1 (bodů) 10 bodů

Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \frac{10}{x}e^{2x}.$$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$ ... dvojka je trojnásobný kořen $\Leftarrow (\lambda-2)^3 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8$ ✓

$\Rightarrow$ fundamentální systém: $\{e^{2x};\ xe^{2x};\ x^2e^{2x}\}$ ✓

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \\ 2e^{2x} & (1+2x)e^{2x} & (2x+2x^2)e^{2x} \\ 4e^{2x} & (4+4x)e^{2x} & (2+8x+4x^2)e^{2x} \end{vmatrix} = e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & 1+2x & 2x+2x^2 \\ 4 & 4+4x & 2+8x+4x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{6x}(2+\cancel{8x}+\cancel{4x^2}+\cancel{4x}+\cancel{16x^2}+\cancel{8x^3}+\cancel{8x^2}+8x^3+8x^2+8x^3-\cancel{4x^2}-8x^3-\cancel{8x}-8x^2-8x^2-8x^3-$$

$$-\cancel{4x}-\cancel{16x^2}-\cancel{8x^3}) = 2e^{6x}$$ ✓

$$\Delta_1 = \frac{10}{x}e^{2x}\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1+2x & 2x+2x^2 \end{vmatrix}e^{4x} = 10e^{6x}x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+2x & 2+2x \end{vmatrix} = 10xe^{6x}$$

$$\Delta_2 = -\frac{10}{x}e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 2 & 2x+2x^2 \end{vmatrix}e^{4x} = -10e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & \cancel{x} \\ 2 & 2+2x \end{vmatrix} = -20e^{6x}$$ ✓✓

$$\Delta_3 = \frac{10}{x}e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 1+2x \end{vmatrix}e^{4x} = \frac{10}{x}e^{6x}$$

$f_1(x) = 10x\cdot\frac{1}{2}$ & $f_2(x) = -20\cdot\frac{1}{2}$ & $f_3(x) = \frac{10}{x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{x}$ ✓

$F_1(x) = \frac{1}{2}5x^2 + \alpha$ & $F_2(x) = -10x + \beta$ & $F_3(x) = 5\ln x + \gamma$ ✓

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta xe^{2x} + \gamma x^2e^{2x} + \frac{5}{2}x^2e^{2x} - 10x^2e^{2x} + 5x^2e^{2x}\ln x$$ ✓

$$y(x) = \alpha e^{2x} + \beta xe^{2x} + \gamma x^2e^{2x} + 5x^2e^{2x}\ln x$$ ✗

$\mathrm{Dom}(y) = (0, +\infty)$ ✓

10b.

$$y' = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1}{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1}$$ je homogenní rovnicí!

— lineární řešení nás nezajímá ($\in$ formálním řešením není přímka)

$\Rightarrow \quad z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \wedge y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{z^2 - 2z - 1}{z^2 + 2z - 1}$$

$$z'x = \frac{z^2 - 2z - 1 - z^3 - 2z^2 - z}{z^2 + 2z - 1}$$

$$\frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 + z^2 + z + 1} z' = -\frac{1}{x}$$

$$z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2+1)(z+1)$$

$$\frac{z^2 + 2z + 1}{z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{A}{z+1} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}$$

$$Az^2 + A + Bz^2 + Cz + Bz + C = z^2 + 2z - 1$$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ B + C &= 2 \\ A + C &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A, B, C) = (-1, 2, 0)$$

$$\int \frac{-1}{z+1}\,dz + \int \frac{2z}{z^2+1}\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

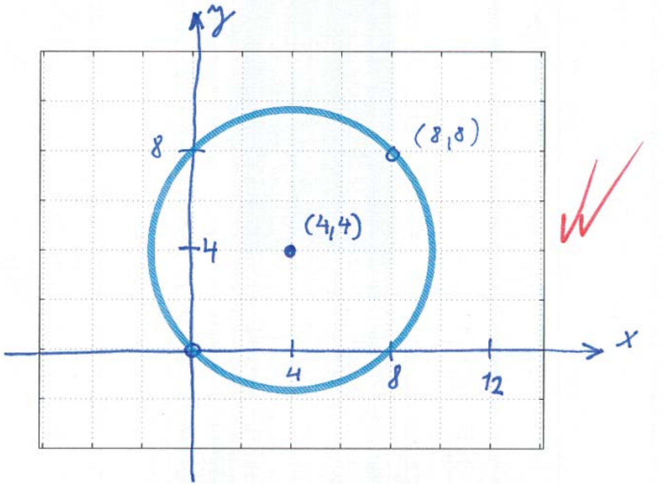
$$\ln \frac{z^2+1}{|z+1|} = \ln \frac{c}{|x|}$$

$$z^2 + 1 = \frac{c}{x}(z+1) \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)$$

$$x^2 + y^2 = c(x+y)$$

$$\underbrace{\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2}}_{\text{kružnice se středem v bodě } \left(\frac{c}{2}; \frac{c}{2}\right) \text{ mající poloměr } \frac{c}{\sqrt{2}}}$$

$\Rightarrow \quad \frac{c}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad c = 8 \quad \Rightarrow$ střed kružnice: $S = (4, 4)$



```
In[17]:= DSolve[x^5*t'''[x] - 6*x^3*t'[x] + 12*x^2*t[x] == 40, t[x], x]
```

Out[17]= $\left\{\left\{t[x] \to \frac{C[1]}{x^2} + x^2\,C[2] + x^3\,C[3] + \frac{9 + 20\,\mathrm{Log}[x]}{10\,x^2}\right\}\right\}$

$$x^3 y''' - 6xy' + 12y = \frac{40}{x^2}$$

- $x = e^t$ $(x>0)$ $\quad y' = \dot y \frac{1}{x} \quad y'' = -\dot y \frac{1}{x^2} + \ddot y \frac{1}{x^2}$

$$y''' = -\ddot y \frac{1}{x^3} + \dot y \frac{2}{x^3} + \dddot y \frac{1}{x^3} - 2\ddot y \frac{1}{x^3} = \dddot y \frac{1}{x^3} - 3\ddot y \frac{1}{x^3} + 2\dot y \frac{1}{x^3}$$

dosazení:

$$\dddot y - 3\ddot y + 2\dot y - 6\dot y + 12y = 40e^{-2t}$$

$$\dddot y - 3\ddot y - 4\dot y + 12y = 40e^{-2t}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12 = \lambda^2(\lambda-3) - 4(\lambda-3) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2-4) = 0 \qquad \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = -2$$

$$F_j = \{e^{3t};\ e^{2t};\ e^{-2t}\}$$

$$y_p(t) = a \cdot t \cdot e^{-2t}; \quad \dot y_p = a(1-2t)e^{-2t}$$

$$\ddot y_p = a(-2-2+4t)e^{-2t} = a(-4+4t)e^{-2t} = 4a(t-1)e^{-2t}$$

$$\dddot y_p = 4a(1-2t+2)e^{-2t} = 4a(3-2t)e^{-2t}$$

$$\rightarrow \quad a(12 - 8t - 12t + 12 - 4 + 8t + 12t) = 40$$

$$20a = 40 \Rightarrow a = 2$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}\ln x \quad (x>0)$$

- $x = -e^t$ $(x<0)$

$$\dddot y - 3\ddot y - 4\dot y + 12y = 40e^{-2t}$$

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t} + 2te^{-2t}$$

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{c_3}{x^2} + 2\frac{1}{x^2}\ln(-x) \quad (x<0)$$

2 +2

−8	8	−8
−36	−36	−36
·16	16	−16
12	12	

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad s''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \left\| \begin{matrix} m = k-1 \\ k = m+1 \end{matrix} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = s(x)$$

$$s'' - s = 0 \quad \& \quad s(0) = 0 \quad \& \quad s'(0) = 1$$

5 bodů

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \overset{!}{=} 0$$

$$FS = \{e^x, e^{-x}\}$$

$$s(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x} \qquad (\alpha, \beta) = ?$$

$$\left. \begin{matrix} s(0) = \alpha + \beta = 0 \\ s'(0) = \alpha - \beta = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

$$s(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = \sinh(x)$$

$$\mathrm{Im}(s) = \mathbb{R}$$

5B (7b.)

$$x^2y' + 5y^2 - 2xy = 0 \qquad y(5) = \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{2xy - 5y^2}{x^2} \qquad \text{homogenní}$$

$$y = ux$$
$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{2u - 5u^2}{1}$$

$$u'x = u - 5u^2$$

$$\frac{u'}{u(1-5u)} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{du}{u(1-5u)} = \ln|x| + C$$

parc. zlomky

$$\frac{A}{u} + \frac{B}{1-5u} = \frac{A - 5Au + Bu}{u(1-5u)}$$

$$\Rightarrow A = 1 \quad B = 5$$

$$\int \frac{du}{u} + 5\int \frac{du}{1-5u} = \ln|u| - \ln|1-5u| = \ln|x| + C$$

$$\frac{u}{1-5u} = Cx$$

$$\frac{y}{x-5y} = Cx$$

$$y = Cx^2 - 5Cxy$$

$$y = \frac{Cx^2}{1+5Cx}$$

poč. podm.

$$\frac{1}{2} = \frac{C \cdot 25}{1 + C \cdot 25} \Rightarrow C = \frac{1}{25} \qquad y(x) = \frac{x^2}{25 + 5x}$$

$$I = (-5, +\infty)$$

5B (7 b.)

$$x^2 y' + 5y^2 - 2xy = 0 \qquad y(5) = \frac{1}{2}$$

$$y' - \frac{2}{x} y = -\frac{5}{x^2} y^2 \;/\cdot(-y^{-2})$$

Bernoulli $\alpha = 2$ $(1-\alpha) y^{-\alpha} = -y^{-2}$

$$-y^{-2} y' + \frac{2}{x} y^{-1} = \frac{5}{x^2}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= y^{-1} \\ z' &= -y^{-2} y' \end{aligned}\right\}$$

$$z' + \frac{2}{x} z = \frac{5}{x^2} \;/\cdot x^2$$

Integrační faktor

$$p(x) = \frac{2}{x} \qquad P(x) = \ln x^2$$

$$e^{P(x)} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$x^2 z' + 2xz = 5$$

$$(x^2 z)' = (5x + C)'$$

$$x^2 z = 5x + C$$

$$z = \frac{5}{x} + \frac{C}{x^2}$$

$$y = z^{-1} = \left(\frac{5x + C}{x^2}\right)^{-1} = \frac{x^2}{5x + C}$$

poč. podm.

$$\frac{1}{2} = \frac{25}{25 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 25$$

$$y(x) = \frac{x^2}{5(x+5)} \qquad I = (-5, +\infty)$$

9

[A4] Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^{x}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 : \lambda + 1 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\begin{array}{l} -\lambda^3 - \lambda^2 \\ \hline -\lambda^2 - 3\lambda - 2 \\ \lambda^2 + \lambda \\ \hline -2\lambda - 2 \end{array}$$

$\lambda_1 = -1$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$FS = \{ e^{-x}, xe^{-x}, e^{2x} \}$$

- $L(y_1) = 6e^{-x}$ $\quad$ -1 je dvojnásobným kořenem

$\Rightarrow$ předpokládaný tvar: $y_1 = ax^2e^{-x}$

$$y_1' = a(2x - x^2)e^{-x}$$
$$y_1'' = a(2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

$$y_1'' = a(2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x}$$
$$y_1''' = a(-4 + 2x - 2 + 4x - x^2)e^{-x}$$
$$y_1''' = a(-6 + 6x - x^2)e^{-x}$$

Dosazení: $\quad -6a + \cancel{6ax} - ax^2 - \cancel{6ax} + 3ax^2 - 2ax^2 = 6$

$$a = -1$$

$$y_1 = -x^2e^{-x}$$

- $L(y_2) = -4xe^{x}$ $\quad$ $y_2 = (ax + b)e^{x}$

$$y_2' = (a + b + ax)e^{x}$$
$$y_2'' = (2a + b + ax)e^{x}$$
$$y_2''' = (3a + b + ax)e^{x}$$

Dosazení: $\quad \cancel{3a} + b + ax - \cancel{3a} - 3b - 3ax - 2ax - 2b = -4x$

$$-4b - 4ax = -4x$$

$$(a, b) = (1, 0)$$

$$y_2 = xe^{x}$$

Celkové řešení: $\quad y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3e^{2x} - x^2e^{-x} + xe^{x}; \; x \in \mathbb{R}$

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad s''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = s(x)$$

5 bodů

$$s'' - s = 0 \quad \& \quad s(0) = 1 \quad \& \quad s'(0) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

$$FS = \{e^x, e^{-x}\}$$

$$s(x) = \alpha \cdot e^x + \beta \cdot e^{-x} \qquad (\alpha, \beta = ?)$$

$$\left.\begin{aligned} s(0) &= \alpha + \beta \overset{!}{=} 1 \\ s'(0) &= \alpha - \beta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$s(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x} = \cosh(x)$$

$$\mathcal{D}om(s) = \mathbb{R}$$

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

2 (10 bodů)

Mezi formálními řešeními diferenciální rovnice

$$y' = \frac{3\frac{y^2}{x^2} - 6\frac{y}{x} - 3}{3\frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} - 3}$$

je i kružnice o poloměru $R = 5$. Nalezněte její střed.

Řešení:

- Zadaná diferenciální rovnice je homogenní stupně nula a její řešení budeme hledat rovnou pomocí obecné substituce

$$y(x) = xz(x),$$

protože lineární řešení nemůže být kružnice.

- Dosadíme do rovnice $y = zx$, $\quad y' = z'x + z$.

$$z'x + z = \frac{3z^2 - 6z - 3}{3z^2 + 6z - 3} = \frac{z^2 - 2z - 1}{z^2 + 2z - 1}$$

- Separujeme proměnné

$$z'x = \frac{z^2 - 2z - 1 - z\left(z^2 + 2z - 1\right)}{z^2 + 2z - 1} = \frac{-z^3 - z^2 - z - 1}{z^2 + 2z - 1},$$

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} z' = -\frac{1}{x}.$$

- Před integrací provedeme rozklad na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli má kořen $z = -1$ (uhodneme: jediní kandidáti na celočíselné kořeny jsou dělitelé absolutního členu 1, tj. ± 1). Po vydělení zjišťujeme $z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)\left(z^2 + 1\right)$ a platí tedy

$$\frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1} = \frac{A}{z + 1} + \frac{Bz + C}{z^2 + 1}.$$

- Najdeme A, B, C:

$$Az^2 + A + Bz^2 + Bz + Cz + C = z^2 + 2z - 1,$$

z čehož vychází soustava

$$A + B = 1, \qquad B + C = 2, \qquad A + C = -1,$$

jejímž řešením je $(A, B, C) = (-1, 2, 0)$.

- Nyní integrujeme

$$\int \frac{-1}{z + 1} \mathrm{d}z + \int \frac{2z}{z^2 + 1} \mathrm{d}z = -\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x,$$

$$\ln \left| \frac{z^2 + 1}{z + 1} \right| = \ln \frac{C}{|x|} \text{ kde } C > 0,$$

$$\frac{z^2 + 1}{z + 1} = \frac{C}{x} \text{ kde } C \in R \setminus \{0\}.$$

- Přejdeme k původním proměnným a dostaneme formální řešení

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right), \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{2},$$

$$x^2 + y^2 = C(x + y),$$

což je kružnice se středem $\left(\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right)$ a poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}}$.

- Kružnice s poloměrem $\frac{C}{\sqrt{2}} = 5$ má tedy střed $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

3) $y' - 2\left(\frac{1}{x} + 1\right) y = 0 \quad \Big/ \frac{1}{x^2} e^{-2x}$ $\quad -2\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -2\ln x - 2x$

IF 11

$$y' \cdot \frac{1}{x^2} e^{-2x} - 2\left(\frac{1}{x}+1\right)\frac{1}{x^2} e^{-2x} y = 0$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{x^2} e^{-2x}\right)' = C'$$

$$y(x) = C \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

$$y(x) = z \cdot x^2 \cdot e^{2x}$$

$$y' = (z'x^2 + 2xz + 2x^2 z)e^{2x}$$

$$y'' = (z''x^2 + 2xz' + 2z + 2xz' + 4xz + 2x^2 z' + 2z'x^2 + 4xz + 4x^2 z)e^{2x}$$

[illegible]:

$$z''x^4 - x^4 z' = 0$$

$$z'' - z' = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$F_S = \{1, e^x\}$$

$$z(x) = C_1 + C_2 e^x$$

$$y(x) = C_1 x^2 e^{2x} + C_2 x^2 e^{3x}; \qquad I = \mathbb{R}$$

$$\underbrace{2x+y}_{f(x,y)} + \underbrace{(x-2y)}_{g(x,y)}\cdot y' = 0 \quad \Bigg\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \quad \& \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}$$

7 bodů

$\Rightarrow$ exaktní DR

$$H(x,y) = \int_\alpha^x f(s,y)\,ds + \int_\beta^y g(\alpha,t)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^x (2s+y)\,ds + \int_\beta^y (\alpha-2t)\,dt =$$

$$= [s^2+ys]_\alpha^x + [\alpha t - t^2]_\beta^y =$$

$$= x^2+xy-\alpha^2-\alpha y+\alpha y-y^2-\alpha\beta+\beta^2 = CONST$$

$$x^2+xy-y^2 = K$$

$K=?$ $\quad (x_0,y_0)=(0,0):\quad x_0^2+x_0y_0-y_0^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow K=0$

Formální řešení: $x^2+xy-y^2=0$

$$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 = y^2+\frac{y^2}{4}$$

$$\left|x+\frac{y}{2}\right| = \frac{\sqrt5}{2}|y|$$

Obecný tvar přímky: $y=ax \Rightarrow x^2+x\cdot a\cdot x-a^2x^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+a-a^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a^2-a-1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac12\left(1\pm\sqrt{1+4}\right) = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

$\Rightarrow$ hledané dvě přímky: $y(x) = \frac{1+\sqrt5}{2}x \Rightarrow (1+\sqrt5)x-2y=0$

$y(x) = \frac{1-\sqrt5}{2}x \Rightarrow (1-\sqrt5)x-2y=0$

Normálové vektory: $\vec{n} = (-2;1+\sqrt5)$ & $\vec{m} = (-2;1-\sqrt5)$

$\langle\vec{n}|\vec{m}\rangle = (1+\sqrt5)(1-\sqrt5)+4 = 1-5+4=0 \Rightarrow$ přímky jsou kolmé