

$$H(x,y) = 3 - 2x + 2x^2 - 10y - 4xy + 10y^2 = 0$$

7b

... pokus zadat implicitní funkci $y = y(x)$

existenční podmínka = podmínka nekritičnosti: $\frac{\partial H}{\partial y} = -10 - 4x + 20y \neq 0$! ✓

$$y' = - \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{-2 + 4x - 4y}{10 + 4x - 20y} = \frac{2x - 2y - 1}{2x - 10y + 5} \quad \checkmark$$

Osa I. a III. kvadrantu: $y = x$

Rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y = kx + q$$

$$y = \underbrace{f'(x_0)}_k \cdot x + \underbrace{f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)}_q$$

Přímka $y = kx + q$ bude rovnoběžná s přímkou $y = x$
 $\Leftrightarrow k = 1$

Proto klademe:

$$y'(x_0) = \frac{2x_0 - 2y_0 - 1}{2x_0 - 10y_0 + 5} \stackrel{!}{=} 1 \quad \checkmark$$

$$2x_0 - 2y_0 - 1 = 2x_0 - 10y_0 + 5$$

$$8y_0 = 6$$

$$y_0 = \frac{3}{4}$$

$$3 - 2x_0 + 2x_0^2 - 10 \cdot \frac{3}{4} - 4x_0 \cdot \frac{3}{4} + 10 \cdot \frac{9}{16} = 0 \quad | \cdot 8$$

$$16x_0^2 - 40x_0 + 45 - 60 + 24 = 0$$

$$16x_0^2 - 40x_0 + 9 = 0 \quad \checkmark$$

$$(x_0)_{1,2} = \frac{1}{32} (40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9}) = \frac{1}{32} (40 \pm 4\sqrt{100 - 36}) =$$

$$= \frac{1}{8} (10 \pm 8) = \begin{cases} \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Výsledek:

2 možné body doteku: $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \checkmark$ a $(x_0, y_0) = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right) \quad \checkmark$

$$x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3xy \frac{\partial u}{\partial y} + 8x^4 y^5 = 0$$

Použijem transformační vztahy druhého druhu ve tvaru

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Tato transformace je na množině $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ regulární, neboť pro její jacobíán platí

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{D}(\xi, \eta) \\ \mathcal{D}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x}.$$

Nyní budeme provádět samotnou transformaci. Zřejmě

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Podobně získáme také druhé derivace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Po dosazení získáme rovnici

$$-4xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 8y \frac{\partial u}{\partial \eta} + 8x^4 y^5 = 0,$$

kterou snadno upravíme do finálního tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{2}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} - 2\xi^3 = 0.$$

Jak je patrné, rovnice je snadno řešitelná substitucí

$$v(\xi, \eta) = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ta transformuje posledně uvedenou rovnici do tvaru

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi} v = 2\xi^3. \quad (1) = \frac{1}{\xi^2}$$

Jedná se fakticky o obyčejnou diferenciální rovnici (navíc lineární), řešitelnou metodou integračního faktoru, kterým je v tomto případě výraz ξ^{-2} . Vynásobíme-li rovnici (1) tímto faktorem získáme rovnici

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{2}{\xi^3} v = 2\xi,$$

respektive

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{\xi^2} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 + C).$$

Odtud pak snadno

$$v(\xi, \eta) = C(\eta) \xi^2 + \xi^4 \equiv \frac{\partial u}{\partial \eta} \Rightarrow u(\xi, \eta) = C(\eta) \xi^2 + \tilde{C}(\xi) + \eta \xi^4.$$

Uzavíráme tedy, že hledaným obecným řešením zadané rovnice jsou funkce tvaru

$$u(x, y) = C\left(\frac{y}{x}\right) x^2 y^2 + \tilde{C}(xy) + x^3 y^5,$$

3 (5 bodů)

Nechť je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4y}{\sqrt{4(x-3)^4 + y^2 + y(x-3)^2}} & \dots (x, y) \neq (3, 0), \\ 3 & \dots (x, y) = (3, 0), \end{cases}$$

5b

zřejmě
která není na $\mathbf{R}^2$ spojitá. Nalezněte alespoň dvě paraboly, vzhledem k nimž je tato funkce spojitá v bodě $(3, 0)$.

"hledaná" parabola musí procházet bodem $(3, 0)$

$$\Rightarrow y = a(x-3)^2 \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$P_a = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = a(x-3)^2\}$$

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (3, 0) \\ (x, y) \in P_a}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4a(x-3)^2}{\sqrt{4(x-3)^4 + a^2(x-3)^4 + a(x-3)^4}} =$$

symbol ✓

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4a}{\sqrt{4 + a^2 + a}} \stackrel{!}{=} f(3, 0) = 3$$

$\Rightarrow a$ musí být kladné!

$$16a^2 = 9(4 + a^2 + a)$$

$$7a^2 - 9a - 36 = 0$$

$$D = 9 \cdot 9 + 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4 = 9(9 + 16 \cdot 7) = 9(9 + 112) = 9 \cdot 121$$

$$\sqrt{D} = 3 \cdot 11 = 33$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{14} (9 \pm 33) = \begin{cases} \frac{42}{14} = 3 \\ -\frac{24}{14} = -\frac{12}{7} \end{cases} \quad \text{neplatné řešení!}$$

$a > 0$

dvě paraboly:

$$y = 3(x-3)^2$$

$$\cancel{y = -\frac{12}{7}(x-3)^2} \quad \text{neplatné řešení!}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 16u = 22$$

$$z^3 - 2z^2y - 4xyz + 8x^2y^2 = 0$$

$$z = z(x, y) \text{ \& } u = u(x, y) \quad \checkmark \quad \text{10}$$

Vypočítate $\text{div grad } z$ v bode $\vec{a} = (1, 1)$

~~$$\text{div grad } z = \text{div} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Delta z \Rightarrow \text{úloha má: } \Delta z(1, 1) = ?$$~~

Analýza úlohy:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{D(F, G)}{D(z, u)} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2z & 16 \\ 3z^2 - 4zy - 4xy & 0 \end{vmatrix} = -16(3z^2 - 4zy - 4xy) =: W(x, y, z, u)$$

$$z(\vec{a}) = ? \text{ \& } u(\vec{a}) = ? \text{ \& } \vec{a} = ?$$

$$z^2 + 16u = 20$$

$$z^3 - 2z^2 - 4z + 8 = 0 \Rightarrow z^2(z-2) - 4(z-2) = (z-2)(z^2-4) = (z-2)^2(z+2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{dvě možná řešení: } z=2, u=1, \vec{a} = (1, 1, 2, 1) \quad \checkmark$$

$$z=-2, u=1, \vec{a} = (1, 1, -2, 1) \quad \checkmark$$

Uveď některý z bodů $\vec{a}$, resp. $\vec{a}$ kritickým bodem?

$$W(\vec{a}) = -16(12 - 8 - 4) = 0 \Rightarrow \text{je kritický} \Rightarrow \text{s ním dále nepracujeme}$$

$$W(\vec{a}) = -16(12 + 8 - 4) = -16^2 \Rightarrow \text{ide o nekritický senenijní bod!}$$

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{-4yz + 16xy^2}{W \cdot 1/16} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(\vec{a}) = - \frac{8+16}{16} = - \frac{3}{2} \quad \checkmark \quad \& \quad \frac{\partial z}{\partial y}(\vec{a}) = - \frac{-2z^2 - 4xz + 16x^2y}{W \cdot 1/16} \Big|_{\vec{a}} = -1 \quad \checkmark$$

~~$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{(-4y \frac{\partial z}{\partial x} + 16xy^2) \cdot (3z^2 - 4yz - 4xy) - (-4yz + 16xy^2) \cdot (6z \frac{\partial z}{\partial x} - 4y \frac{\partial z}{\partial x})}{(3z^2 - 4yz - 4xy)^2}$$~~

~~$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\vec{a}) = - \frac{(4 \cdot \frac{3}{2} + 16) \cdot 16 - 16(12 - 8 + 4 - 4)}{16^2} = - \frac{12 \cdot 16 - 16 \cdot 20}{16^2} = - \frac{1}{2} \quad \checkmark$$~~

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{(-4z \frac{\partial z}{\partial y} - 4x \frac{\partial z}{\partial y} + 16x^2) \cdot (3z^2 - 4yz - 4xy) - (-2z^2 - 4xz + 16x^2y) \cdot (6z \frac{\partial z}{\partial y} - 4z - 4y \frac{\partial z}{\partial y} - 4x)}{(3z^2 - 4yz + 4xy)^2} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\vec{a}) = - \frac{(-8 + 4 + 16) \cdot 16 - 16(12 + 8 + 4 - 4)}{16^2} = - \frac{12 \cdot 16 - 16 \cdot 20}{16^2} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{div grad } z \Big|_{\vec{a}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \checkmark$$

86.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{1+x^2+y}$$

$$f(t) = (1+t)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{5}{3}\right) \dots \left(\frac{1}{3}-n+1\right) \frac{t^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3^n n!} (-1)^{n+1} t^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n-4)!!!}{(3n)!!!} (-1)^{n+1} t^n$$

$$\tilde{R}^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!!!}{(3n+3)!!!} \frac{(3n)!!!}{(3n-4)!!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-1)!}{3n+3} = 1 \Rightarrow \underline{R=1}$$

$$t = \pm 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{3n-1}{3n+3}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{4}{3n+3} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \pm 1 \in \mathcal{O}$$

$$\mathcal{O}_t = \langle -1, 1 \rangle$$

$$\mathcal{O} = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : |x^2+y| \leq 1\}$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x^2+y) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(3n-4)!!!}{(3n)!!!} (-1)^{n+1} \binom{n}{k} x^{2k} y^{n-k}$$

