

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		12. ledna 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

1. Dokončete tvrzení a poté ho dokažte:

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} \quad \wedge \quad q(\vec{x}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \sigma(\mathbb{A}) : \underline{\hspace{2cm}}$$

Symbol $<$ představuje negativní definitnost.

2. Dokažte, že každá Cauchyova úloha pro lineární diferenciální rovnici má řešení. Pro důkaz již předpokládejte, že máte k dispozici fundamentální systém dané rovnice. V rámci důkazu vyslovte definici Cauchyovy úlohy.

3. Je zobrazení

$$\rho(\vec{a}, \vec{b}) = |a_1 - 2b_1| + |a_2 - 2b_2|$$

metrikou v \mathbf{R}^2 ?

4. Kdy řekneme, že kvadratická plocha $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{x} - 2\vec{b}^T \vec{x} + c$ je regulární?

5. Proč není předpis

$$\int_0^4 x f(x) g(x) \, dx$$

skalárním součinem na prostoru všech (tedy i nespojitých) funkcí definovaných alespoň na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$?

6. Minimalistickým zápisem (pouze za pomoci symbolů beze slov) přepište následující výrok:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad n > n_0, p \in \mathbf{N}, x \in \langle -\pi, \pi \rangle \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^p \frac{\sin(nx + kx)}{(n+k)^2} \right| < \varepsilon.$$

7. Jaké tvrzení se skrývá za označením Věta o superpozici?

8. Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a jeho aplikaci demonstруйте na řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$$

a množině $A = \langle 0, +\infty \rangle$


9. Najděte funkci, pro níž

$$g^{(k)}(0) = (2k + 2)!!, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

nebo alespoň naznačte postup, jak hledanou funkci najít.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		19. ledna 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

- Vyslovte a dokažte základní větu o stejnoměrné konvergenci mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. V důkaze neopomeňte, že koeficienty a_n mohou být i záporná čísla.
- Dokažte jedno vámi vybrané tvrzení. Bud'

$$f_n(x) \xrightarrow{\langle a,b \rangle} f(x) \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\Omega} f(x),$$

nebo

$$f_n(x) \xrightarrow{\Omega} f(x) \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{\langle a,b \rangle} f(x).$$

Na závěr ještě doplňte, co představuje symbol Ω , tj. o konvergenci na jaké množině/prostoru se jedná.

- Předved'te aplikaci metody variace konstant na řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

- Nalezněte střed kvadriky

$$-4xy + 4xz + 4x + 4y^2 - 4yz + 4y + z^2 - 12z - 5 = 0.$$

- Co je jádrem operátoru $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 9$?

- Jaký je integrační faktor rovnice

$$xy' + (3 - x)y = x^4 \quad ?$$

Jeho tvar maximálně zjednodušte!

- Co je součtovou funkcí řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ a jaký je její definiční obor?

- Vykreslete okolí bodu $(0,0)$ o poloměru $\varepsilon = 2$ při metrice


$$\varrho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}.$$

Nalezněte alespoň jeden hraniční bod okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(0,0)$ z oběma celočíselnými a nenulovými souřadnicemi. Při náčrtu obrázku dobře uvažte, zda je uvedené okolí konvexní nebo konkávní množinou.

- Vyslovte definici hraničního bodu v metrickém prostoru $\{E, \varrho\}$.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		25. ledna 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

- Vyslovte a dokažte větu o tvaru formálního řešení exaktní diferenciální rovnice. Tuto rovnici také správně definujte.
- Dokažte větu o záměně integrálu a limity pro funkční posloupnosti. Znění věty precizně zformulujte!
- Krok za krokem sestavte Maclaurinovu řadu funkce $g(x) = e^{-ax}$ ($a > 0$). Nevyužívejte žádných známých rozvoji. Užijte pouze definice Taylorovy řady a věty o koeficientech Taylorovy řady. Jaký je obor konvergence nalezené řady?
- V Hilbertově prostoru funkcí $\mathcal{H} = [1, x^2]_{\lambda}$ nalezněte alespoň jednu nenulovou funkci kolmou k funkci $y(x) = x^2$.
- Doplňte tvrzení tak, aby bylo pravdivé

$$x^2 e^{-3x} \in \Omega_0 \wedge \text{operátor } \hat{L} \text{ je } \underline{\hspace{10em}} \Rightarrow x e^{-3x} \in \Omega_0.$$

- Je dán metrický prostor $\{\mathbf{R}^r, \varrho\}$ s metrikou generovanou pomocí normy a v něm množina $D \subset \mathbf{R}^r$ a bod $\vec{a} \in \mathbf{R}^r$. Jakou vlastnost bodu \vec{a} popisuje následující výrok?

$$(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^r) : \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \vec{x} \in D.$$

- Co je Schwarzova-Cauchyova-Buňakovského nerovnost?
- Podle definice ukažte, že čtyřdimenzionální kvadratická forma

$$q(\vec{x}) = -4x_1^2 - x_3^2 - 9x_4^2$$

je negativně semidefinitní.


- Rozhodněte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

splňuje nutnou podmínku stejnoměrné konvergence na množině $A = (0, 1)$.

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		2. února 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

- Vyslovte a dokažte Schwarzovu-Cauchyovu-Buňakovského nerovnost.
- Vyslovte a dokažte větu o středu kvadriky. V rámci důkazu také vyslovte definici středu, aby bylo jasné, z čeho důkaz vychází.
- Nechť $\epsilon = 1/5$. Leží funkce x v ϵ -okolí funkce x^2 ? Uvažujte Hilbertův prostor funkcí $\mathcal{H} = [1, x, x^2]_{\lambda}$ se skalárním součinem $\int_0^1 f(x)g(x) dx$.
- Je diferenciální rovnice

$$y'(xy^2 + x^2y) = \sqrt{x^6 + y^6}$$

homogenní? Rozhodněte podle definice a svoje rozhodnutí zdůvodněte.

- Jednoduchým způsobem ukažte, že řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(4n)!!}$$

nekonverguje na $(0, +\infty)$ stejnoměrně.

- Krok za krokem sestavte Taylorovu řadu funkce $g(x) = \ln(1 + 2x)$ se středem v bodě $x_0 = 1$. Nevyužívejte žádných známých rozvojit. Užijte pouze definice Taylorovy řady a věty o koeficientech Taylorovy řady. Jaký je obor konvergence nalezené řady?
- Pro rovnici $y''' + 6y'' + 9y' = 27$ určete, co je Ω_0 , Ω_q , a co je fundamentální systém.
- Za jakých podmínek lze ve výrazu


$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)'$$

zaměnit pořadí operací? A na jaké množině se tak může stát?

- Kdy řekneme, že je posloupnost cauchyovská? A na jakém typu prostoru se tento pojem zavádí?

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		10. února 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

- Vyslovte a dokažte větu o normě generované skalárním součinem.
- Dokažte větu o tvaru partikulárního řešení diferenciální rovnice s konstantními koeficienty s pravou stranou rovnou výrazu $P(x)e^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom. V důkaze využijte platnosti analogické věty, v níž je pravou stranou pouze polynom. Tuto druhou větu nedokazujte.
- Určete obě signatury 4-dimenzionální kvadriky $x^2 - 2xy - 4yz - w^2 = -1$.
- Zapište, jaká vlastnost se skrývá pod pojmem spojitost skalárního součinu.
- Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ má poloměr konvergence $R = 12$. Jaký poloměr konvergence má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} x^n?$$

- Jaký tvar má Bernoulliho diferenciální rovnice? A jak se řeší? Ukažte podrobný návod.
- Ukažte, že v Hilbertově prostoru funkcí lze na základě známých hodnot $\langle f|f \rangle$, $\langle g|g \rangle$, a $\langle f|g \rangle$ jednoznačně určit vzdálenost funkcí $f(x)$ a $g(x)$. Tuto vzdálenost vypočítejte pro hodnoty

$$\langle f|f \rangle = 1, \quad \langle g|g \rangle = 3, \quad \langle f|g \rangle = -1 + 2i.$$

- Minimalistickým zápisem (pouze za pomoci symbolů beze slov) přepište následující výrok:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : \quad p > n_0, x \in \langle -13, 13 \rangle \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^p h_k(x) - x e^{-x} \right| < \varepsilon.$$

- Vyslovte Weierstrassovo kritérium pro funkční řady a vysvětlete, zda lze pomocí něj rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \text{na intervalu } \langle 0, 2 \rangle.$$

Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		18. února 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

1. Vyslovte podmínky pro záměnu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) dx$$

a své tvrzení dokažte.

2. Vyslovte a dokažte větu o integračním faktoru. Z výsledného řešení odvoďte, co je fundamentálním systémem zkoumané rovnice.
3. Jak zní definice kompaktní množiny?
4. Určete obě signatury 4-dimenzionální kvadriky $Q(x, y, z, w) = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2w = 0$.
5. Pokud mají výroky

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \hat{m}) : \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) - x^2 \right| < \varepsilon.$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \ell > 0)(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \hat{\ell}) : |g_n(x) - ?| < \varepsilon.$$

platit současně, co se nutně musí skrývat místo otazníku a proč?

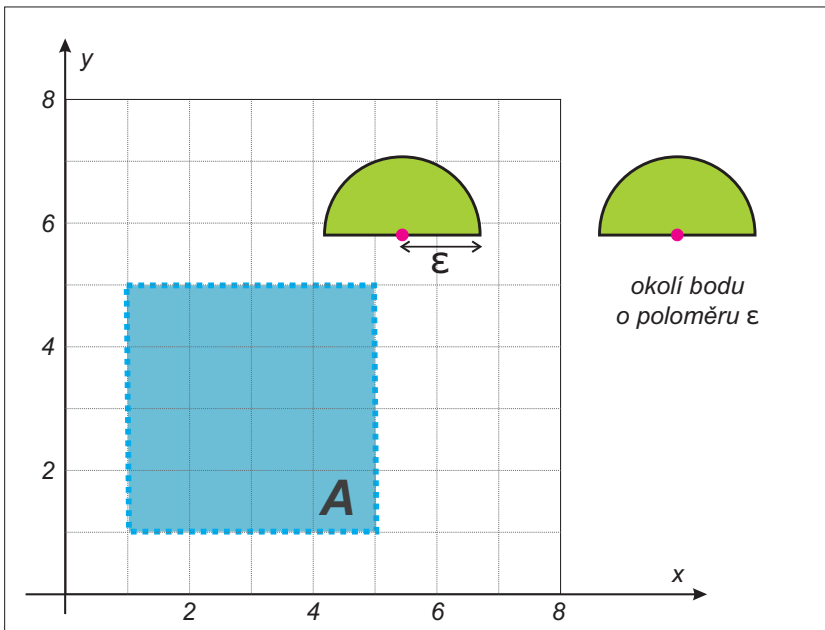
6. Vyslovte a dokažte větu o principu superpozice.
7. Určete vektorové spektrum kvadratické formy

$$q(x, y, z, w) = x^2 + 4xy + y^2 - 2z^2 + 2w^2.$$

8. Definujte Taylorův vzorec, Taylorův polynom a Lagrangeův zbytek. Co musí splňovat Lagrangeův zbytek, chceme-li aby daná funkce byla analytická?
9. V metrickém prostoru $\{\mathbf{R}^2, \rho\}$ je dána množina

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x - 3| < 2 \wedge |y - 3| < 2\}$$

(viz obrázek na zadní straně zadání). Okolí vybraného bodu (o poloměru ε) má tvar polokruhu z obrázku o polomětu ε . Určete (a do obrázku vyznačte), zda má množina A nějaké hraniční body. Vyslovte také definici pojmu hraniční bod, aby bylo zřejmé, že uvedený pojem správně chápete.



Rozstřel zkoušky z předmětu 01MAB3

(akademický školní rok 2020/2021)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení rozstřelu	Datum a čas testu
		25. března 2021, 9:30 – 11:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň šest z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2. Řešení úloh č. 1 a 2 budete odevzdávat s předstihem v 10:15.

1. Dokažte, že předpis

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x) dx$$

zadává na prostoru spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b \rangle$ skalární součin. Jaké předpoklady je nutno klást na váhu $w(x)$? Z důkazu by mělo být jasné, proč by pro nespojitě funkce nefungoval.

2. Vyslovte a dokažte větu o podprostoru

$$[e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \dots, x^{k-2}e^{ax}, x^{k-1}e^{ax}]_\lambda \subset \subset \Omega_0.$$

Předpokládejte, že věta o podprostoru $[1, x, x^2, \dots, x^{k-2}, x^{k-1}]_\lambda$ je již dokázána. Jakého typu musí být zkoumaná rovnice?

3. V metrickém prostoru \mathbf{R}^3 je zadána metrika

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2 + 9(x_3 - y_3)^2}.$$

Jakého tvaru je okolí bodu $(0, 0, 0)$ o poloměru $\varepsilon = 6$? Tvar co nejpřesněji pojmenujte!

4. Za jakých podmínek lze ve výrazu

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

zaměnit pořadí operací?

5. Nechť je dána množina $G \subset \mathbf{R}^r$. Co představuje množina

$$\{\vec{x} \in \mathbf{R}^r : \forall \varepsilon > 0 \text{ platí, že } \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}) \cap G \neq \emptyset \wedge \mathcal{U}_\varepsilon(\vec{x}) \setminus G \neq \emptyset\}?$$

6. Nalezněte jádro operátoru $\hat{L} = \frac{d^3}{dx^3} - 4\frac{d^2}{dx^2} + 13\frac{d}{dx}$.

7. Krok za krokem sestavte Maclaurinovu řadu funkce $g(x) = \text{arctg}(ax)$, kde $a > 0$. Nevyužívejte žádných známých rozvoů. Užijte pouze definice Taylorovy řady a věty o koeficientech Taylorovy řady. Jaký je obor konvergence nalezené řady?

8. Co musejí splňovat koeficienty $a, b, c, r, s, t \in \mathbf{R}$, aby diferenciální rovnice

$$y'(ax^2 + bxy + cy^2) = rx^2 + sxy + ty^2$$

byla exaktní?

9. Jaký je střed kuželosečky $x^2 - 6xy + 2x + 8y^2 - 12y - 9 = 0$?