$$L(x,y,z) = 2xy + 2xz + yz - \lambda(12x^2 + 3y^2 + 2z - 16)$$ ✓

10 bodů

$$\operatorname{grad} L \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z - 24x\lambda = 0 \\ 2x + z - 6y\lambda = 0 \\ 2x + y - 2\lambda = 0 \end{cases}$$ ✓

① $2(y-2x) + 12\lambda(y-2x) = 0$

$2(y-2x)(1+6\lambda) = 0$

$\underline{y = 2x}$ $\qquad$ $\lambda = -1/6$

(tohle ale na hledané řešení nevede, neboť 3 kladná čísla nemohou splňovat $2y+2z+\underbrace{4x}_{-24\lambda x}=0$)

② z poslední rovnice:

$$2x + 2x - 2\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2x}$$

③ z druhé rovnice:

$$2x + z - 12x \cdot 2x = 0 \Rightarrow \underline{z = 24x^2 - 2x}$$

④ Dosazení do rovnice vazby:

$$12x^2 + 3(2x)^2 + 48x^2 - 4x = 16$$
$$72x^2 - 4x - 16 = 0$$
$$18x^2 - x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4\cdot 4\cdot 18 = 289 \qquad x_{1,2} = \frac{1}{36}(1 \pm 17) = \begin{cases} \underline{1/2} \\ -4/9 \quad (\text{mimo}) \end{cases}$$

Stacionární bod: $\underline{\vec{a} = (1/2;\, 1;\, 6-1) = (1/2;\, 1;\, 5)}$ ✓ $\qquad \lambda = 1$ ✓

! není-li stacionární bod určen správně, lze níže získat maximálně 1 bod

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -24\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -6\lambda \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 2 \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1$$

$$\underline{d^2L_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = -24\,dx^2 - 6\,dy^2 + 4\,dx\,dy + 4\,dx\,dz + 2\,dy\,dz}$$ ✓

Redukce: $\frac{\partial g}{\partial x} = 24x \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 6y \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 2 \qquad (12; 6; 2)$

$$\underline{dg_{\vec{a}}(dx, dy, dz) = 12\,dx + 6\,dy + 2\,dz = 0} \;✓ \Rightarrow \underline{dz = -6dx - 3dy}$$

$$d^2L_{\vec{a}}^{(\text{red})}(dx, dy) = -48\,dx^2 - 20\,dx\,dy - 12\,dy^2 = -4\underbrace{(12dx^2 + 5dx\,dy + 3dy^2)}_{\triangleq\, q(x,y)}$$ ✓

$$\underbrace{q(x,y) \succ 0 \Leftarrow 12 > 0 \wedge \begin{vmatrix} 12 & 5/2 \\ 5/2 & 3 \end{vmatrix} > 0 \quad (\text{Sylvester})}_{✓}$$

Závěr:

Bod $\vec{a} = (1/2;\, 1;\, 5)$ je bodem ostrého lokálního vázaného maxima, neboť $d^2L_{\vec{a}}^{(\text{red})}(dx, dy) \prec 0$. ✓

2 a) doplnit musíme množinu $A = \{\square, 0\}$ ✓

B ale ani tak není okruhem, protože $\{\square, *, 0, \lozenge\} \setminus \{\square, 0\} = \{*, \lozenge\} \notin B$ ✓

3 b) $\varphi(\tau) = (\sqrt{3}\cos\tau;\ \tau;\ \sqrt{3}\sin\tau)$ $\quad \varphi'(\tau) = (-\sqrt{3}\sin\tau;\ 1;\ \sqrt{3}\cos\tau)$

$\|\varphi'(\tau)\|^2 = 3(\sin^2\tau + \cos^2\tau) + 1 = 4$ ✓ ← znalost křivk. integrálu 1. druhu

$$l = \int_0^{\lambda} \|\varphi'(\tau)\|\, d\tau = \int_0^{\lambda} 2\, d\tau = 2\cdot\lambda \overset{!}{=} \frac{13\pi}{3} \Rightarrow \lambda = \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

✓ ← výpočet

koncový bod:

$$\vec{a} = \left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6};\ \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\frac{3}{2};\ \frac{13\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ ✓

1 c) nosič: $\operatorname{supp}(\Theta) = (0; +\infty)$ $\quad \lambda((0; +\infty)) = +\infty$

$\Rightarrow$ Heavisideova funkce finitní není ✓

3. Dvě elipsy: ① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ & ② $\underbrace{\frac{x^2}{(\sqrt{2}a)^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}b)^2} = 1}_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2}$ ✓ správné určení rovnic obou elips

8 b

③ Přímka: $y = -\frac{b}{a}x$ ④ Osa y: $x = 0$

Převod všech čtyř křivek vymezujících množinu A do polárních souřadnic $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$

① $\rho = 1$ ② $\rho = \sqrt{2}$

③ $\underbrace{\operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}}_{\checkmark}$ ④ $\varphi = \pi/2$

Výpočet:

✓ převod abstraktního integrálu na klasický

$$\mu_2(A) = \int_A 1\, d\mu(x,y) = \int_A \frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}\, d(x,y) = \int_A 3x^2 \cdot 2y\, d(x,y) =$$

✓ zavedení nových souřadnic

$$= \left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{array} \quad d(x,y) = ab\rho\, d(\rho,\varphi) \right| = 6\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\int_1^{\sqrt{2}} a^2\rho^2\cos^2\varphi\, b\rho\sin\varphi \cdot ab\rho\, d\rho\, d\varphi = \checkmark *$$

$$= 6a^3b^2\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\int_1^{\sqrt{2}} \rho^4\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi = 6a^3b^2\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^{\sqrt{2}} \cdot \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\pi/2}^{3\pi/4} = \checkmark$$

za nějaké smysluplné kroky integrace

$$= \frac{6}{5}a^3b^2(4\sqrt{2}-1)\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2}{5}a^3b^2(4\sqrt{2}-1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{1}{10}a^3b^2(8-\sqrt{2})$$ ✓

* ... jsou-li v integrálu chybné meze, nebo chybí-li jacobián, dále nelze získávat body

4.

8 bodů

$$x = a\rho\cos\vartheta\cos^2\varphi$$
$$y = b\rho\cos\vartheta\sin^2\varphi$$
$$z = c\rho\sin\vartheta$$

$$\det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\vartheta,\varphi)}\right) = abc\rho^2\cdot 2\cdot\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$x,y,z > 0 \Rightarrow \varphi\in(0;\pi/2)\ \&\ \vartheta\in(0;\pi/2)$$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2} < \frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

převod nerovnice ze zadání do nových souřadnic

$$\rho^2 < \rho\cos\vartheta\cos(2\varphi) \Rightarrow \underbrace{\varphi\in(0;\pi/4)}$$

$$\rho < \cos\vartheta\cos(2\varphi)$$

$$\lambda_3(T) = 2abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\vartheta\cos(2\varphi)}\rho^2\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\vartheta = *$$

$$= \frac{2}{3}abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\cos^3\vartheta\cdot\cos^3(2\varphi)\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}abc\int_0^{\pi/2}\cos^4(\vartheta)\,d\vartheta\cdot\int_0^{\pi/4}\cos^3(2\varphi)\cdot\sin(2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}abc\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}(1+\cos 2\vartheta)^2\,d\vartheta\cdot\left[-\frac{1}{8}\cos^4(2\varphi)\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{32}\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\vartheta+\frac{1+\cos 4\vartheta}{2}\right)d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}abc\,\frac{1}{32}\left[\vartheta+\sin(2\vartheta)+\frac{\vartheta}{2}+\frac{\sin(4\vartheta)}{8}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{3}abc\cdot\frac{1}{32}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{128}abc$$

za nějaké smysluplné kroky při vyčíslování integrálu

* je-li mez integrálu $\int_0^{\pi/4}\ldots d\varphi$ nebo $\int_0^{\cos\vartheta\cos(2\varphi)}\ldots d\rho$ určena chybně, dále nelze získávat body !

5.

8 bodů

$$H(\beta) \triangleq \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x)\,dx$$

a) je třeba najít alespoň jedno β tak, aby integrál konvergoval } formulace podmínky ✓

- my volíme $\beta = 0$
- pak $H(0) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$

$$H^2(0) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} y^2 e^{-\alpha y^2} dy = \left| \begin{array}{c} \text{věta o} \\ \text{separabilitě} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^2 y^2 e^{-\alpha(x^2+y^2)} d(x,y) = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi/2} \rho^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, e^{-\alpha\rho^2} \rho\, d\varphi\, d\rho = \left| \begin{array}{c} \rho^2 = u \\ 2\rho\, d\rho = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi)\, d\varphi \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{2} u^2 e^{-\alpha u} du =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(4\varphi)}{2} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} u^2 e^{-\alpha u} du = \left\| \begin{array}{c} \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha} \quad / \frac{d^2}{d\alpha^2} \\ \int_0^{\infty} u^2 e^{-\alpha u} du = \frac{2}{\alpha^3} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\varphi - \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_0^{\pi/2} \cdot \frac{2}{\alpha^3} = \frac{1}{8\alpha^3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16\alpha^3}$$

✓✓✓ za důkaz, že integrál $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx$ konverguje

b) funkce $x \mapsto x^2 e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)$ musí být měřitelná
- ona je ale spojitá, což podle jedné z vět značí, že musí být měřitelná } ✓

c) { k derivaci $\frac{d}{d\beta}\left(x^2 e^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\right) = -x^3 e^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)$ je třeba najít integrabilní majorantu nezávislou na β. Tou je $x^3 e^{-\alpha x^2}$, neboť ✓

✓ formulace podmínky

I. $\left|-x^3 e^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)\right| \leq x^3 e^{-\alpha x^2}$ ✓ ← popis majorantnosti

II. $\int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u\cdot e^{-\alpha u} du =$

$$= \left\| \begin{array}{c} \int_0^{\infty} e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha} \quad / \frac{d}{d\alpha} \\ \int_0^{\infty} u e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha^2} \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

} ✓ vyčíslení integrability