Rozstřel č. 1 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
		16. června 2020, 11:30 – 12:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

1 Vyslovte a dokažte větu o obrazu souvislé množiny.

2 Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících tvrzení jsou platná:

- a) $x \in \mathscr{L}(\mathbf{R})$;
- b) $x \in \mathscr{L}^\star(\mathbf{R})$;
- c) $x \notin \mathscr{L}(\mathbf{R})$;
- d) $x \notin \mathscr{L}^\star(\mathbf{R})$.

3 **Výrok:** *Nechť $\vec{a}$ je stacionárním bodem funkce $g(x, y, z, v)$. Označme $\mathbb{H}$ Hessovu matici této funkce v bodě $\vec{a}$. Je-li ...., pak má funkce $g(x, y, z, v)$ v bodě $\vec{a}$ lokální extrém.*

Které z níže uvedených tvrzení lze doplnit do výroku tak, aby tento výrok byl pravdivý?

- a) $\det(\mathbb{H}) > 0$;
- b) $\sigma(\mathbb{H}) = \{-1, 2, -3, 4\}$, kde σ značí spektrum;
- c) $-1, -2, -3 \in \sigma(\mathbb{H})$;
- d) $\sigma(\mathbb{H}) = \{-1\}$;
- e) $\det(\mathbb{H}) = 0$;
- f) $\sigma(\mathbb{H}) = \{0, 1, 2, 3\}$.

Mezi návrhy nemusí být žádné řešení správné. Správných odpovědí může ale být i více.

4 Jaký poznatek o funkci $g(\vec{x})$ lze vyvodit z následujícího sdělení? Doplňte ho na místo otazníku.

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{s}}(\vec{a}) = 3 \quad \wedge \quad \frac{1}{\|\vec{s}\|}\langle \vec{s} | \mathrm{grad} g(\vec{a})\rangle = 4 \quad \Rightarrow \quad ?$$

5 Ukažte, že míra $F(X) : \mathscr{H}_1 \mapsto \mathbf{R}$ zavedená vytvořující funkcí $\varphi(x) = \Theta(x)\mathrm{e}^x$ není úplná.

6 Zapište tvar Hessovy matice funkce $z = z(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 2)$, v němž má tato funkce funkční hodnotu rovnou nule. Funkce $z = z(x, y)$ nechť je zadána implicitně rovnicí

$$y^2 + xz - z^3 = 4.$$

7 Podle definice rozhodněte, zda je elipsa

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

hladkou regulární křivkou.

8 Vyslovte definici limity funkce vzhledem k množině. Zápis modifikujte tak, aby v něm namísto pojmu okolí vystupoval pojem norma.

Rozstřel č. 2 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
✍		22. června 2020, 11:30 – 12:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

❶ Vyslovte a dokažte větu o aditivitě Riemannova integrálu v mezích. V důkaze vyznačte místo, které by pozbylo platnosti, kdyby nebyl splněn hlavní předpoklad věty (předpoklad o množinách).

❷ Vyslovte definici regulárního zobrazení a poté ukažte, zda je zobrazení $\vec{G}(x,y) = (xy; y/x)$ regulární na množině $(0,+\infty) \times (0,+\infty)$.

❸ Z generující rovnice $H(x,y,z) = 0$ sestavte obecný předpis pro druhou derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ implicitní funkce $z = z(x,y)$, která je uvedenou generující rovnicí zadána. Uvažujte nekritický generující bod (x_0, y_0, z_0).

❹ Ověřte, zda jsou pro funkci $\vec{G}(x,y) = (xy; y/x)$ a křivku z obrázku splněny předpoklady Greenovy věty. U každé vlastnosti napište definici a poté prokažte/vyvraťte její splnění.

❺ Rozhodněte a zdůvodněte, která z následujících funkcí patří do třídy $\mathcal{Z}_\lambda$, tj. do základního systému funkcí pro 1. konstrukční krok lebesgueovských integrací. Uvažujte klasickou míru.

- $a(x) = \Theta(x)\, x^2$;
- $b(x) = \Theta(x)$;
- $c(x) = \Theta(x)\, \lfloor x \rfloor$, kde $\lfloor \cdot \rfloor$ je dolní celá část;
- $d(x) = \Theta(x)\, \Theta(10 - x)\, \lfloor x \rfloor$.

Mezi návrhy nemusí být žádné řešení správné. Správných odpovědí může ale být i více.

❻ Vyslovte definici měřitelné funkce a na příkladu funkce $g(x) = x$ vysvětlete jednotlivé pojmy/symboly, které v definici vystupují.

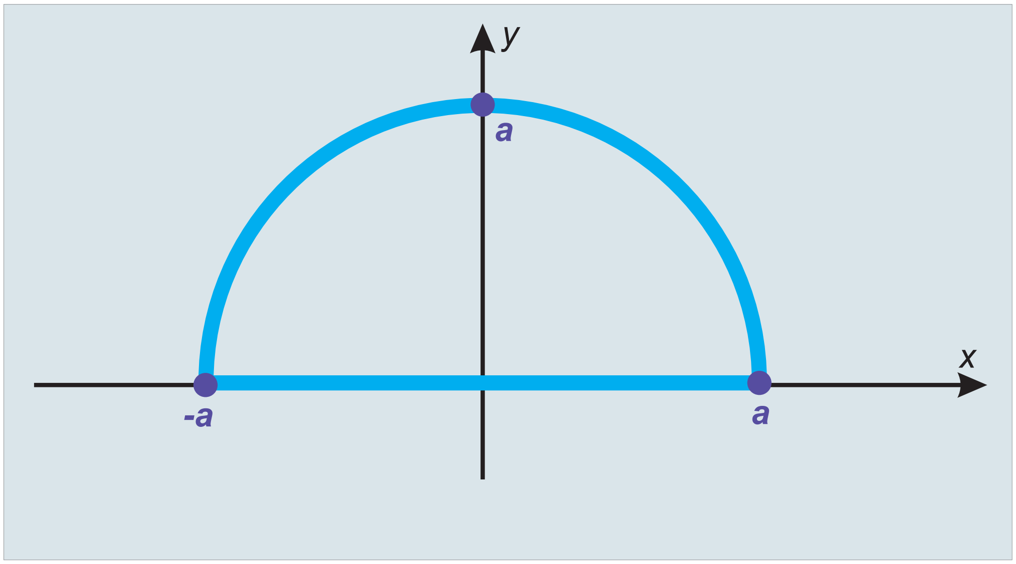
❼ **Výrok:** *Nechť $\vec{a}$ je stacionárním bodem funkce $g(x,y,z,v)$. Označme $\mathbb{H}$ Hessovu matici této funkce v bodě $\vec{a}$. Je-li ...., pak má funkce $g(x,y,z,v)$ v bodě $\vec{a}$ sedlový bod.*

Které z níže uvedených tvrzení lze doplnit do výroku tak, aby tento výrok byl pravdivý?

- a) $\sigma(\mathbb{H}) = \{-1, 2, -3, 4\}$, kde σ značí spektrum;
- b) $\det(\mathbb{H}) = -1$;
- c) $-1, -2, -3 \in \sigma(\mathbb{H})$;
- d) $1, 2, 3 \in \sigma(\mathbb{H})$;
- e) $1, -2, 3 \in \sigma(\mathbb{H})$;
- f) $\sigma(\mathbb{H}) = \{0, -1, -2, -3\}$.

Mezi návrhy nemusí být žádné řešení správné. Správných odpovědí může ale být i více.

❽ Vyslovte větu o separabilitě Lebesgueova integrálu. Neopomeňte žádný z předpokladů.



Obrázek k příkladu č. 4

Rozstřel č. 3 zkoušky z předmětu 01MAB4
(akademický školní rok 2019/2020)

Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
		30. června 2020, 11:30 – 12:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

❶ Dokažte: Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivaci, která je na tomto okolí spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

❷ Zapište plošnou parametrizaci eliptického válce

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \wedge \left|\frac{z}{c}\right| < 1\right\}$$

a ukažte, že E je hladkou regulární plochou.

❸ Vyslovte definici spojitosti funkce v bodě. Zápis modifikujte tak, aby v něm namísto pojmu okolí vystupoval pojem norma.

❹ Zapište Fubiniovu větu pro Lebesgueův integrál a pro funkci $f(\vec{x}, \vec{y}) : \mathbf{E}^{r+s} \mapsto \mathbf{R}$.

❺ Prověřte předpoklady věty o derivaci integrálu s parametrem pro případ integrálu

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-4x^2} \cos(\alpha x)\, \mathrm{d}x.$$

❻ Do soustavy $\{\emptyset; \{\blacklozenge\}; \{\bigstar\}; \{\blacksquare, \bigstar, \bullet, \blacklozenge\}\}$ doplňte jedinou množinu tak, aby tato soustava byla polookruhem. Poté vysvětlete, proč takto vzniklá soustava není okruhem.

❼ Funkce $g_n(x) = \Theta(x)\Theta(n - x)$ pro $n \in \mathbf{N}$ patří do $\mathscr{Z}_\mu$. Určete limitní funkci $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ a vypočítejte integrál $(\mathscr{L}) \int_{\mathbf{R}} g(x)\, \mathrm{d}x$, víte-li, že

$$(\mathscr{L}) \int_{\mathbf{R}} \Theta(x)\Theta(n - x)\, \mathrm{d}x = \frac{2n^2}{7n^2 + 3}.$$

O jakou definici se váš výpočet opírá?

❽ Je dána funkce $f(x, y) = x^4 + 3y^2 - 5$.

- Určete stacionární bod $\vec{a}$ funkce $f(x, y)$ a vyčíslete v něm Hessovu matici.
- Určete typ definitnosti této matice.
- Rozhodněte, zda lze na základě této znalosti (definitnosti) určit typ extému v $\vec{a}$.
- Má nebo nemá funkce $f(x, y)$ v $\vec{a}$ extrém?

Rozstřel č. 4 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
✍		**8. července 2020, 11:30 – 12:45**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol

Vyberte 6 úloh a správně je vyřešte. Mezi vybranými musejí být úlohy č. 1 a 2. V záhlaví výrazně přeškrtněte políčka těch úloh, které nemají být opravovány.

❶ Vyslovte korektní znění Lebesgueovy věty a ukažte, jak ji lze aplikovat při vyčíslení limity

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{3}{nx}}\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

❷ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❸ Na jaké z množin

- a) $G=\mathbf{R}^2$;
- b) $G=(2,3)\times(2,3)$;
- c) $G=(1,+\infty)\times\mathbf{R}$;
- d) $G=\mathbf{R}\times(1,+\infty)$;

je vektorová funkce $\vec{g}(x,y)=(xy;y/x)$ třídy $C^1(G)$? Mezi návrhy nemusí být žádné řešení správné. Správných odpovědí může ale být i více.

❹ Nechť je dána míra $\mu_\sigma(X):\mathscr{S}_r\mapsto\mathbf{R}^\star$. Vyslovte definici k ní příslušné vnější míry. Proč je hodnota této vnější míry pro množiny z $\mathscr{S}_r$ totožná s hodnotou $\mu_\sigma(X)$?

❺ Vyslovte definici pojmu totální diferenciál funkce více proměnných.

❻ Vyslovte větu s vztahu spojitosti a spojitosti vzhledem k množině a na příkladě funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

ukažte, jak ji lze použít v praktických příkladech.

❼ Nechť je dán bod $\vec{\lambda}=(a,b,c)$ a generující funkce $H(x,y,z)$, pro níž platí, že $\operatorname{grad}H(\vec{\lambda})=(4,2,1)$ a Hessova matice $\mathbb{H}_{\vec{\lambda}}$ má všechny prvky rovné číslu 3. Rovnice $H(x,y,z)=0$ nechť zadává implicitní funkci $y=y(x,z)$. Jakou hodnotu má

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}(a,b)?$$

❽ Zapište definici plošné parametrizace a poté ji použijte na sestavení parametrizace eliptického kužele

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\wedge\frac{|z|}{c}<7\right\}.$$

Rozstřel č. 5 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
		30. července 2020, 11:30 – 12:45

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně. Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2

❶ Popište celý postup konstrukce Lebesgueovy míry. Požaduje se detailní zavedení doprovázené formálně korektními zápisy. Důkazy dílčích tvrzení se nepožadují.

❷ Vyslovte a dokažte větu o separabilitě Lebesgueova integrálu.

❸ Jakou míru má nosič funkce $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\Theta(x-1)$, je-li vytvořující funkcí

$$\varphi(x) = \frac{3x|x|}{x^2+4}?$$

❹ Pro funkci $f(x,y)$ dvou proměnných odvoďte (na základě rekurentní definice) tvar druhého diferenciálu. Poté ukažte, že tento druhý diferenciál lze reformátovat do tvaru kvadratické formy. Tento tvar zapište také maticově. Jakou vlastnost ale musíte po funkci $f(x,y)$ požadovat?

❺ Vyslovte precizní definici pojmu $\mu-$*ekvivalentní funkce*. Jsou funkce $f(x) = x$ a $g(x) = |x|$ $\mu-$ekvivalentní? Uvažujte Lebesgueovu míru zavedenou prostřednictvím vytvořující funkce $\varphi(x) = \Theta(x)x^2$.

❻ Jak je definována délka křivky? Definici aplikujte na výpočet obvodu kružnice o poloměru R.

❼ Pro generující funkci $H(x,y,z) = x^2 + 3yz + 3xz + y^4 - 2$ najděte alespoň jeden generující bod, který je kritický pro implicitní funkci $z = z(x,y)$.

❽ Nechť $\vec{g}(x,y,z) = (xy + yz + xz; x^2 + y^2 + z^2; xyz)$. Vypočítejte $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{g}$.

❾ Vyslovte definici limity funkce více proměnných. Zápis modifikujte tak, aby v něm namísto pojmu okolí vystupoval pojem norma.

Rozstřel č. 6 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
		12. srpna 2020, 11:30 – 13:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně. Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2

❶ Vyslovte a dokažte větu o vzorci pro výpočet směrové parciální derivace.

❷ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❸ Ukažte, že zobrazení $(r,s) = (x^2 - y^2; xy)$ je regulární na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0]\}$, ale není prosté.

❹ Nechť je dán bod $\vec{\lambda} = (a,b,c)$ a generující funkce $H(x,y,z)$, pro níž platí, že $\mathrm{grad} H(\vec{\lambda}) = (-6,4,2)$ a Hessova matice $\mathbb{H}(\vec{\lambda})$ má všechny prvky rovné číslu 5. Rovnice $H(x,y,z) = 0$ nechť zadává implicitní funkci $z = z(x,y)$. Jakou hodnotu má

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(a,b)?$$

❺ Vyslovte axiomy míry.

❻ Definujte Heavisideovu funkci a rozhodněte, zda patří do $\mathscr{L}^\star(\mathbf{R})$, popř. $\mathscr{L}(\mathbf{R})$. Pokuste se své tvrzení dokázat pomocí druhého konstrukčního kroku lebesgueovských integrací. Uvažujte klasickou míru.

❼ Následující dva výroky přepište do jednoduchých tvarů.

$$\left(\lim_{a\to 0} \frac{f(a,0,3) - f(0,0,3)}{a}; \lim_{a\to 0} \frac{f(0,a,3) - f(0,0,3)}{a}; \lim_{a\to 0} \frac{f(0,0,a+3) - f(0,0,3)}{a}\right) = (6,7,8)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): \quad 0 < \|\vec{x} - (3,2,1)\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - 9| < \varepsilon.$$

❽ Pro Lebesgueův integrál vyslovte větu o spočetné aditivitě v mezích.

❾ Zapište definici plošné parametrizace a poté ji použijte na sestavení parametrizace jednodílného eliptického hyperboloidu

$$H_E = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Rozstřel č. 6 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
✍		**24. srpna 2020, 11:30 – 13:00**

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně. Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1 a 2

❶ Dokažte: Nechť funkce $f(\vec{x}) : \mathbf{E}^r \mapsto \mathbf{R}$ má na jistém okolí bodu $\vec{a} \in \mathbf{E}^r$ derivaci, která je na tomto okolí spojitá. Pak má v bodě $\vec{a}$ totální diferenciál.

❷ Vyslovte a dokažte větu o derivaci integrálu s parametrem.

❸ Ukažte, že zobrazení $(r,s) = (x^2 - y^2; xy)$ je regulární na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0]\}$, ale není prosté. Neopomeňte, že definice regulárního zobrazení má více bodů.

❹ Nechť je dán bod $\vec{\lambda} = (a,b,c)$ a generující funkce $H(x,y,z)$, pro níž platí, že $\mathrm{grad} H(\vec{\lambda}) = (-6,4,2)$ a Hessova matice $\mathbb{H}(\vec{\lambda})$ má všechny prvky rovné číslu 5. Rovnice $H(x,y,z) = 0$ nechť zadává implicitní funkci $z = z(x,y)$. Jakou hodnotu má

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(a,b)?$$

❺ Vyslovte axiomy míry.

❻ Vyslovte definici Taylorovy řady funkce více proměnných. Čemu se rovnají příslušné Taylorovy koeficienty?

❼ Následující dva výroky přepište do jednoduchých (a minimalistických) tvarů.

$$\lim_{a \to 0} \frac{f(1+2a, 2-a, 3+2a) - f(1,2,3)}{a} = 21$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): \quad 0 < \|\vec{x} - (3,2,1)\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - 9| < \varepsilon.$$

❽ Pro Lebesgueův integrál vyslovte Fubiniovu větu.

❾ Zapište definici plošné parametrizace a poté ji použijte na sestavení parametrizace jednodílného eliptického hyperboloidu

$$H_E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Neopomeňte specifikovat dimenzi definičního oboru a oboru hodnot plošné parametrizace.

Rozstřel č. 7 zkoušky z předmětu 01MAB4 (akademický školní rok 2019/2020)		
Jméno a příjmení studenta	Hodnocení	Datum a čas testu
✍		2. září 2020, 11:30 – 13:00

1. úkol	2. úkol	3. úkol	4. úkol	5. úkol	6. úkol	7. úkol	8. úkol	9. úkol

Vyřešte všechny úlohy. Alespoň sedm z nich by mělo být vyřešeno správně (nebo víceméně správně). Mezi správně vyřešenými úlohami musejí být úlohy č. 1, 2 a 3.

❶ Vyslovte nutnou podmínku pro lokální extrém funkce více proměnných.

❷ Vyslovte definici základního systému funkcí (pro Lebesgueův integrál) a **všechny** užité pojmy řádně vysvětlete.

❸ Vyslovte korektní znění Lebesgueovy věty a ukažte, jak ji lze aplikovat při vyčíslení limity

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{3}{nx}}\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

❹ Definujte Lebesgueův integrál pro funkce ze základního systému (viz úloha č. 2). Všechny symboly, které v definici užijete (kromě těch, které již byly definovány v úloze č. 2), řádně vysvětlete.

❺ Vyslovte definici pojmu totální diferenciál funkce více proměnných.

❻ Pro dvojrozměrnou Lebesgueovu míru zadanou prostřednictvím vytvořujících funkcí $\varphi(x) = \Theta(x-1)x^2$, $\psi(y) = y^3$ vypočítejte obsah množiny $A = \langle 0,2)\times\langle 0,2)$.

❼ O posloupnosti $(\vec{x}_n)_{n=1}^\infty$ vektorů z $\mathbf{R}^2$ je známo, že:

$$(\forall\delta>0)(\exists n_0\in\mathbf{N}):\quad n>n_0\quad\Rightarrow\quad 0<\|\vec{x}_n-(3,5)\|<\delta.$$

O funkci $g(\vec{x}):\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}$ je známo, že:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0):\quad \|\vec{x}-(3,5)\|<\delta\ \Rightarrow\ |g(\vec{x})+2|<\varepsilon.$$

Co lze z těchto indicií vyvodit pro posloupnost $(g(\vec{x}_n))_{n=1}^\infty$?

❽ Pro funkci

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-5y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

určete hodnotu směrové derivace v počátku souřadné soustavy ve směru $(1,1)$.

❾ Zapište definici křivkové parametrizace a sestavte ji pro křivku:

$$C=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}\wedge z=7c\right\}.$$