Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze A

04/01/2022, 9:20 - 11:10

❶ (5 bodů)
Nechť je na vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3$ zadána norma předpisem

$$\|\vec{x}\| := 3|x_1| + 2|x_2| + 7|x_3|.$$

Nechť $\varrho(\vec{x},\vec{y})$ je metrika generovaná touto normou. Rozhodněte, zda je posloupnost

$$\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{2n^2+3}{n^2}, -\frac{1}{n^2} - 8\right)$$

konvergentní v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \varrho\}$.

❷ (5 bodů)
Pro která $\omega \in \mathbf{R}$ zadává předpis

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

skalární součin na prostoru $\mathbf{R}^4$?

❸ (3 body)
Zakreslete okolí $\mathcal{U}_{10}(0,0)$ v metrickém prostoru $\mathbf{R}^2$ s metrikou $\varrho(\vec{x},\vec{y}) = 2|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2|$.

❹ (11 bodů)
Nalezněte řešení diferenciální rovnice

$$2xy' + \frac{2xy + 8x^2}{y + 2x} = y$$

vyhovující podmínce $y(8) = -8$. Na obrázku uvnitř zadání je vyobrazena elipsa představující ono hledané formální řešení. Do tohoto obrázku zakreslete souřadný systém $\mathcal{O}\vec{x}\vec{y}$ tak, aby odpovídal zadání úlohy. Užijte k tomu polohu středu citované elipsy a její průsečíky se souřadnými osami.

❺ (7 bodů)
V Hilbertově prostoru jistých funkcí definovaných na $(0, +\infty)$ je zadán skalární součin prostřednictvím vztahu

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Rozhodněte, zda posloupnost $(\frac{1}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x})_{n=1}^\infty$ je v tomto prostoru konvergentní.

❻ (9 bodů)
Pro kvadriku

$$2x + x^2 - 6y - 2xy + 2y^2 + 4z - 4xz - 2yz + 12z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a transformaci, která ji na normální tvar převádí. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

5 bodů

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = (0;2;-8) =: \vec{a}$$

$$\vec{x}_n - \vec{a} = \left(\frac{1}{n^2}; \frac{3}{n^2}; -\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\rho(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = 3|x_1-y_1| + 2|x_2-y_2| + 7|x_3-y_3|$$

$$\rho(\vec{x}_n;\vec{a}) = \frac{3}{n^2} + \frac{6}{n^2} + \frac{7}{n^2} = \frac{16}{n^2}$$

dokážeme, že $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 := \left\lfloor \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 : \quad n > n_0 \Rightarrow \rho(\vec{x}_n;\vec{a}) < \varepsilon$$

$$\rho(\vec{x}_n;\vec{a}) = \frac{16}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{16}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{4}{\sqrt{\varepsilon}}$$

věta: $(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní $\Rightarrow$ ~~$(\vec{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská~~

$w \in \mathbb{R}$, chceme skalární součin na $\mathbb{R}^4$

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}4&0&0&w\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\w&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

· symetrie je splněna pro $\forall w \in \mathbb{R}$

PD: Sylvesterovo krit.: $|4| > 0$ $\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix} > 0$ $\begin{vmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix} > 0$

$$\begin{vmatrix}4&0&0&w\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\w&0&0&4\end{vmatrix} \overset{\text{rozvoj - 1. řádek}}{=} 4\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{vmatrix} + w(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&2&0\\0&0&3\\w&0&0\end{vmatrix} = 4\cdot 24 - w\cdot(6w) =$$

$$= 4\cdot 24 - 6w^2 = 4\cdot 4 - w^2 = 16 - w^2 > 0\ !$$

$$(4-w)(4+w) \rightarrow \underline{\underline{w = \pm 4}}$$

$w \in (-4,4)$!

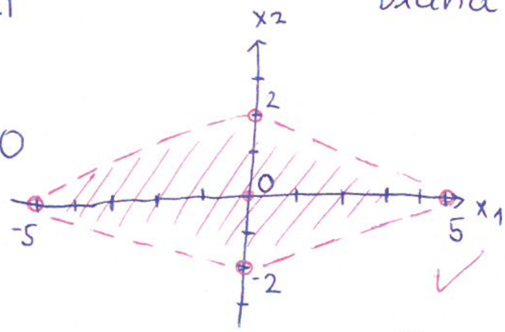
3) $U_{10}(0,0)$, $\mathbb{R}^2$, $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 2|x_1 - y_1| + 5|x_2 - y_2|$

Diana Varšíková

$U_{10}(\vec{0}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \rho(\vec{x},\vec{0}) < 10\}$

$\rho(\vec{x},\vec{0}) = 2|x_1| + 5|x_2| < 10$

$x_1, x_2 > 0 : 2x_1 < 10 - 5x_2$



3b.

\\ •-10 \

$$2xy' + \frac{8x^2+2xy}{y+2x} = y \qquad y(8) = -8$$

homogenní rovnice: $y = x\cdot w(x) \Rightarrow y' = xw' + w$

$$2x(xw'+w) + \frac{8x^2+2x^2w}{xw+2x} = xw$$

$$2xw' + 2w + \frac{8+2w}{2+w} = w$$

$$-2xw' = \frac{8+2w+2w+w^2}{2+w}$$

(bez $\frac{1}{2}$)

$$\frac{4+2w}{w^2+4w+8}\, w' = -\frac{1}{2x} \qquad \frac{2+w}{w^2+4w+8}\, w' = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|w^2+4w+8| = -\frac{1}{2}\ln|x| + C \qquad = -\ln|x| + c$$

$$\ln|w^2+4w+8| = \ln\frac{C}{\sqrt{|x|}} \qquad = \ln\frac{c}{x}$$

$$w^2+4w+8 = \frac{C}{\sqrt{|x|}} \qquad \frac{c}{x}$$

$$w^2+4w+8 = \frac{C}{x}$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 8 = \frac{C}{x}$$

$$y^2 + 4xy + 8x^2 = Cx$$

$y(8) = -8 \Rightarrow$

$$64 - 4\cdot 64 + 8\cdot 64 = 8\cdot C$$

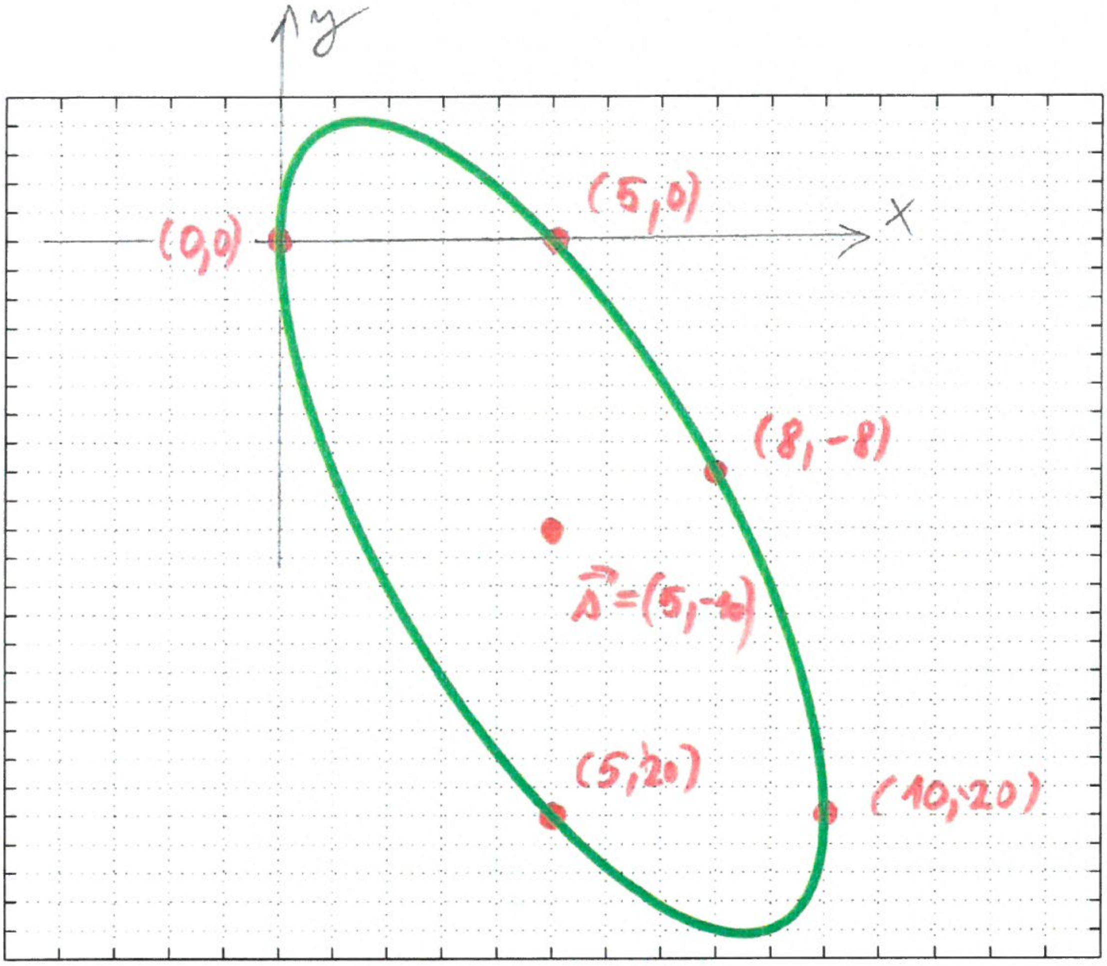
$$5\cdot 64 = 8\cdot C$$

$$C = 40$$

Formální řešení splňující počáteční podmínce: $y^2 + 4xy + 8x^2 - 40x = 0$

$(y+2x)^2 + (2x-10)^2 = 100$

- jde o elipsu! $(y+2x)^2 + 4x^2 - 40x = 0$ $\quad A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$
- průsečík s osou $y=0$: $8x^2 - 40x = 8x(x-5) = 0$ $\quad (0,0)$ a $(5,0)$
- průsečík s osou $x=0$: $y^2 = 0$. $(0,0)$
- střed: $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad (s_1, s_2) = (5, -10)$



osy ✓

vyznačení 3 bodů ✓

[illegible]

B4

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\,dx$$

$$\rho(f,g) = \|f-g\| \quad \wedge \quad \|f\| = \left(\int_0^\infty f^2(x)e^{-x}\,dx\right)^{\frac12}$$

Potřebujeme limitní funkci: $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}$

Pomůžeme si klasickou limitou:

víme, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, tj. uvedená řada konverguje, a proto musí splňovat nutnou podmínku, a to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad \text{všude v } R$$

Hypotéza: $h(x) = 0$

Ověření:

– máme dokázat: $\underbrace{\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in N: n>n_0 \Rightarrow \overbrace{\rho(h_n,0)}^{\omega_n \in R} < \varepsilon}$

$\Longleftrightarrow$ (*) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = 0$ (ve smyslu $\boxtimes$)

$$\rho^2(h_n,0) = \left\|\frac{x^n}{n!}e^{-x} - 0\right\|^2 = \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{(n!)^2} e^{-2x}\cdot e^{-x}\,dx = \frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty x^{2n}e^{-3x}\,dx$$

Výpočet:

$$\underbrace{\int_0^\infty x^0 \cdot e^{-3x}\,dx}_{\psi_0} = \left[-\frac13 e^{-3x}\right]_0^\infty = \frac13 \qquad \underbrace{\int_0^{+\infty} x^n e^{-3x}\,dx}_{\psi_n} = \left|\begin{matrix} u = x^n & v' = e^{-3x} \\ u' = nx^{n-1} & v = -\frac13 e^{-3x}\end{matrix}\right| =$$

$$= 0 + \frac{n}{3}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-3x}\,dx = \frac{n}{3}\psi_{n-1} \Rightarrow \psi_0 = \frac13 \;\&\; \psi_1 = \frac19 \;\&\; \psi_2 = \frac{2}{3^3} \;\&\ldots$$

$$\psi_n = \frac{n!}{3^{n+1}} \Rightarrow \rho^2(h_n,0) = \underbrace{\frac{1}{(n!)^2}\frac{(2n)!}{3^{2n+1}}}_{\omega_n^2} = \cancel{\frac{1}{n!}\frac{1}{3^{n+1}}}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{3^{n+1}} = 0}\ \overset{(*)}{\Rightarrow}\ \frac{x^n}{n!}e^{-x} \longrightarrow 0$$

a $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n^2 = 0$ z podílového kritéria (které vyjde v lim jako $\frac49 < 1$)

NPro trojrozměrnou kvadratickou plochu

$$2x + x^2 - 6y - 2xy + 2y^2 + 4z - 4xz - 2yz + 12z^2 = 0$$

určete název, hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a transformaci $(x, y, z)^T = \mathbb{M}(a, b, c)^T$, která ji na normální tvar převádí.

$$q(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xz - 2yz + 12z^2 = (x-y-2z)^2 + y^2 + 8z^2 - 6yz =$$
$$= \underline{(x-y-2z)^2 + (y-3z)^2 - z^2} = \alpha^2 + \beta^2 - \mu^2$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x-y-2z \\ \beta &= y-3z \\ \mu &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= \alpha+\beta+3\mu+2\mu = \alpha+\beta+5\mu \\ y &= \beta+3\mu \\ z &= \mu \end{aligned}$$

$$Q(\alpha,\beta,\mu) = \alpha^2 + \beta^2 - \mu^2 + 2(\alpha+\beta+5\mu) - 6(\beta+3\mu) + 4\mu =$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 - \mu^2 + 2\alpha + 2\beta + 10\mu - 6\beta - 18\mu + 4\mu =$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 - \mu^2 + 2\alpha - 4\beta - 4\mu =$$
$$= (\alpha+1)^2 + (\beta-2)^2 - (\mu+2)^2 - 1 - 4 + 4 = 0$$

$$(\alpha+1)^2 + (\beta-2)^2 - (\mu+2)^2 = 1$$
$$\underline{a^2 + b^2 - c^2 = 1}$$

jednodílný hyperboloid

$$\left.\begin{aligned} sg(q) &= (2,1,0) \\ SG(Q) &= (2,2,0) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha+1 \\ b &= \beta-2 \\ c &= \mu+2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= a-1 \\ \beta &= b+2 \\ \mu &= c-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= a+b+5c-9 \\ y &= b+3c-4 \\ z &= c-2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Příjmení a jméno	1	2	3	4	5	6	BONUS	

Zápočtová práce č. 3 z předmětu 01ANB3/01MAB3 – verze B

04/01/2022, 9:20 - 11:10

1 (5 bodů)

Nechť je dán Hilbertův prostor jistých funkcí zadaný standardním funkcionálním skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Která z funkcí

$$g_a(x) = x + 2\sqrt{a^2x^3 + 6(1 - ax^2)}, \qquad a \in \mathbf{R}$$

má nejmenší vzdálenost od funkce $h(x) = x$? A jaká je tato minimální vzdálenost?

2 (3 body)

Nechť $\mathscr{H}$ je Hilbertův prostor nad tělesem $\mathbf{C}$ komplexních čísel. Pro libovolné dva **jednotkové** vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathscr{H}$ a číslo $\alpha \in \mathbf{C}$ maximálně zjednodušte výraz $\|\vec{x} + \alpha\vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \alpha\vec{y}\|^2$.

3 (8 bodů)

Nechť $\mathscr{H}$ je funkcionální Hilbertův prostor jistých funkcí definovaných na uzavřeném intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$ zavedený nad tělesem $\mathbf{R}$. Zobrazení

$$\langle a|b\rangle := \int_0^1 a(x)b(x)\,\mathrm{d}x$$

nechť definuje na $\mathscr{H}$ skalární součin. Nalezněte polynom druhého stupně, jež je současně kolmý k funkcím $h(x) = 1$ a $f(x) = 2x - 1$ a zároveň je jeho vzdálenost od nulové funkce rovna číslu $\sqrt{\frac{1}{5}}$.

4 (11 bodů)

Nalezněte formální řešení rovnice

$$2(y - x)xy' = x^2 + y^2$$

takové, že příslušné explicitní řešení $y(x)$ vyhovuje podmínce $y(20) = 0$. Na obrázku na druhé straně tohoto zadání je vyobrazena hyperbola představující ono hledané formální řešení. Do tohoto obrázku zakreslete soufadný systém $\mathscr{O}\vec{e}_1\vec{e}_2$ (včetně vyznačení měřítka) tak, aby odpovídal zadání úlohy. Užijte k tomu výpočet polohy středu formálního řešení. Na vyobrazené hyperbole dále vyznačte alespoň tři její konkrétní body. Grafické části věnujte zvýšenou pozornost. Při bodovém hodnocení je k této části významně přihlíženo.

5 (4 body)

Vyslovte definici konvergence v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$. Na základě její platnosti rozhodněte o limitě posloupnosti $(\vec{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ vektorů z $\mathbf{R}^3$, kde

$$\vec{x}_k = \left(\frac{5}{\sqrt{k}}; -9; \frac{2k+5}{k}\right),$$

v metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^3, \sigma\}$ se σ–metrikou.

6 (9 bodů)

Pro kvadratickou plochu

$$2 - 2x + x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z + 8xz - 16yz + 32z^2 = 0$$

stanovte hlavní a vedlejší signaturu, normální tvar a název. Stanovte transformaci, která zadanou plochu normalizuje. Numerické chyby se v tomto příkladě netolerují.

7

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf \{ \rho(x, g_a(x)) : g_a(x) \in A \}$$

$$\rho^2(x, g_a(x)) = \|x - g_a(x)\|^2 = \langle x - g_a(x), x - g_a(x) \rangle = \int_0^1 (x - g_a(x))^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 4(a^2x^3 + 6 - 6ax^2) \, dx = \left[a^2x^4 + 24x - 8ax^3 \right]_0^1 = a^2 + 24 - 8a$$

Hledáme minimum funkce $\omega(a) := a^2 + 24 - 8a$

$$\frac{d\omega}{da}(a) = 2a - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

$a = 4 \Rightarrow$ můžeme říct, že jde o minimum

($\omega(a)$ je konvexní parabola)

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, A) = \min \sqrt{a^2 + 24 - 8a} = \sqrt{\omega(4)} = \sqrt{16 + 24 - 32} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{dist}(x, A) = 2\sqrt{2}$$

3в

$$\|x+\alpha y\|^2 + \|x-\alpha y\|^2 = \langle x+\alpha y | x+\alpha y\rangle + \langle x-\alpha y | x-\alpha y\rangle =$$

$$= \langle x|x\rangle + \alpha\langle y|x\rangle + \alpha^*\langle x|y\rangle + \alpha\cdot\alpha^*\langle y|y\rangle +$$

$$+ \langle x|x\rangle - \alpha\langle y|x\rangle - \alpha^*\langle x|y\rangle + \alpha\cdot\alpha^*\langle y|y\rangle =$$

$$= 2\langle x|x\rangle + 2\alpha\cdot\alpha^*\langle y|y\rangle = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\cdot|\alpha|^2\|\vec{y}\| =$$

$$= 2(1+|\alpha|^2)$$

8 bodů

$y(x) = ax^2 + bx + c$

$\langle h | y \rangle = \int_0^1 (ax^2 + bx + c) \cdot 1 \, dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \;(= 0)$

$\langle l | y \rangle = \int_0^1 (2x-1)(ax^2 + bx + c) \, dx = 2\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx) \, dx - \underbrace{\frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c}_{=0} \;(= 0)$

$$\underbrace{\frac{a}{2} + \frac{2}{3}b + c = 0 \quad \wedge \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0}$$

$$\frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{b}{2} - \frac{2}{3}b$$

$$\frac{1}{6}a = -\frac{1}{6}b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{b = -a \quad \wedge \quad c = \frac{1}{6}a}$$

$$y(x) = a\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\langle f-g | f-g \rangle} \quad \Rightarrow \quad \rho(y,0) = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\langle y | y \rangle}$$

$$\langle y | y \rangle = \frac{1}{5}$$

$$a^2 \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{5}$$

$$a^2 \cdot \frac{1}{180} = \frac{1}{5}$$

$$a^2 = \frac{180}{5} = 36$$

$$a = 6 \quad (\text{nebo } a = -6)$$

$$y(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

$$2(y-x)\cdot x\cdot y' = x^2+y^2 \quad \& \quad y(\cancel{0}_{+20})=0$$

homogenní rovnice

α) lineární řešení $\quad y = \alpha x \Rightarrow y' = \alpha \Rightarrow \quad 2(\alpha-1)x^2\cdot\alpha = x^2(1+\alpha^2)$

$$2\alpha^2 - 2\alpha = 1+\alpha^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$$

$$y_{1,2}(x) = (1\pm\sqrt{2})x \qquad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2}(2\pm\sqrt{8}) = 1\pm\sqrt{2}$$

β) obecné řešení: $\quad y = x\cdot z(x) \Rightarrow y' = z + xz'$

$$2(z-1)x^2\cdot(z+xz') = x^2(1+z^2)$$

$$2z^2 - 2z + (2xz-2x)z' = 1+z^2$$

$$2x(z-1)z' = 1+2z-z^2$$

$$\frac{2z-2}{z^2-2z-1}z' = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|z^2-2z-1| = -\ln|x| + C$$

$$z^2-2z-1 = \frac{C}{x} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1 = \frac{C}{x} \quad /\cdot x^2$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = Cx$$

$$y(20)=0 \Rightarrow \quad -400 = 20\cdot C \Rightarrow \quad C=-20$$

$$x^2+2xy-y^2 = 20x$$

hyperbola: $\quad (x+y)^2 - 2y^2 - 20x = 0$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}20\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -2 \;\&\; \Delta_1 = \begin{vmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -10 \;\&\; \Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & 10\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -10$$

$$\Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

$$(x+y)^2 - 2y^2 - 20x = 0 \quad \overset{\cdot}{=} \quad \left.\begin{aligned}\xi &= x+y\\ \eta &= \sqrt{2}y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x &= \xi - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\\ y &= \frac{\eta}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

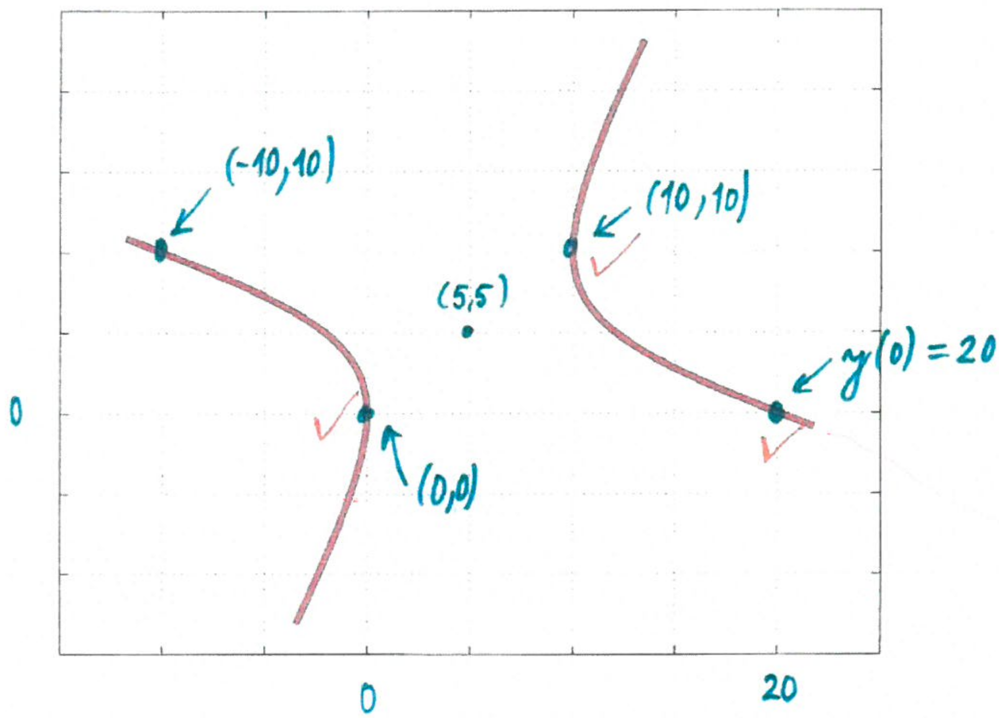
$$\xi^2 - \eta^2 - 20\xi + 10\sqrt{2}\eta = 0$$

$$(\xi-10)^2 - (\eta-5\sqrt{2})^2 = 100-50$$

$$r^2 - s^2 = 50$$

$$\left.\begin{aligned}r &= \sqrt{50}\cosh(\varphi)\\ s &= \sqrt{50}\sinh(\varphi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\xi &= 10+\sqrt{50}\cosh(\varphi)\\ \eta &= 5\sqrt{2}+\sqrt{50}\sinh(\varphi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{aligned}x &= 5+\sqrt{50}\cosh(\varphi) - 5\sinh(\varphi)\\ y &= 5+5\sinh(\varphi)\end{aligned}}_{\text{pro vykreslení}}$$

Toto nemusí být součástí řešení, slouží to pouze k vykreslení hyperboly do zadání!



vyznačení souřadného systému (nebo bodu (1,1) a měřítka) ✓

vyznačení bodů na hyperbole ✓

4b

$\vec{x_k} = \left(\frac{5}{\sqrt{k}}; -9; \frac{2k+5}{k} \right)$ $\{\mathbb{R}^2; \sigma\}$

ukážeme, že $\lim\limits_{k\to+\infty} \vec{x_k} \overset{\{\mathbb{R}^2;\sigma\}}{=\!=} \vec{a} = (0; -9; 2)$, tedy že

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N}: \; k > k_0 \Rightarrow \rho(\vec{x_k}, \vec{a}) = \sigma(\vec{x_k}, \vec{a}) < \varepsilon$$

$$\sigma(\vec{x_k}, \vec{a}) = \max_{k \in 3} |x_{k_i} - a_i| = \max \left\{ \frac{5}{\sqrt{k}} - 0; -9+9; \frac{2k+5}{k} - 2 \right\} =$$

$$= \max \left\{ \frac{5}{\sqrt{k}}; 0; \frac{5}{k} \right\} = \frac{5}{\sqrt{k}}$$

Protože $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{5}{\sqrt{k}} = 0$, lze jistě $\sigma(\vec{x_k}, \vec{a})$ stlačit pod libovolně malé ε

$$\frac{5}{\sqrt{k}} \overset{!}{<} \varepsilon$$

$$\frac{25}{\varepsilon^2} < k \Rightarrow k_0 = 1 + \left\lceil \frac{25}{\varepsilon^2} \right\rceil$$

! numerické chyby se netolerují ! 9b.

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 8xz - 16yz + 32z^2 = (x-y+4z)^2 + y^2 + 16z^2 - 8yz =$$
$$= (x-y+4z)^2 + (y-4z)^2$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x-y+4z \\ \eta &= y-4z \\ \lambda &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \xi + \eta + 4\lambda - 4\lambda = \xi + \eta \\ y &= \eta + 4\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

$$Q(x,y,z) = \xi^2 + \eta^2 + 2 - 2(\xi+\eta) + 2\lambda = 0 \qquad +2\lambda$$
$$\xi^2 - 2\xi + 1 + \eta^2 - 2\eta + 1 = 0$$
$$\underline{(\xi-1)^2 + (\eta-1)^2 + 2\lambda = 0}$$

$$\underline{a^2 + b^2 - 2c = 0}$$

$sG(Q) = (3,1,0)$ ✗
$ng(Q) = (2,0,1)$ ✗
název: eliptický paraboloid
normální tvar: $a^2 + b^2 - 2c = 0$

$$\left.\begin{aligned} a &= \xi - 1 \\ b &= \eta - 1 \\ c &= -\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \xi &= a+1 \\ \eta &= b+1 \\ \lambda &= -c \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= a+1+b+1 \\ y &= b+1-4c \\ z &= -c \end{aligned}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$
2