Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze A

02/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (8 bodů)

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{n^2(x-3n)}{x(n^3+x^3)}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $M = (0, \infty)$.

2 (9 bodů)

Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{3^n(n-1)!} \frac{x^2}{x^4+n^4}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

3 (7 bodů)

Ve kterém bodě nabývá řešení diferenciální rovnice

$$2xy - 2x + (x^2+1)y' = 0, \quad y(1) = 0$$

své nejnižší hodnoty?

4 (9 bodů)

Nalezněte mocninnou řadu reprezentující hodnotu integrálu

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\,\mathrm{d}y$$

a určete její obor konvergence. Výsledek zapište do tvaru s vícenásobnými faktoriály.

5 (7 bodů)

Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!}(x+1)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(x-3n)}{x(n^3+x^3)} = -\frac{3}{x}$$

8b

$$g_n(x) = f_n(x) + \frac{3}{x} = \frac{n^2+3x^2}{n^3+x^3}$$

$$g_n'(x) = \frac{6x(n^3+x^3)-(n^2+3x^2)\cdot 3x^2}{(n^3+x^3)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$x = n$$

$$g_n(0) = \frac{1}{n} \quad \& \quad g_n(+\infty) = 0 \quad \& \quad g_n(x) \in C(0;+\infty)$$

!

$$\& \quad g_n(n) = \frac{4n^2}{2n^3} = \frac{2}{n}$$

– funkční hodnota $g(n)$ ve stacionárním bodě musí být srovnána s „krajními" hodnotami $\underbrace{\lim_{x\to 0_+} g_n(x)}_{g_n(0)}$ a $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} g_n(x)}_{g_n(+\infty)}$

$$g_n(0) = \frac{1}{n} < \frac{2}{n} = g_n(n)$$

$\Rightarrow$ teprve teď lze s jistotou říci, že

$$\sup |g_n(x)| = g_n(n) = \frac{2}{n}$$

$$\forall x>0: \quad |g_n(x)| \leq \frac{2}{n} \stackrel{\Delta}{=} \sigma_n$$

viz supremální kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 \quad \Rightarrow \quad f_n(x) \rightrightarrows -\frac{3}{x} \quad \text{na } (0;+\infty)$$

$\checkmark$ za derivaci

9b

$$\left(\frac{x^2}{x^4+n^4}\right)' \overset{!}{=} 0 \qquad 2x(x^4+n^4) - x^2 \cdot 4x^3 = 0$$

$$x = \pm n \checkmark$$

Další stacionární bod je $x_0 = 0$! $\checkmark$

$$g_n(x) \triangleq \frac{x^2}{x^4+n^4} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_n(0) = 0 \ \& \ g_n(+\infty) = 0 \ \& \ g_n(x) \in C(\mathbb{R}) \\ \& \ g_n'(\pm n) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sup |g_n(x)| = g_n(\pm n) =$$

$\checkmark$ nebo graf

$$= \frac{n^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \underbrace{\left| \frac{(3n-2)!!!}{3^n(n-1)!} \frac{x^2}{x^4+n^4} \right| \leq \frac{(3n-2)!!!}{3^n(n-1)!} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!} \frac{1}{n}}_{\checkmark}$$

$$\text{Raabe:} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(3n+1)!!!}{(3n+3)!!!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(3n)!!!}{(3n-2)!!!}\right) \checkmark =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{3n+1}{3n+3} \cdot \frac{n}{n+1}\right) = \checkmark$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{3n^2+6n+3-3n^2-n}{3n^2+6n+3} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3} > 1$$

$$\overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow} \quad \sum_n f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \checkmark$$

explicitní uvedení kritéria $\checkmark$

7b

$$2xy - 2x + (x^2+1)y' = 0 \quad \& \quad y(1) = 0$$

$$(x^2+1)y' + 2xy = 2x$$

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Big/ \text{ I.F. } e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{\ln(x^2+1)} = (x^2+1)$$

tvar L.D.R.

I.F.

(chybně určený integ. faktor ⇒ konec oprav!)

$$(y\cdot(x^2+1))' = 2x$$

$$(y\cdot(x^2+1)') = (x^2+C)'$$

$$y(x) = \frac{C}{x^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$y(1) = \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$y(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad \& \quad \mathcal{D}om(y) = \mathbb{R}$$

Hledání globálního minima:

$$y' = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = 2x\frac{2}{(x^2+1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

pro $x<0$ je $y'(x)<0$ & pro $x>0$ je $y'(x)>0$ ⇒

⇒ $x_0 = 0$ je bodem lokálního minima

– jde ale o minimum globální?

$y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ a $\mathcal{D}om(y) = \mathbb{R}$

⇒ extrém by mohl „nastat" v $\pm\infty$

Proto: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = 1$ & $y(0) = -1$

⇒ Nalezené řešení nabývá minimální hodnoty -1, a to v bodě $x=0$.

Naleznete mocninnou řadu reprezentující hodnotu integrálu $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\,dy$ a určete její O. 9b

Výsledek zapište do tvaru s dvojnásobnými faktoriály.

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} t^n \qquad (1+t)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} t^n =$$

$$= \underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n}_{\checkmark}$$

$$(1+y^4)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{4n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+y^4}}\,dy = \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{4n}\right) dy =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int_0^x y^{4n}\,dy = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{4n+1}{4n+5} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{4n+1}{4n+5} = 1 \Rightarrow R = 1$$

- v obou krajních bodech má řada tvar $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{4n+1}}_{\text{tvar krajních řad}}$

(chybné krajní řady ⇒ konec opravy)

- Raabeovo kriterium

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2} \frac{4n+1}{4n+5}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{8n^2+18n+10-8n^2-6n-1}{8n^2+18n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2+9n}{8n^2+18n+10} = \frac{3}{2} > 1$$

$$\Rightarrow -1 \in O, \ 1 \in O$$

$$O = \langle -1, 1 \rangle$$

7b

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)!!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3n-1)!!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$$

$R = 1/3$

nebo krajní body

$I = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ ... interval konvergence

Levá krajní řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{n!} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n-1)!!!}{3^n \cdot n!}$

Pravá krajní řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{3^n \cdot n!}$

explicitně vypsaný tvar krajních řad

Raabeovo kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(3n+2)!!!}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{(3n-1)!!!}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{3n+2}{3(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \frac{3n+3-3n-2}{3n+3} = \frac{1}{3} \in (0,1)$$

Závěr: $O = \left\langle -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze B

02/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (8 bodů)
Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x(n^4x+x^3+1)}{n^4+x^2}\right)_{n=1}^{\infty}$$

na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

2 (9 bodů)
Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{n^2}{x^2+n^2}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

3 (6 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$2xy-x-(2+x^2)y'=0$$

s počáteční podmínkou $y(2)=-4$.

4 (10 bodů)
Pro funkci

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x+7}}$$

nalezněte příslušnou Taylorovu řadu se středem v bodě $c=1$ a stanovte její obor konvergence.

5 (7 bodů)
Najděte obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^n}\frac{(x-3)^{2n}}{(2n+1)!!}.$$

$$f_n(x) = \frac{x(n^4x + x^3 + 1)}{n^4 + x^2} \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$$

$$\mathcal{D}om(f) = \mathcal{O} = \mathbb{R}$$

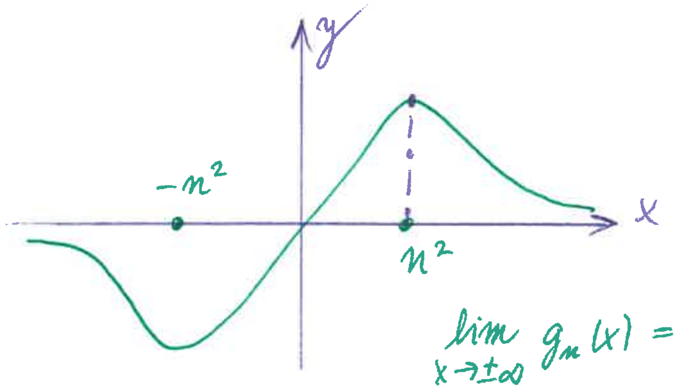
$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{x}{n^4+x^2}$$

$$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n^4+x^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{n^4+x^2-2x^2}{(n^4+x^2)^2} = \frac{n^4-x^2}{(n^4+x^2)^2} \overset{!}{=} 0$$

$x = \pm n^2$ (stacionární body)

Graf $g_n(x)$



$$\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0 \quad \& \quad \& \; g_n(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_n = g_n(n^2) = \frac{n^2}{n^4+n^4} = \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

srovnávací kritérium

$$f_n(x) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x^2$$

Zkoušková písemná práce č. 3 z předmětu 01MAB3

1. února 2016, 9:00 – 11:00

1 9 (8 bodů)

Abelovým kritériem vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}$$

na $\mathbb{R}$. Je možné použít i Weierstrassovo kritérium?

Řešení:

- Řada $\sum f_n(x) g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na množině M, jestliže je splněna Abelova podmínka

  $$\sum f_n(x) \overset{M}{\rightrightarrows},$$

  $g_n(x)$ monotónní $\forall x \in M$ a stejnoměrně omezená na M.

Stanovení kritéria:

ABELOVO

- Posloupnost

  $$g_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2}$$

  je skutečně monotónní vzhledem k pro každé x jak je vidět ze zápisu nahoře ($\left(\frac{x}{n}\right)^2$ klesá, tj. jmenovatel klesá, $g_n(x)$ roste).
- Okamžitě je vidět i stejnoměrná omezenost

  $$0 < \frac{1}{1+\left(\frac{x}{n}\right)^2} \leq 1.$$

  (kdo tyto vlastnosti nevidí, musí je nějak korektně dokázat).
- Řada $\sum f_n(x)$ je pouze číselná, tj. stačí dokázat její konvergenci.
- Použijeme zobecněné Raabeho kritérium pro řady se střídavými znaménky. Platí

  $$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right)$$

  $$= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n+3-(2n+2)}{2n+3}\right)$$

  $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \in (0,1),$$

  takže řada konverguje neabsolutně (relativně). Tím je důkaz hotov.

- Z výše uvedeného postupu je vidět, že pro důkaz stejnoměrné konvergence na $\mathbb{R}$ nelze použít Weierstrassovo kritérium. Nejlepší majorantou posloupnosti

  $$(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}$$

  je totiž

  $$\sigma_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{n^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

  ale z Raabeho kritéria je vidět, že řada $\sum \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ diverguje.

2 body za Weierstrasse

(i když nakonec nefunguje :-))

6b

$$(2+x^2)y' - 2xy = -x$$

$$y' - \frac{2x}{2+x^2}y = -\frac{x}{2+x^2} \quad \Big/ \quad I.F. \quad e^{\int \frac{-2x}{2+x^2}dx} = e^{-\ln(2+x^2)} = \frac{1}{2+x^2}$$

tvar L.D.R.

$$\left(y \cdot \frac{1}{2+x^2}\right)' = -\frac{x}{(2+x^2)^2}$$

$$y \cdot \frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2+x^2} + C$$

(je-li integr. faktor určen chybně, dále už neopravuji!)

$$y(x) = \frac{1}{2} + C(2+x^2)$$

Cauchyova úloha: $y(2) = -4$

$$\frac{1}{2} + C(2+4) \overset{!}{=} -4$$

$$6C = -\frac{9}{2}$$

$$C = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4}$$

$$y(x) = \cancel{\tfrac{3}{2}}\ -1\ 22\ \tfrac{1}{2} - \frac{3}{4}(2+x^2); \quad Dom(y) = \mathbb{R}$$

$$= -1 - \frac{3}{4}x^2$$

Nebo separace proměnných

$$(2+x^2)y' = x(2y-1)$$

$$\frac{y'}{2y-1} = \frac{x}{2+x^2} \quad \Big| \int$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y-1| = \frac{1}{2}\ln|2+x^2| + \frac{1}{2}\ln|\tilde{c}|$$

$$2y-1 = \tilde{c}(2+x^2)$$

$$y = \frac{1}{2} + c(2+x^2)$$

$$(2c = \tilde{c})$$

(1 bod za správnou reprezentaci konst.)

pokud student ví, co má počítat

10b

$$f(x) = (x+7)^{-1/3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x+7)^{-4/3} \quad \& \quad f'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}(x+7)^{-7/3}$$

$$f^{(n)} = (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n}(x+7)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$f^{n}(1) = (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{3^n} 2^{-3n-1} = (-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{2\cdot 3^n}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}\frac{(x-1)^n}{8^n}$$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!!!}{(3n+3)!!!}\frac{8^n}{8^{n+1}}\frac{(3n)!!!}{(3n-2)!!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$R = 8$$

Krajní body oboru: $x = -7$ a $x = 9$ ← správné určení krajních bodů

Krajní řady: $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}$ ← správné určení krajních řad

Raabeovo kritérium:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{3n+1}{3n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+3} = \frac{2}{3}}\ \underbrace{\in (0,1)}_{\text{řada konverguje relativně}}$$

$$\Rightarrow 9 \in O \wedge -7 \notin O$$

$$O = (-7; 9\rangle$$

7b

$t = (x-3)^2 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n} \frac{t^n}{(2n+1)!!}$

$R_t^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{4}$ ✓

$R_t = 4$

$(x-3)^2 = 4 \Rightarrow |x-3| = 2 \Rightarrow$ krajní body oboru konvergence jsou $x=1$ & $x=5$ ✓

Krajní řady:

$x=1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n} \frac{(-2)^{2n}}{(2n+1)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\,2^n}{(2n+1)!!}$

$x=5 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\,2^n}{(2n+1)!!}$

✓ explicitně vypsané krajní řady

Raabeovo kritérium

$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(2n+3)!!} \frac{(2n+1)!!}{n!\,2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2(n+1)}{2n+3}\right) =$ ✓

$= \lim_{n\to\infty} n \frac{2n+3-2n-2}{2n+3} = \underbrace{\frac{1}{2} \in (0,1)}_{\text{řada konverguje relativně}}$ ✓

$\mathcal{O} = \langle 1, 5 \rangle$ ✓✓

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze C

23/11/2021, 9:20 - 11:10

1 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n+1)!!!}{n!}(x-2)^n.$$

2 (7 bodů)
Řešte diferenciální rovnici

$$x(1+x^2)y' = 2y-2$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

3 (6 bodů)
Pro které $x \in \mathbf{R}$ je součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(4k)!!!!}$$

nejvyšší?

4 (11 bodů)
Rozhodněte, zda platí rovnost

$$\int_0^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,\frac{x^n(4-x)^n}{n\cdot 4^n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^4\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,\frac{x^n(4-x)^n}{n\cdot 4^n}\,\mathrm{d}x.$$

5 (9 bodů)
Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x}{m^2+x^2}\ln^2(m)\right)_{m=1}^{\infty}$$

na množině všech reálných čísel.

7b

1. $$\bar{R}^{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+4)!!!}{(3n+1)!!!} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{n+1} = 3$$

$$R = \frac{1}{3}$$

interval konvergence: $$I = \left(2-\frac{1}{3};\ 2+\frac{1}{3}\right) = \underbrace{\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right)}_{\text{krajní body}}$$

krajní řady: $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3n+1)!!!}{n!\,3^n}$$

Vyšetření konvergence v krajních bodech:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{3n+4}{n+1}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{3n+4}{3n+3}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\,\frac{-1}{3n+3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\quad O = \left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}\right)$$

$$x(1+x^2)\,y' = 2y-2$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{y-1}\,y' = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{y-1}\,dy = \int\frac{1}{x(1+x^2)}\,dx \quad \Big|\ \text{parciální zlomky}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{y-1}\,dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tilde{C}$$

$$\ln|y-1| = \ln\frac{x^2}{1+x^2} + \ln C$$

$$y(x) = 1 + C\cdot\frac{x^2}{1+x^2}$$

Kalibrace konstanty:

$$y(1) = 1 + \frac{c}{2} \stackrel{!}{=} 2$$

$$c = 2$$

Závěr:

$$y(x) = 1 + \frac{2x^2}{1+x^2} = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$$

$$\mathrm{Dom}(y) = R$$

7b

6b

```
In[1]:= Sum[(-1)^k x^(2k+1) / 4^k / Factorial[k], {k, 0, Infinity}]
```

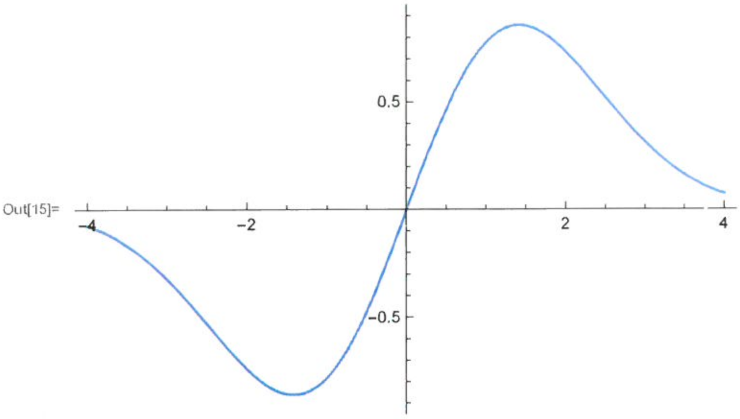
Out[1]= $e^{-\frac{x^2}{4}} x$

```
In[2]:= Solve[D[e^(-x^2/4) x, {x, 1}] == 0, x]
```

$\{\{x \to -\sqrt{2}\}, \{x \to \sqrt{2}\}\}$

```
In[15]:= Plot[e^(-x^2/4) x, {x, -4, 4}]
```

Out[15]=




```
In[12]:= DSolve[{x (1 + x^2) y'[x] == 2 y[x] - 2, y[1] == 2}, y[x], x]
```

Out[12]= $\left\{\left\{y[x] \to \frac{1+3x^2}{1+x^2}\right\}\right\}$

In[13]:= $\frac{1+3x^2}{1+x^2}$ /. x → 1

Out[13]= 2

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(4k)!!!!} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{4^k \cdot k!} =$$

$$= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!} = x e^{-x^2/4} \stackrel{\triangle}{=} s(x)$$

$$s'(x) = \left(1 - x \cdot \frac{2x}{4}\right) e^{-x^2/4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

[Diskuse, zda jde o globální extrémy]

$\Rightarrow$ součet je nejvyšší pro $x = \sqrt{2}$ a je to $\sqrt{2}\frac{1}{e}$

$s'(\sqrt{2}) = 0$

$$s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(4k)!!!!} x^{2k}$$

$$s'(\sqrt{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4^k \cdot k!} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k)!!} = 0$$

[3.] (bodů) Rozhodnete, zda platí rovnost

$$\int_0^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n\cdot 4^n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^4 \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n\cdot 4^n}\,dx.$$

... je třeba prokázat, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n\,4^n}$ konverguje stejnoměrně na $\langle 0,4\rangle$

... nejprve rozhodneme o bodové konvergenci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} \frac{x^{n+1}(4-x)^{n+1}}{(n+1)\,4^{n+1}} \frac{n\,4^n}{x^n(4-x)^n} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)}{(2n+3)} \frac{1}{4} \frac{n}{n+1}\, x(4-x) =$$

$$= \frac{1}{4} x(4-x)$$

je třeba rozhodnout, zda $g(x) = \frac{1}{4} x(4-x) < 1$

* maximum funkce min spojitá

$g'(x) = 1 - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow$ stacionární bod $x = 2$

ve stacionárním bodě nastává zjevně maximum, tj. $g(2) = 1$

tedy $\forall x \in \langle 0,2)\cup(2,4\rangle$ je $g(x) < 1 \Rightarrow$ zde řada konverguje

otázka konverguje řada i v bodě $x = 2$?

... jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n}$

Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} \frac{n}{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n(2n+2)}{(n+1)(2n+3)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n+3-2n}{2n^2+5n+3}\, n = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \text{řada konverguje}$$

stejnoměrná konvergence

$g_n(x) = x^n(4-x)^n \qquad g_n'(x) = n\,x^{n-1}(4-x)^n - n\,x^n(4-x)^{n-1} = $

$4 - x - x = 0$

$x = 2$

$\Rightarrow$ v bodě $x = 2$ nastává zjevně maximum, neboť $g_n(0) = g_n(4) = 0$ a

a $g_n(x) \in C(\langle 0,4\rangle) \Rightarrow \max_{x\in\langle 0,4\rangle} g_n(x) = g_n(2) = 2^n\, 2^n = 4^n$

$$\forall x \in \langle 0,4\rangle \qquad \left| \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{x^n(4-x)^n}{n\,4^n} \right| \leq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n}$$

řada $\sum_n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{n}$ konverguje z Raabeova kritéria (viz výše), tj. dle Weierstrassova kritéria konverguje zkoumaná řada stejnoměrně na $\langle 0,4\rangle$

⇓

zadaná rovnost platí!

4 (bodů)

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti funkcí

$$\left(\frac{x}{m^2+x^2}\ln^2(m)\right)_{m=1}^{\infty}$$

$g_m(x)$

na množině všech reálných čísel.

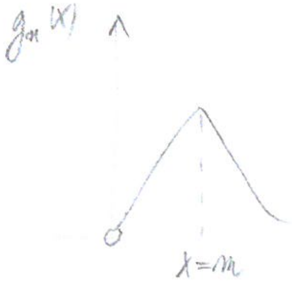
Limitní funkce:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x\cdot \ln^2(m)}{m^2+x^2} \overset{L'H}{=} x \lim_{m\to\infty} \frac{2\ln m \cdot \frac{1}{m}}{2m} = \lim_{m\to\infty} \frac{x\cdot \ln(m)}{m^2} \overset{L'H}{=} x \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} = 0$$

✓✓ (mohl ještě uvádět explicitní výpočet!)

$$g_m'(x) = \frac{m^2+x^2 - x\cdot 2x}{(m^2+x^2)^2} = \frac{m^2-x^2}{(m^2+x^2)^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = m \vee x = -m$$

(lichá funkce)



$> x$ — mohl by opravdu odůvodnit, proč jde o maximum

$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = 0 \wedge g_m \in C(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $x = m$ je bodem maxima ✓

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_m(x)| = g_m(m) = \frac{m}{m^2+m^2} = \frac{1}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{m^2+x^2}\ln^2(m) - 0\right| = \boxed{\frac{\ln^2(m)}{2m} =: \sigma_m}$$ ✓

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln^2(m)}{2m} \overset{L'H}{=} \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot\ln(m)\cdot\frac{1}{m}}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln(m)}{m} \overset{L'H}{=} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$ ✓

✓ za výpočet

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{m^2+x^2}\ln^2(m) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0}$$

ODPOVĚĎ ✓