Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze A

25. března 2022, 9:30–11:10

1 (10 bodů)
Pro funkci

$$h(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + 3y}$$

nalezněte Maclaurinovu řadu, obor konvergence a s její pomocí stanovte hodnotu

$$\frac{\partial^{20} h}{\partial x^{10} \partial y^{10}}(0, 0).$$

2 (8 bodů)
Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce

$$f(x, y, z) = x^3 yz$$

v bodě $(1, 2, -1)$.

3 (5 bodů)
Jaký útvar reprezentuje graf funkce

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b}}\,?$$

Načrtněte ho a pojmenujte!

4 (9 bodů)
Rozhodněte (a pečlivě zdůvodněte), má-li funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - x + 3 & \ldots \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 3 & \ldots \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

totální diferenciál v bodě $(0, 0)$.

5 (8 bodů)
Pro vektorovou funkci

$$\vec{G}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2;\ xyz;\ x + y + z)$$

nalezněte všechny body, které zároveň splňují tyto dvě vlastnosti:

- je v nich splněna rovnost $\left\|\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{G}(x, y, z)\right\| = 0$
- a jacobián vektorové funkce $\vec{G}(x, y, z)$ je v těchto bodech nulový.

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+3y} \qquad \frac{\partial^{20} f}{\partial x^{10} \partial y^{10}}(\vec{0}) = ?$$

10b

$n \ldots$ ~ $\binom{n}{k} = 0$ pro $n<k$ tak je to OK

$$f(t) = (1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^2+3y)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{n} \binom{n}{k} x^{2k} (3y)^{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \ldots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} x^{2k} 3^{n-k} y^{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{1}{2}\right)^n 3^{n-k} x^{2k} y^{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(3k)!!!\,(n-k)!} \left(\frac{3}{2}\right)^n x^{2k} y^{n-k}$$

úpravy

$$\underbrace{O = \{(x,y) : -1 \leq x^2+3y \leq 1\}}$$

Označme α_{lm} člen rozvoje ↑ stojící před výrazem $x^l y^m$

metoda mčení čísla β

Označme
$$\beta := \frac{\partial^{20} f}{\partial x^{10} \partial y^{10}}(\vec{0}).$$

dělení faktoriálem stupně diferenciálu

$$\frac{20!}{10!\,10!} \beta \cdot \frac{1}{20!} = \alpha_{10,10}$$

násobnost zkoumané derivace

$$l = 10 \wedge m = 10 \implies 2k = 10 \wedge n-k = 10 \implies k = 5 \wedge n = 15$$

$$\alpha_{10,10} = (-1)^{16} \frac{27!!}{15!!!\cdot 10!} \left(\frac{3}{2}\right)^{15}$$

$$15!!! = (3\cdot 5)!!! = 3^5 \cdot 5!$$

$$\implies \beta = 10!\,10! \frac{27!!}{15!!!\,10!} \left(\frac{3}{2}\right)^{15} = \left(\frac{3}{2}\right)^{15} \frac{27!!}{3^5 \cdot 5!} 10! =$$

$$= \frac{3^{10}}{2^{15}} \frac{27!!}{5!} 10!$$

Pozn. další často se objevující tvar výsledku: $\frac{3^{10} \cdot 27!! \cdot 10! \cdot 15!}{30!!\,5!}$

8 bodů

Řešení zápočtové písemné práce č. 1 z předmětu MAB 4 - varianta B

24. dubna 2003

[1.] (8 bodů)
Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce

$$f(x,y,z) = x^3yz$$

v bodě $A = (1, 2, -1)$.

mnoho z nich je nulových

Není obtížné ukázat, že všechny parciální derivace čtvrtého řádu až na níže uvedené (a jejich záměny) jsou nulové.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3} = 6z \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x^3} = 6y \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = 6x$$

ty nenulové

Odtud

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3}(A) = -6 \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x^3}(A) = 12 \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2}(A) = 6$$

vyčíslení

a následně:

$$d^4 f(A) = -24dx^3dy + 48dx^3dz + 72dx^2dydz,$$

neboť prvé dvě z uvedených derivací lze zaměnit (změnou pořadí derivování) čtyřmi způsoby a třetí dvanácti způsoby.

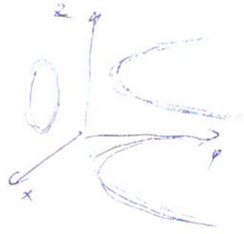
③ $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b}} = z$

$z^2 = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b}$ ✓

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} + z^2 - 1 = 0$

✓

8b



$z = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$y = b - \frac{bx^2}{a^2}$ - parabola (obrátená)

řezy ✓

$y = 0$

$\frac{x^2}{a^2} + z^2 - 1 = 0$

elipsa

$x = 0$

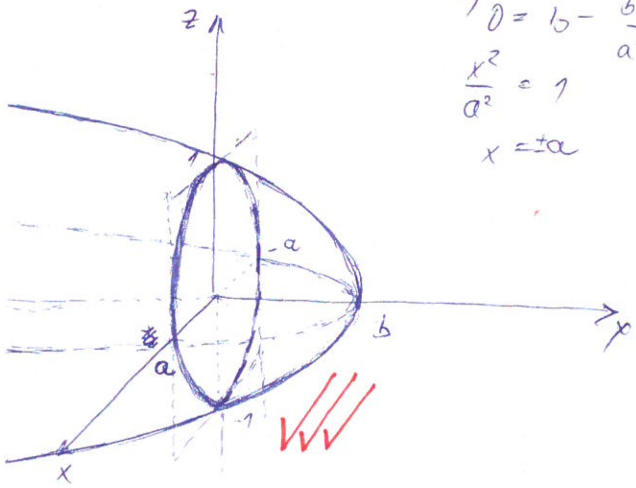
parabola (obrátená)

eliptický paraboloid ✓✓

$0 = b - \frac{bx^2}{a^2}$

$\frac{x^2}{a^2} = 1$

$x = \pm a$



✓✓✓

9b

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{g(\tau,0) - g(0,0)}{\tau} = \lim \frac{0-\tau+3-3}{\tau} = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{g(0,\tau) - g(0,0)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{3-3}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad} g(0,0) = (-1, 0)$$

kdyby TD existoval, musel by mít tvar: $dg_{(0,0)}(h_1, h_2) = -h_1$

zbytková funkce:

$$\eta(h_1, h_2) = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2} - h_1 + 3 - 3 + h_1 = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2+h_2^2}$$

Test, zda zbytková funkce dělená normou $\|\vec{h}\|$ konverguje k nule:

tvar

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\eta(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \dots \text{ neexistuje (viz } \circledast)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\vec{0} \\ y=\alpha x}} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^3}{(x^2+\alpha^2 x^2)^{3/2}} = \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{3/2}}$$

$\Downarrow$

limity vzhledem k různým množinám jsou různé $\Rightarrow$ limita bez přívlastku existovat nemůže $\circledast$

$\Rightarrow$ funkce $g(x,y)$ v nule T.D. nemá

8b

$$\operatorname{rot} \vec{G}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2+y^2+z^2 & xyz & x+y+z \end{vmatrix} = (1-xy, 2z-1, yz-2y)$$

$$\operatorname{rot}(1-xy; 2z-1; yz-2y) = \begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 1-xy & 2z-1 & yz-2y \end{vmatrix} =$$

$$= (-4+z; 0; x) \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \& \quad z = 4$$

$$\det\left(\frac{D\vec{G}}{D(x,y,z)}\right) = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,y,4)} = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 8 \\ 4y & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4y \begin{vmatrix} 2y & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4y(2y-8) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \right.$$

Všechna řešení:

$$\vec{a} = (0,0,4)$$
$$\vec{b} = (0,4,4)$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							CELKEM
Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová písemná práce č. 1 z předmětu 01ANB4/01MAB4 – verze B

25. března 2022, 9:30–11:10

1 (8 bodů)
Nechť je funkce $f(x,y)$ zadána předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} + 2x - 7y & \dots \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \dots \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nechť $\vec{s} = (1,2)$. Vypočtěte

$$\frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \vec{s} \,|\, \operatorname{grad} f(0,0) \rangle$$

a poté parciální derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě $(0,0)$. Diskutujte vztah obou vypočtených čísel. Vyvoďte relevantní závěry.

2 (8 bodů)
Pro vektorovou funkci $\vec{H}(x,y,z) = (x+z;\ 3xyz;\ 2x^2+y^2+z^2)$ nalezněte všechny body, které zároveň splňují tyto dva požadavky:

- je v nich splněna rovnost $\left\|\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H}(x,y,z)\right\| = 0$, kde $\|.\|$ je euklidovská norma;
- a jacobián vektorové funkce $\vec{H}(x,y,z)$ je v těchto bodech nulový.

3 (8 bodů)
Nalezněte posloupnost bodů ve dvoudimenzionálním definičním oboru funkce

$$g(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$$

takovou, která konverguje k bodu $(0,0)$ a limitou příslušných funkčních hodnot je číslo $-\frac{2}{5}$.

4 (8 bodů)
Nalezněte totální diferenciál čtvrtého řádu funkce $g(x,y,z) = xy^2z^3$ v bodě $(-1,2,1)$.

5 (8 bodů)
Sestavte Maclaurinovu řadu funkce

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+3y^2}}$$

a podrobným výpočtem určete její obor konvergence. Výsledek upravte do tvaru dvojné sumy s vícenásobnými faktoriály.

6.

8b

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + 2x - 7y & (x,y) \neq \vec{0} \\ 0 & (x,y) = \vec{0} \end{cases}$$

$\vec{s} = (1,2) \qquad \|\vec{s}\| = \sqrt{5}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0+h)\cdot 0}{h^2+0} + 2h - 0}{h} = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0(0+h)}{0+h^2} - 7h - 0}{h} = -7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{grad} f(\vec{0}) = (2,-7)$$

$$\frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle \operatorname{grad} f(\vec{0}) \,|\, \vec{s} \rangle = \frac{1}{\|\vec{s}\|} \langle (2,-7) \,|\, (1,2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2-14) = -\frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0) = \left| \vec{a} + h\vec{s} = (h,2h) \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 2h}{h^2+4h^2} + 2h - 14h + 0}{h} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{5} - 12h}{h} \qquad \underline{\text{neexistuje!!!}}$$

vzorec nelze užít $\Leftarrow$ TD zadané funkce v $(0,0)$ neexistuje

$$\operatorname{rot}\vec{H}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x+z & 3xyz & 2x^2+y^2+z^2 \end{vmatrix} = (2y-3xy;\ 1-4x;\ 3yz)$$

$$\operatorname{rot}(2y-3xy;\ 1-4x;\ 3yz) = \begin{vmatrix} \vec{\varepsilon}_1 & \vec{\varepsilon}_2 & \vec{\varepsilon}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2y-3xy & 1-4x & 3yz \end{vmatrix} =$$

$$= (3z;\ 0;\ -6+3x) \overset{!}{=} \vec{o}$$

$$\Downarrow$$

$$x=2 \ \&\ z=0$$

$$\det \frac{D\vec{H}}{D(x,y,z)}(2,y,z) = \left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3yz & 3xz & 3xy \\ 4x & 2y & 2z \end{vmatrix}\right|_{(2,y,0)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6y \\ 8 & 2y & 0 \end{vmatrix} = -6y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2y \end{vmatrix} = -12y^2 \overset{!}{=} 0$$

Jediné řešení:

$$\vec{a} = (2,0,0)$$

8b

$M_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha y^3\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\vec{0} \\ (x,y)\in M_\alpha}} g(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha y^3 \cdot y^3}{\alpha^2 y^6 + y^6} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} \overset{!}{=} -\frac{2}{5}$$

$$5\alpha = -2\alpha^2 - 2$$

$$2\alpha^2 + 5\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{4}(-5 \pm 3) = \left\langle \begin{array}{l} -1/2 \\ -2 \end{array} \right.$$

Hledaná posloupnost $((x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$:

- musí platit: $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$
- musí platit: $x_n = \alpha y_n$, kde $\alpha \in \{-\frac{1}{2}; -2\}$

třeba tedy: $\alpha = -2$

Odpověď:

$$\underline{(x_n, y_n) = \cancel{\left(-\frac{2}{n}; \frac{1}{n}\right)}} = \left(-\frac{2}{n^3}; \frac{1}{n}\right)$$

Kontrola:

$$g(x_n, y_n) = g\left(-\frac{2}{n^3}; \frac{1}{n}\right) = \frac{-\frac{2}{n^3}\cdot\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{n^6}+\frac{1}{n^6}} = -\frac{2}{5}$$

$(g(x_n, y_n))_{n=1}^{\infty} = \left(-\frac{2}{5}\right)_{n=1}^{\infty}$ ... tedy konstantní posloupnost

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = -\frac{2}{5}$$

kontrola výsledku limity

$xy^2z^3 \quad (-1,2,-1)$

8 b.

$\frac{\partial^4 f}{\partial z^3 \partial x} = 6y^2 \mid 24 \qquad \frac{4!}{3!} = 4$

$\frac{\partial^4 f}{\partial z^3 \partial y} = 6xy \cdot 2 \mid -24 \qquad \frac{4!}{3!} = 4$

$\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial x \partial y} = 6z \cdot 2y \mid 24 \qquad \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$

$\frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial y^2} = 6z \cdot 2x \mid \cancel{24}\ 12 \qquad \frac{4!}{2!2!} = 6$

$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y^2} = 2 \cdot 3 \cdot z^2 \mid 6 \qquad \frac{4!}{2!} = 12$

dozorci Oorlali

$d^4 f = 96 h_1 h_3^3 - 96 h_3^3 h_2 + 288 h_1 h_2 h_3^2 \; \overset{72}{\cancel{144}}\, h_2^2 h_2^2 + 72 h_1 h_2^2 h_3$

(nadie) ~~7/10~~

8b

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+3y^2}}$$

$$f(t) = (1+t)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} t^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} (-1)^n t^n = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^n$$

$$f(x,y) = (1+x+3y^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(x+3y^2) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (x+3y^2)^n =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sum_{k=0}^{n} 3^k y^{2k} x^{n-k} \binom{n}{k} =$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}y^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 3^k y^{2k} x^{n-k}$$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n \frac{2n+2-2n-1}{2n+2} = \frac{1}{2} \in (0,1)$$

$$O_t = (-1, 1\rangle$$

$$-1 < x + 3y^2 \leq 1 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x + 3y^2 \leq 1\}$$

$$x > -1 - 3y^2 \qquad x \leq 1 - 3y^2$$

6 bodů

```
g = x^2 z^3 y
Out[1]= x^2 y z^3

In[9]:= D[g, {x, 3}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[9]= 0

In[10]:= D[g, {y, 3}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[10]= 0

In[11]:= D[g, {z, 3}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[11]= 72

In[12]:= D[D[g, {x, 2}], {y, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[12]= -2

In[13]:= D[D[g, {x, 2}], {z, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[13]= 18

In[14]:= D[D[g, {y, 2}], {x, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[14]= 0

In[15]:= D[D[g, {y, 2}], {z, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[15]= 0

In[16]:= D[D[g, {z, 2}], {x, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[16]= -72

In[17]:= D[D[g, {z, 2}], {y, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[17]= -24

In[18]:= D[D[D[g, {y, 1}], {x, 1}], {z, 1}] /. {x → 2, y → 3, z → -1}
Out[18]= 12
```

„✓" postup

$$d^3 g_{(2,3,-1)}(\vec{h}) = 72\,dz^3 - 6\,dx^2 dy + 54\,dx^2 dz - 216\,dz^2 dx - 72\,dz^2 dy + 72\,dx\,dy\,dz$$

Integrable systems

and quantum symmetries **Prague**

9b

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2-4)^2} & x^2+y^2 \neq 4 \\ 4/9 & x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

Vypočtěte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,2)$ ve směru přímky $3x-4y+8=0$

$\Rightarrow$ normálový vektor: $\vec{n} = (3,-4)$

$\Rightarrow$ směrový vektor: $\vec{s} = (4,3)$ ✓ $\Leftarrow$ $\langle \vec{n} | \vec{s} \rangle = 12-12=0$!

$\|\vec{s}\| = \sqrt{16+9} = 5$ ✓

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0,2) = \frac{1}{5} \lim_{h\to 0} \frac{f\big((0,2)+h(4,3)\big) - f(0,2)}{h} = \frac{1}{5}\lim_{h\to 0} \frac{f(4h, 2+3h) - \frac{4}{9}}{h} =$$

není-li to OK $\Rightarrow$ konec opravování

$$= \frac{1}{5}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{16h^2(2+3h)^2}{(16h^2+4+12h+9h^2-4)^2} - \frac{4}{9}\right) = \frac{4}{5}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{4h^2(2+3h)^2}{h^2(25h+12)^2} - \frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{4}{5}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{4(2+3h)^2}{(25h+12)^2} - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{5}\lim_{h\to 0} \frac{36(2+3h)^2 - (25h+12)^2}{9h(25h+12)^2} =$$

✓ $\Leftarrow$ za nějaký správný mezivýpočet

$$= \frac{4}{45}\lim_{h\to 0}\frac{36\cdot 4 - 144 + 36\cdot 12h - 50\cdot 12h + O(h^2)}{h(25h+12)^2} = \frac{4}{45}\cdot\frac{36\cdot 12 - 50\cdot 12}{144} =$$

$$= \frac{4}{45}\cdot\frac{36-50}{12} = \frac{-14}{3\cdot 45} = \underline{-\frac{14}{135}} = -\frac{7}{54}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{14}{135}$$

6 bodů

```
In[55]:= Div[Curl[Curl[{x y^2 + x z^2, x^2 + y^2, y^4}, {x, y, z}], {x, y, z}], {x, y, z}]
Out[55]= 0

In[53]:= Curl[Curl[{x y^2 + x z^2, x^2 + y^2, y^4}, {x, y, z}], {x, y, z}]
Out[53]= {-4 x, -2 + 2 y, -12 y^2 + 2 z}

In[54]:= Curl[{x y^2 + x z^2, x^2 + y^2, y^4}, {x, y, z}]
Out[54]= {4 y^3, 2 x z, 2 x - 2 x y}
```

$$\|\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}(x,y,z)\| \overset{!}{=} 0$$

$$(-4x;\ -2+2y;\ -12y^2+2z) \overset{!}{=} \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$x=0$$

$$y=1$$

$$-12+2z=0 \Rightarrow z=6$$

$$\vec{a}=(0,1,6)$$

4b

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 6z^2}{(x^2+y^2)^2 + 2z^2} & (x,y,z) \neq \vec{0} \\ 3 & (x,y,z) = \vec{0} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{(0+h)^4 + 6\cdot 0}{(h^2+0)^2+0} - 3\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^4} - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{h} \ldots \text{neexistuje}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{6h^2}{2h^2} - 3\right] = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{0}{h^4} - 3\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{h} \quad \text{neexistuje}$$

$\Rightarrow$ existuje pouze třetí složka gradientu, tj. $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = 0$

$g(x,y) = xy \qquad \mathcal{D}om(g) = \{ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \}$

•) spojitá funkce definovaná na souvislé a navíc kompaktní (uzavřené & omezené) množině

$\Rightarrow$ Ran(g) bude kompaktní a souvislý interval $\Rightarrow$

$Ran(g) = \langle a, b \rangle$; jen zatím neznáme $a, b \in \mathbb{R}$

•) jistě ale $a = \min g$ & $b = \max g$

•) není těžké rozmyslet, že extrémy nastanou na hranici Dom(g), tj. na elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 3 \sqrt{1 - x^2/4}$

Definujeme:

$$h(x) := g(x; \pm 3\sqrt{1 - x^2/4}) = \pm 3x \sqrt{1 - x^2/4}$$

& hledejme maximum a minimum na $\mathcal{D}om(h) = \langle -2, 2 \rangle$

$$h'(x) = \pm 3 \sqrt{1 - x^2/4} \mp 3x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/4}} \overset{!}{=} 0$$

$$3 - 3\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$h(\sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 3 \quad \& \quad h(-\sqrt{2}) = -3$$

$$\Rightarrow \quad Ran(g) = \langle -3, 3 \rangle$$

$$f(x,y) = e^{5x}(1+2y)^{-1/3}$$

– tvar bez kombinačních čísel a s vícenásobnými faktoriály

~~8b~~ 9b

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 5^n e^{5x}(1+2y)^{-1/3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{5x}\left(-\frac{1}{3}\right)(1+2y)^{-4/3}\cdot 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{5x}\, 2^2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(1+2y)^{-7/3}$$

✓ za nějaké derivování!

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l} = 5^k e^{5x}\, 2^l (-1)^l \frac{1}{3^l}(3l-2)!!!\,(1+2y)^{-\frac{3l+1}{3}}$$

$$\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(0,0) = 5^k 2^l (-1)^l \frac{1}{3^l}(3l-2)!!! \qquad k\in\mathbb{N}_0,\ l\in\mathbb{N}$$

$$e^{5x}(1+2y)^{-1/3} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\binom{k+l}{k}\frac{1}{(k+l)!}(-1)^l 5^k\left(\frac{2}{3}\right)^l(3l-2)!!!\,x^k y^l}_{\text{✓ sestavení vzorce}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{5^k\cdot 2^l}{k!}\frac{(3l-2)!!!}{(3l)!!!}x^k y^l$$

$$f(t) = (1+2t)^{-1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}t^n$$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)!!!}{(3n+3)!!!}\cdot\frac{(3n)!!!}{(3n-2)!!!}\frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+3}\cdot 2 = 2$$

$$R = 1/2$$

krajní body: $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{3n+1}{3n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{3-1}{3n+3} = \frac{2}{3} \overset{?}{\in} (0,1)$

$$\Downarrow$$

$$O = \mathbb{R}\times\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle$$