rightrightarrows}$

$$\text{d)}$$

$$E(\eta_L^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P[\eta_L = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\int_0^L (g_{k-1}(x) - g_k(x))\,dx\right) = \left\| \begin{matrix}\text{řada SK}\\ \text{na } \langle 0,L\rangle\end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} k^2(g_{k-1}(x) - g_k(x))\,dx = \left\| \begin{matrix}\text{obě řady}\\ \text{konvergují}\end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} k^2 g_{k-1}(x)\,dx - \int_0^L \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)^2 g_{k-1}(x)\,dx =$$

$$= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 - k^2 + 2k - 1)\,g_{k-1}(x)\,dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\,g_{k-1}(x)\,dx =$$

$$= \int_0^L \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,g_m(x)\,dx = 2\int_0^L \sum_{m=0}^{\infty} m\cdot g_m(x)\,dx + \int_0^L \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)}_{r(x)}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix}\text{z nápovědy}\\ \text{dále plyne}\end{matrix} \right\| = 2\int_0^L (r * r)(x)\,dx + \int_0^L r(x)\,dx$$

In[22]:= `h = 4 x Exp[-2 x]`

Out[22]= $4\,e^{-2x}\,x$

In[23]:= `H = LaplaceTransform[h, x, s]`

Out[23]= $\frac{4}{(2+s)^2}$

In[24]:= `B = 2 + s H (s - 2) / (1 - H) + 2 s^2 (H^2 + D[H, {s, 1}]) / (1 - H) ^2 // FullSimplify`

Out[24]= $\frac{2\,s\,(4+3\,s)}{(4+s)^2}$

In[25]:= `QQ = Apart[B / s^3]`

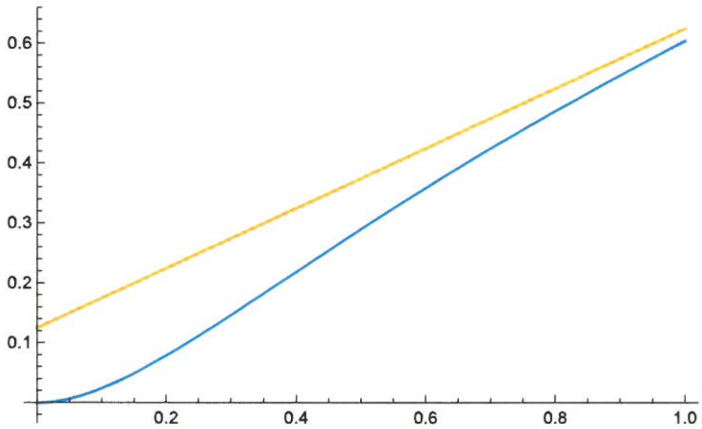
Out[25]= $\frac{1}{2\,s^2}+\frac{1}{8\,s}-\frac{1}{(4+s)^2}-\frac{1}{8\,(4+s)}$

In[26]:= `g = InverseLaplaceTransform[QQ, s, x]`

Out[26]= $\frac{1}{8}-\frac{e^{-4x}}{8}+\frac{x}{2}-e^{-4x}\,x$

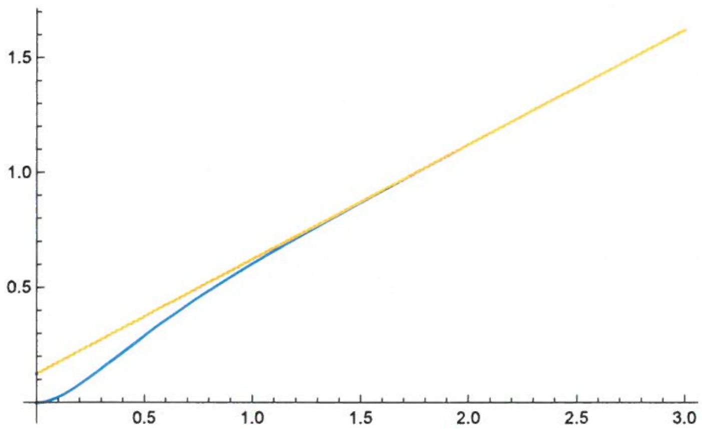
In[27]:= `Plot[{g, x / 2 + 1 / 8}, {x, 0, 1}]`

Out[27]=



In[28]:= `Plot[{g, x / 2 + 1 / 8}, {x, 0, 3}]`

Out[28]=



12b

$$\omega(L) = E\, n_L = \int_0^L r(x)\, dx \qquad r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

$$\mathcal{L}[\omega(L)] \triangleq \Omega(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^L r(x)\, dx\right] = \frac{\mathcal{L}[r(x)]}{s} = \frac{R(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot \Omega(s) = R(s) = \frac{H(s)}{1-H(s)}$$

– v lineární aproximaci: $s \cdot \mathcal{L}[\alpha x + \varkappa] = s\left(\frac{\alpha}{s^2} + \frac{\varkappa}{s}\right) \doteq \frac{H(s)}{1-H(s)}$

$$\alpha + \varkappa \cdot s \doteq \frac{s\, H(s)}{1-H(s)}$$

– k určení α, $\varkappa$ užijeme teorii Maclaurinových rozvojů

$$\alpha = \lim_{s \to 0_+} \frac{s \cdot H(s)}{1-H(s)} \overset{l'H}{=} \lim_{s \to 0_+} \frac{H(s) + s \cdot H'(s)}{-H'(s)} = \frac{1-0.1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\varkappa = \lim_{s \to 0_+} \left(\frac{s \cdot H(s)}{1-H(s)}\right)' = \lim_{s \to 0_+} \frac{[H + sH'] \cdot (1-H) + s \cdot H \cdot H'}{(1-H)^2} =$$

$$= \lim_{s \to 0_+} \frac{H - H^2 + sH' - \cancel{sHH'} + \cancel{sHH'}}{(1-H)^2} = \lim_{s \to 0_+} \frac{H - H^2 + sH'}{(1-H)^2} \overset{l'H}{=}$$

$$= -\lim_{s \to 0_+} \frac{H' - 2HH' + H' + sH''}{2(1-H) \cdot H'} = -\lim_{s \to 0_+} \frac{1-H}{1-H} +$$

$$+ \lim_{s \to 0_+} \frac{sH''}{2(1-H) \cdot H'} \overset{l'H}{=} -1 - \frac{1}{2} \lim_{s \to 0_+} \frac{H'' + sH'''}{H'' - (H')^2 - HH''} =$$

$$= -1 - \frac{1}{2} \frac{\mu_2 + 0 \cdot \mu_3}{\mu_2 - \mu_1^2 \mp \mu_0 \mu_2} = -1 + \frac{1}{2}\mu_2$$

$$\omega(L) \doteq L - 1 + \frac{\mu_2}{2}$$

3. 8b

~~(+1 navíc)~~

Užijme: $\int_R g(x)\cdot H(x)\,dx = \int_R G(x)\cdot h(x)\,dx$

∘) $H(s) = \frac{1}{s^3}$ & $h(x) = \mathcal{L}^{-1}[1/s^3] = ?$

$\mathcal{L}[\theta(x)] = \frac{1}{s} \quad \Big| \frac{d^2}{ds^2}$

$\mathcal{L}[\theta(x)\cdot x^2] = \frac{2}{s^3} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{1}{2}\theta(x)\cdot x^2$

∘) $g(x) = \sin(x) + x\cdot\cos x$

$\mathcal{L}[\sin(x)] = \frac{1}{s^2+1}$

$\mathcal{L}[\cos(x)] = \frac{s}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[x\cdot\cos(x)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}(-1)$

$= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

$\mathcal{L}[\sin(x) - x\cdot\cos(x)] = \frac{2}{(s^2+1)^2}$

Výpočet:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^{+\infty} = \pi/4$$

Důkaz:

– víme, že za daných předpokladů $(f*g)(x) \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{L}[(f*g)(x)] = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy \right) e^{-sx} dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(y) g(x-y) e^{-sx} d(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-sx} dx \right] dy \quad \begin{matrix} x-y=z \\ dx = dz \end{matrix} \quad = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-sy} e^{-sz} dz \right] dy =$$

$$= \left| \text{věta o separabilitě} \right| = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-sy} dy \cdot \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-sz} dz = F(s) \cdot G(s)$$

Věta – o záměně obrazu a vzoru

Nechť $f(x), g(x) \in \mathcal{B}$. Označme $F(s) = \mathcal{L}[f(x)]$ a $G(s) = \mathcal{L}[g(x)]$. Pak platí:

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cdot G(x)\, dx = \int_0^{+\infty} F(x) g(x)\, dx.$$

Důkaz:

– $G(s), F(s)$ jsou omezené na $\langle 0, +\infty)$

$$\Rightarrow |f(x) G(x)| \leq K \cdot f(x) \in \mathcal{L}(0; +\infty)$$

$$\Rightarrow f(x) G(x);\ g(x) F(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-xy} dy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \theta(x) g(y) e^{-xy} d(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}} f(x) \theta(x) e^{-xy} dx \right] dy = \int_0^{\infty} g(y) F(y)\, dy$$

Věta – o translaci ve vzoru

$$f(x) \in \mathcal{B},\ a > 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f(x-a)] = e^{-as} F(s)$$