

$$g(x) = \theta(x) \cdot \frac{1}{x} (e^{-ax} - e^{-bx})$$

o) $\text{Dom}(R) = R \dots$ definice Heavisideovy funkce říká, že pro $x=0$ je $\theta(x) \cdot \frac{1}{x} = 0$

o) $\text{Ran}(g) \subset \mathbb{R}_0^+ \dots e^{-ax} - e^{-bx} \geq 0 \Rightarrow \underline{a \leq b}$

o) $\text{supp}(g) = (0, +\infty) \dots$ splněno

o) $g(x) \in \mathcal{L}(R) \Rightarrow$ určitě musí být $a, b \geq 0$

- pokud by ale $a=b$, pak by $g(x)=0$ a určitě by nemohlo být splněna balancí vlastnost chvostu

- a co verze $0 = a < b$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-a e^{-ax} + b e^{-ax}) = b - a \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ v nule je skok konečné délky

$\Rightarrow$ integrabilita na $(-\infty, 0)$ triviální

o) integrabilita na $(0, x_0)$ splněna, neboť $g(x)$ je na $(0, x_0)$ ekvivalentní jisté spojitě funkci, která je na kompaktním $(0, x_0)$ jistě integrabilní $\Rightarrow g(x) \in \mathcal{L}(0, x_0)$

o) na $(x_0, +\infty)$: $\left| \frac{1}{x} (e^{-ax} - e^{-bx}) \right| \leq \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{e^{-ax} - e^{-bx}} \in \mathcal{L}(x_0, +\infty)$ pokud $0 < a < b$!

Přítí závěr pro volbu parametrů: $0 < a < b$

o) $g(x) \in \mathcal{PC}(R) \dots$ všechny potřebné dílčí výpočty už proběhly výše

o) balancí axiom

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{-ax} - e^{-bx}) - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[e^{-ax}(1 - e^{-(b-a)x})]}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{-ax}}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - e^{-(b-a)x})}{x} \stackrel{L}{=} -a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b-a)e^{-(b-a)x}}{1 - e^{-(b-a)x}} \\ &= -a + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{e^{(b-a)x} - 1} = -a \Rightarrow \text{int}(g) = a \end{aligned}$$

Je třeba upravit volbu parametrů:

$$\underline{0 < a < b}$$

$$\|g\| = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \stackrel{\Delta}{=} H(b) \quad \& \quad H(b=a) = 0$$

předpoklady ✓

$$\left| \frac{d}{db} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right) \right| = e^{-bx} \leq e^{-cx} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^+) \quad \dots \quad 0 < c < b$$

↳ integrabilní majoranta nezávislá na parametru

⇒ lze derivovat podle parametru:

$$\frac{dH}{db} = \int_0^{\infty} e^{-bx} dx = \left[-\frac{1}{b} e^{-bx} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{b}$$

$$H(b) = \ln b + C \quad \& \quad H(b=a) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = -\ln a$$

$$\Rightarrow \underline{\|g\| = \ln \frac{b}{a}} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \mu_1(g) &= \int_0^{+\infty} x \cdot g(x) dx = \int_0^{\infty} (e^{-ax} - e^{-bx}) dx = \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} + \frac{1}{b} e^{-bx} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \underline{\frac{b-a}{ab}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

✓ práce s hodnotou $a=0$
 ↗ bod nane

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{O}(x) \sqrt{x} e^{-\frac{\alpha^3}{x^2}} e^{-\lambda x} * \mathcal{O}(x) \sqrt{x} e^{-\frac{\beta^3}{x^2}} e^{-\lambda x} = \\
 &= \mathcal{O}(x) \int_0^x \sqrt{y} e^{-\frac{\alpha^3}{y^2}} e^{-\lambda y} \sqrt{x-y} e^{-\frac{\beta^3}{(x-y)^2}} e^{-\lambda(x-y)} dy = \\
 &= \mathcal{O}(x) e^{-\lambda x} \int_0^x \underbrace{\sqrt{y} \sqrt{x-y}}_{g(y)} \underbrace{e^{-\frac{\alpha^3}{y^2} - \frac{\beta^3}{(x-y)^2}}}_{h(y)} dy = (*)
 \end{aligned}$$

Vsuvka č. 1

$$h(y) = -\frac{\alpha^3}{y^2} - \frac{\beta^3}{(x-y)^2} \quad \& \quad \text{Dom}(h) = (0, x)$$

$$h(0_+) = -\infty \quad \& \quad h(x_-) = -\infty \quad \& \quad h(y) \in C^\infty(0, x)$$

$$h'(y) = 2 \frac{\alpha^3}{y^3} - 2 \frac{\beta^3}{(x-y)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\alpha^3 (x-y)^3 = \beta^3 y^3$$

$$\alpha x = (\alpha + \beta) y$$

$$y_0 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x$$

stacionární bod (vysvětlíte, proč je y_0 bodem maxima!!!)

$$\sup_{y \in (0, x)} h(y) = h\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x\right) = -\alpha^3 \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha^2} \frac{1}{x^2} - \beta^3 \frac{(\alpha + \beta)^2}{\beta^2} \frac{1}{x^2} = -\frac{(\alpha + \beta)^3}{x^2}$$

Vsuvka č. 2

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \sqrt{y} \sqrt{x-y} dy &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{y} \sqrt{x-y} dy \quad \left\| \begin{array}{l} y = x \sin^2(\varphi) \\ dy = 2x \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \end{array} \right. = 2x^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} x^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4\varphi)) d\varphi = \frac{x^2}{4} \left[\varphi + \frac{\sin(4\varphi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{1}{8} \pi x^2
 \end{aligned}$$

Závěr:

$$(*) = \mathcal{O}(x) e^{-\lambda x} e^{-\frac{(\alpha + \beta)^3}{x^2}} \cdot \frac{1}{8} \pi x^2$$

$$1. g(x) = ?$$

$$g(x) = \theta(x) \theta(N-x) \cdot A \cdot x$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_0^N A x dx = A \frac{N^2}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{N^2}$$

$$\underline{g(x) = \frac{2}{N^2} \theta(x) \theta(N-x) \cdot x}$$

$$2. P[X < L] = \int_{-\infty}^L g(x) dx = \int_0^L \frac{2}{N^2} \cdot x dx = \frac{1}{N^2} [x^2]_0^L = \frac{L^2}{N^2} \quad (0 \leq L \leq N)$$

$$P[X > L] = 1 - \frac{L^2}{N^2} \quad (0 \leq L \leq N)$$

$$3. P[\eta_L = k] = \binom{N}{k} \cdot P[X < L]^k \cdot P[X \geq L]^{N-k} =$$

$$= \binom{N}{k} \left(\frac{L^2}{N^2}\right)^k \left(1 - \frac{L^2}{N^2}\right)^{N-k} \Rightarrow \sum_{k=0}^N P[\eta_L = k] = 1$$

$$4. E(\eta_L) = \sum_{k=0}^N k \cdot \binom{N}{k} \left(\frac{L^2}{N^2}\right)^k \left(1 - \frac{L^2}{N^2}\right)^{N-k} = \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(k-1)!(N-k)!} \left(\frac{L^2}{N^2}\right)^k \left(1 - \frac{L^2}{N^2}\right)^{N-k} =$$

$$= \left\| i = k-1 \right\| = \frac{L^2}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{i!(N-1-i)!} \left(\frac{L^2}{N^2}\right)^i \left(1 - \frac{L^2}{N^2}\right)^{N-1-i} =$$

$$= \frac{L^2}{N} \left(\frac{L^2}{N^2} + 1 - \frac{L^2}{N^2} \right)^{N-1} = \frac{L^2}{N}$$