Obsah

PŘEDMLUVA

Toto skriptum bylo vytvořeno jako hlavní učební text pro předmět Úvod do pravděpodobnosti 2, vyučovaný na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské Českého vysokého učení technického v Praze.

Notace, použité symboly a jejich význam

Symbol	Význam
$\wedge$	a zároveň (konjunkce)
$\vee$	nebo (disjunkce)
$\Longrightarrow$	z výroku vlevo plyne výrok vpravo (implikace)
$\Longleftrightarrow$	vzájemně ekvivalentní výroky (ekvivalence)
$\mathbf{N}$	množina přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	množina celých čísel $\mathbf{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots\}$
$\hat{k}$	množina prvních k přirozených čísel, tj. $\hat{k} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, k\}$
$\mathbf{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbf{R}$	množina reálných čísel
$\Theta(x)$	Heavisideova funkce (jednotkový skok)
	$\Theta(x) = 1$ pro nezáporná x a $\Theta(x) = 0$ pro záporná x
$\Theta^\star(x)$	alternativní Heavisideova funkce: $\Theta^\star(x) = 1 - \Theta(-x)$
	$\Theta^\star(x) = 1$ pro kladná x a $\Theta^\star(x) = 0$ pro nekladná x
soustava množin	množina, jejimiž prvky jsou množiny
kardinální číslo	počet prvků množiny
$\lvert A\rvert$	kardinální číslo množiny A
$\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \ldots$	náhodné proměnné (jevy, experimenty, procesy, apod.)
$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$	pravděpodobnost, že výsledkem jevu $\mathbb{X}$ je hodnota z množiny A
$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \ = ?$	pravděpodobnostní dotaz
$\mathrm{Dom}(g)$	definiční obor zobrazení/funkce g
$\mathrm{Ran}(g)$	obor hodnot zobrazení/funkce g
$A \cap B$	průnik množin
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \setminus B$	rozdíl množin
$A \uplus B$	disjunktní sjednocení množin, kdy $A \cap B = \emptyset$
$[g(x)]_a$	délka skoku funkce $g(x)$ v bodě a
	$[g(x)]_a = \lim_{x\to a_+} g(x) - \lim_{x\to a_-} g(x)$

Kapitola 1

Motivace a výchozí uvedení do problematiky

Základní tématikou, jíž se zaobírají tato skripta, je problematika statistického popisu systémů, které nejsou deterministické, ale vykazují buď jemné, nebo i značně výrazné rysy náhodného uspořádání. Hovoříme o nich jako o systémech stochastických. Při popisu takových systémů nevystačíme, jak je zcela zřejmé, s aparátem běžně užívaným při studiu klasických systémů, protože každá z popisných veličin může s jistou pravděpodobností nabývat pestré škály hodnot. Proto je nezbytné přejít k osvědčeným instrumentům matematické pravděpodobnosti a statistiky, tj. axiomaticky vybudované matematické disciplíny vystavěné na pilířích matematické analýzy a lineární algebry.

1.1 Klasifikace systémů podle míry náhodnosti

Pro bližší objasnění klasifikace systémů podle míry náhodnosti nyní upřesňujeme, že systém (typicky fyzikální, biologický, ekonomický či sociální) je označen za **deterministický,** pokud lze na základě údajů o počátečním uspořádání elementů (těles, buněk, sektorů či jedinců) tohoto systému jednoznačně stanovit, v jakém stavu se bude systém nacházet v blízkém (někdy i dalekém) budoucnu. Reprezentantem takového systému je například systém několika těles navzájem propojených pružinami a pohybujících se ve vakuu. Při znalosti počátečních poloh a rychlostí těchto těles a při znalosti dalších parametrů systému (zde např. tuhostí použitých pružin) lze se stoprocentní jistotou určit stav systému v libovolném čase t, tedy lokace a okamžité rychlosti všech těles.

Naproti tomu **stochastický systém** je charakteristický tím, že ani při znalosti detailního a kompletního silového (nebo obecně interakčního) působení mezi elementy systému není možno predikovat výsledný stav systému jinak než s použitím pravděpodobnostního popisu. Zástupcem takového systému je například systém mnoha vzájemně propojených kuliček ponořených do kapaliny. Ačkoli je silové působení mezi každými dvěma kuličkami relativně snadno popsatelné, rušivé účinky molekul vodní lázně z něj vytvářejí systém náhodný. Analogicky lze za stochastické systémy prohlásit také systémy, které jsou – ač původně deterministické – rušeny různými náhodnými vlivy, popř. systémy, v nichž je interakce mezi součástmi komplikovaná, nestabilní nebo nahodilá. Mezi takovéto systémy lze typicky zahrnout pohyb těles v reálném odporujícím prostředí, vývoj akcií na burze, neuspořádaný pohyb buněk nebo molekul kapalin a plynů, proud vozidel či pohybující se dav chodců. Stanovovat analytické předpovědi pro deterministický systém tedy znamená určit přesný stav systému v daném čase, tj. vypočítat přesné hodnoty fázových veličin (poloh, hybností, rychlostí, atd). Naproti tomu ve stochastických systémech reprezentují analytické předpovědi snahu kvantifikovat pravděpodobnosti, s jakými nastanou všechny přípustné stavy daného systému. V těchto systémech je typickým výstupem řešení pravděpodobnost, že daná stavová veličina – označme ji symbolem $\mathbb{X}$ – (například akcie společnosti Apple) nabude hodnot z množiny A (což může být například interval mezi \$115 a \$125). Takové a podobné pravděpodobnosti budeme zapisovat ve formalizovaném tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle 115, 125 \rangle], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1, 3, 5\}], \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} < a],$$

kde $\mathbb{X}$ budeme nazývat **náhodnou veličinou (proměnnou).** Úlohu na vyčíslení pravděpodobnosti zadanou ve tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \ = ? \tag{1.1}$$

budeme nazývat **pravděpodobnostním dotazem.**

1.1.1 Úloha – francouzská ruleta

V této úloze se pokusíme matematickým pohledem analyzovat náhodný jev, jenž je základem hazardní hry s názvem francouzská ruleta. Základem rulety je otáčivé zařízení, které se skládá ze dvou soustředných kol. Větší z nich je nehybné. Menší je pohyblivé a bývá rozděleno na 37 obarvených polí očíslovaných čísly od 0 do 36. Hráči sází typicky na konkrétní číslo nebo barvu políčka, do kterého si myslí, že kulička padne. Komplikovanější sázky však připouštějí vsadit i na různé další varianty výsledku. Typické příklady sázek jsou tyto:

- Sázky na jedno číslo: Hráč vsází na kterékoliv číslo včetně nuly. V případě výhry je vyplacen 35násobek vsazené částky.
- Červená nebo černá barva: Hráč typuje barvu políčka. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky.
- Sudá nebo lichá: Hráč typuje, zda výsledkem bude sudé nebo liché číslo. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky. Pokud padne nula, výhra se nevyplácí.
- Malá čísla: Hráč vsází na to, že padne některé z čísel 1–18. V případě výhry je vyplacen dvojnásobek vsazené částky.
- Vysoká čísla: Hráč vsází na to, že padne některé z čísel 19–36. Výhra je opět dvojnásobek vsazené částky.
- Třetiny: Vsází se, zda kulička padne do první třetiny (čísla 1–12), druhé třetinu (čísla 13–24) nebo třetí třetiny (čísla 25–36). V případě výhry je vyplacen třínásobek vsazené částky.
- Sloupce: Jedná se buď o sázku na horní řadu (čísla dělitelná třemi), nebo prostřední řadu (čísla dělitelná třemi se zbytkem 2), případně dolní řadu (čísla dělitelná třemi se zbytkem 1). Výhrou je opět třínásobek vsazené částky.

Pokuste se nyní ke každé z výše zmíněných sázek vytvořit příslušný pravděpodobnostní dotaz a vyčíslit hodnotu jeho výsledku.

1.2 Výběrový prostor

Charakteristickým rysem každého náhodného procesu, tj. každé náhodné veličiny, je množina všech přípustných výsledků, tj. všech, které mohou být při realizaci příslušného náhodného experimentu dosaženy. Hovoříme o tzv. **výběrovém prostoru.** V těchto skriptech ho budeme značit písmenem E. Pohledem teorie míry, která s danou problematikou úzce souvisí (jak uvidíme později), lze tuto množinu ztotožnit s tak zvaným **množinovým prezidentem.** Na základě elementárních vlastností pravděpodobnosti bude vždy platit, že pravděpodobnost, že výsledkem náhodného experimentu bude některá z hodnot výběrového prostoru, vždy rovna jedné. To tedy značí, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1.$$

Hovoříme o **normalizaci pravděpodobnosti.** V úloze 1.1.1 je takovým výběrovým prostorem množina $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 36\}$. Jednotlivé prvky výběrového prostoru se obvykle nazývají **elementárními jevy.**

Předpokládejme, že $\mathscr{B}$ je soustava, jejimiž prvky jsou množiny. Říkáme, že $\mathscr{B}$ je soustavou množin. Množinu $E \in \mathscr{B}$ nazveme **prezidentem soustavy** $\mathscr{B}$, pokud jsou všechny ostatní množiny soustavy $\mathscr{B}$ její podmnožinou, tj. $\forall A \in \mathscr{B} : \quad A \subset E$. Není těžké ukázat, že každá soustava má nejvýše jednoho prezidenta. Existují tudíž i soustavy, které prezidenta nemají.

1.3 Klasifikace podle rozsáhlosti výběrového prostoru

Náhodné jevy (proměnné) obvykle rozdělujeme podle počtu všech přípustných hodnot, které mohou být výsledkem zkoumaného náhodného procesu, tj. – odborně řečeno – podle mohutnosti výběrového prostoru.

Kardinalitou (kardinálním číslem, mohutností) množiny přitom rozumíme počet jejích prvků, ovšem v poněkud zobecněném pojetí. Je-li počet prvků množiny A konečný, pak je kardinálním číslem právě tento počet. Tedy množina $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, kterou bývá zvykem označovat symbolem $\hat{n}$, má kardinální číslo rovné číslu n. Píšeme $\lvert M\rvert = n$. Pro $B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ proto platí, že $\lvert B\rvert = 4$. Pokud ale lze nějakou množinu bijektivně zobrazit na množinu přirozených čísel $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, pak je tak zvaně spočetná. U takových množin už nelze stanovit klasicky chápaný pojem počtu prvků. K odstranění tohoto problému slouží právě číslo kardinální. Pro spočetné množiny ho označujeme symbolem $\aleph_0$ [čteme: alef nula]. Takže například množina $C = \{7, 14, 21, 28, \ldots\}$ všech přirozených čísel dělitelných sedmi má kardinální číslo rovné $\aleph_0$. A dokonce i množina $\mathbf{Q}$ všech racionálních čísel má stejnou mohutnost, protože ji lze na $\mathbf{N}$ bijetivně zobrazit. Píšeme $\lvert C\rvert = \lvert\mathbf{Q}\rvert = \aleph_0$. Nespočetný množinám bijektivně zobrazitelným na množinu $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ reálných čísel pak přísluší kardinální číslo $\aleph_1$. Proto například pro interval $I = (-1, 2)$ platí $\lvert I\rvert = \aleph_1$.

Je-li mohutnost množiny všech přípustných hodnot náhodné proměnné konečná či spočetná, tj. je-li $\lvert E\rvert \leqslant \aleph_0$, hovoříme o **diskrétních náhodných systémech/proměnných**. Zástupcem diskrétních náhodných systémů je například výše diskutovaná francouzská ruleta nebo losování čísel Sportky, kdy má množina všech přípustných hodnot 49 prvků, neboť $E = \{1, 2, \ldots, 49\}$. Je-li naopak $\lvert E\rvert = \aleph_1$, tj. je-li množina všech přípustných hodnot náhodné proměnné nespočetná, hovoříme o **spojité náhodné veličině.** Reprezentanty spojitých náhodných veličin jsou například rychlost pohybu buněk v živých organizmech, mzda zaměstnanců obchodní společnosti, nebo cena akcie ČEZ na Prague Stock Exchange.

1.3.1 Úloha – klasifikace náhodných proměnných

Pokuste se nalézt vlastní příklady disktrétních a spojitých náhodných jevů. Vysvětlete, z jakého důvodu zařazujete daný jev do dané kategorie.

1.4 Pestrost pravděpodobnostních dotazů

Ptáme-li se, jaké pravděpodobnostní dotazy můžeme pro zvolenou náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ zodpovědět a kolik takových dotazů vlastně existuje, je zřejmé, že to bude souviset s mohutností celého výběrového prostoru. Je-li výběrovým prostorem dvouprvková množina $E = \{p = \text{panna}, o = \text{orel}\}$, pak lze položit pouze tyto čtyři dotazy:

- Padne při jednom hodu mincí orel?
- Padne při jednom hodu mincí panna?
- Padne při jednom hodu mincí něco z dvojice panna, orel?
- Nepadne při jednom hodu mincí žádný z této dvojice?

Ostatní dotazy nedávají smysl. Tuto čtveřici lze zcela intuitivně přeformátovat do standardního tvaru pravděpodobnostního dotazu (viz vztah (1.1)), a to takto:

- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{o\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{p\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o \;\vee\; \mathbb{X} = p] \;=\; \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{p, o\}] \;=\; ?$
- $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] \;=\; ?$

Odsud ihned plyne, že smysluplným dotazem bude jakýkoli dotaz tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \;=\; ?$ pro libovolnou podmnožinu výběrového prostoru E. A protože je dobře známo, že počet všech podmnožin množiny, která má m prvků je roven 2^m, víme nyní, že všech dostupných pravděpodobnostních dotazů je právě 2^m. Zobecněně to platí dokonce i pro spočetně či nespočetně velké výběrové prostory, kde je například dokázáno, že $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, tj. že v případě spočetné náhodné proměnné existuje nespočetně mnoho pravděpodobnostních dotazů.

Mezi všemi pravděpodobnostními dotazy existují dva, které mají specifické postavení a triviálně zjistitelnou hodnotu výsledku. Jedná se o variantu, kdy $A = E$, resp. $A = \emptyset$. Hovoříme o tzv. **jistém jevu** (varianta $A = E$), resp. o **jevu nemožném** (varianta $A = \emptyset$). Platí pro ně rovnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] = 0$. Za nemožný jev pokládáme jev, který nemůže nastat při žádné realizaci zkoumaného náhodného pokusu.

Soustavu všech podmnožin libovolné množiny D nazýváme **potencí množiny** a označujeme symbolem 2^D, tj. $2^D = \{A : \; A \subset D\}$. Jistě tedy $\emptyset \in 2^D$ a $D \in 2^D$. Poznámka: Symbol 2^D je odvozen z faktu, že soustava 2^D obsahuje, jak bylo diskutováno výše, právě $2^{\|D\|}$ množin.

1.4.1 Úloha – řešení pravděpodobnostních dotazů

Zkoumejme náhodný jev spočívající v hodu mincí, o níž je známo, že panna padá pětkrát častěji než orel. Při znalosti tohoto chování zodpovězte všechny pravděpodobnostní dotazy z předešlé sekce.

1.5 Obecné vlastnosti pravděpodobnosti – intuitivní zavedení

Uvažujme nyní libovolnou náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$, jejíž výběrový prostor (množina všech přípustných stavů) je E. Intuitivně očekáváme, že pro libovolnou podmnožinu A množiny E, tj. $\forall A \in 2^E$, bude možné stanovit pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$, že náhodná veličina nabude hodnoty právě z množiny A. Ačkoli pro diskrétní náhodné proměnné je toto tvrzení pravdivé zcela, pro spojité náhodné proměnné je situace, jak záhy uvidíme, mírně složitější. Nejprve tedy pojďme diskutovat obecné vlastnosti pravděpodobnosti pro diskrétní náhodné proměnné.

Po poměrně podrobném úvodu do problematiky lze nyní pravděpodobnost chápat jako zobrazení, které množinám A z potence 2^E, kde E je výběrový prostor zkoumané náhodné proměnné, přiřazuje hodnoty z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, vyjadřující pravděpodobnost, že výsledkem náhodného experimetu bude některý z prvků množiny A. Tedy:

$$\mathcal{P} : 2^E \mapsto \langle 0, 1\rangle.$$

Tato pravděpodobnost také nutně splňuje následující základní vlastnosti:

- nulovou pravděpodobnost pro prázdnou množinu, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \emptyset] = 0$;
- jednotkovou pravděpodobnost pro množinu všech přípustných stavů, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in E] = 1$;
- nezápornost, tj. splnění implikace $A \in 2^E \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \geqslant 0$;
- monotónii, tj. splnění implikace $A, B \in 2^E \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B]$;
- aditivitu, tj. splnění implikace $A, B \in 2^E \wedge A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A \cup B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B]$.

Odtud je patrná výrazná podobnost mezi pravděpodobností (jakožto množinovou funkcí, která přiřazuje množinám číselné hodnoty) a obecnou mírou tak, jak byla vybudována v Lebesgueově teorii míry (viz skripta [**?**]). V podstatě lze říci, že pravděpodobnost je normalizovaná míra, protože z výše uvedených vlastností jsou čtyři přesnou kopií axiomů míry, pouze druhá vlastnost (jakási normovanost) je určitým specifikem pravděpodobnosti. Tato silná korespondence mezi obecnou mírou a mírou pravděpodobnostní nám v dalším textu pomůže vybudovat (kvantitativně i kvalitativně) pravděpodobnost bezesporným způsobem, což nebylo v historii budování aparátu pravděpodobnosti vždy snadné.

1.5.1 Komplikace při studiu spojitých náhodných veličin

Intuitivně by se mohlo zdát, že se přechodem od diskrétních ke spojitým náhodným veličinám nic zásadního nemění, a že tedy dotazy tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] =?$ jsou vyčíslitelné pro všechny volby podmnožin $A \subset E$. Pokud jsou zástupci takových podmnožin $A \subset E$ voleny nepříliš komplikovaně, tj. je-li A reprezentováno kupříkladu jednoprvkovou, konečněprvkovou, spočetněprvkovou množinou, nebo intervalem či jejich konečným, resp. spočetným sjednocením, pak hodnota $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ skutečně existuje. Ovšem existují i různé technicky překombinované volby množiny A, kdy pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ vyčíslit nelze. Tento problém řeší rigorózní cestou právě teorie míry (viz [**?**]). My se v těchto skriptech omezíme pouze na výsledek celého postupu. Tím je fakt, že se v případě spojitých náhodných proměnných za definiční obor pravděpodobnosti $\mathcal{P}$, kterým je v diskrétním případě celá soustava 2^E, klade jenom jistá vhodná podsoustava $\mathscr{D} \subset 2^E$, která je tzv. **množinovou** $\sigma-$**algebrou.** Tato soustava $\mathscr{D}$ je vytvořena jako nejmenší možná $\sigma-$algebra vytvořená nad množinovou soustavou $\{G \subset E : G = G^\circ\}$ všech otevřených podmnožin množiny E. Je-li např. $E = \mathbf{R}$, což je typická situace, pak do této minimální $\sigma-$algebry, které se v teorii míry říká borelovský uzávěr, patří všechny jednoprvkové, konečněprvkové, spočetněprvkové množiny, všechny intervaly (libovolného typu) a všechna jejich konečná či spočetná sjednocení. A pochopitelně také prázdná množina a sama množina E. To je pro naše záměry budování rigorózní teorie pravděpodobnosti plně dostačující. O množinách z borelovského uzávěru $\mathscr{D}$ hovoříme jako o **borelovských množinách**.

Závěrem těchto úvah je tedy skutečnost, že $\mathrm{Dom}(\mathcal{P}) = \mathscr{D}$, tj. že ve spojitých případech lze klást pravděpodobnostní dotazy pouze ve tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] \; = ?, \quad \text{kde } A \in \mathscr{D}.$$

Soustavu množin $\mathscr{D}$ prohlásíme za **množinovou** $\sigma-$**algebru,** pokud splňuje tyto podmínky:

- uzavřenost na konečná sjednocení: $\forall A, B \in \mathscr{D} : \; A \cup B \in \mathscr{D}$.
- uzavřenost na rozdíly: $\forall A, B \in \mathscr{D} : \; A \setminus B \in \mathscr{D}$.
- existence množinového prezidenta: $\exists E \in \mathscr{D} : \; A \in \mathscr{D} \Rightarrow A \subset E$.
- uzavřenost na spočetná sjednocení: $\forall A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathscr{D} : \; \cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{D}$.

1.5.2 Úmluva

Z předešlé části textu vyplývá, že (je-li jasné, o jaké náhodné proměnné se hovoří) není nezbytné zapisovat pravděpodobnostní dotazy v kompletním tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] =?$, ale že je lze bez újmy na obecnosti zestručnit do podoby $\mathcal{P}[A] =?$. Tohoto zjednodušení se v dalším textu většinou přidržíme.

1.6 Pravděpodobnostní míra – rigorózní zavedení

Z matematického pohledu chápeme pravděpodobnost jako pravděpodobnostní míru

$$\mathcal{P} : 2^E \mapsto \langle 0, 1 \rangle,$$

jejímž definičním oborem $\mathrm{Dom}(\mathcal{P})$ je buď potence nějakého spočetného výběrového prostoru E, anebo (v případě spojitých náhodných proměnných) množinová soustava tzv. borelovských množin, o níž bylo pojednáno výše. Souhrnně (bez rozlišení, zda je daná proměnná diskrétní či spojitá) označujeme definiční obor pravděpodobnostní míry termínem $\sigma-$**algebra jevů.** Budeme pro ni používat symbol $\mathscr{D}$.

Pravděpodobností (pravděpodobnostní mírou) tedy budeme rozumět každé zobrazení $\mathcal{P} : \mathscr{D} \mapsto \langle 0, 1 \rangle$, které všem množinám ze soustavy $\mathscr{D}$ přiřazuje číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ při splnění následujících axiomů:

- axiom nulovosti: $\mathcal{P}[\emptyset] = 0$;

- axiom normality: $\mathcal{P}[E] = 1$;
- axiom monotónie: $A, B \in \mathscr{D} \wedge A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \leqslant \mathcal{P}[B]$;
- axiom nezápornosti: $A \in \mathscr{D} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A] \geqslant 0$;
- axiom aditivity: $A, B \in \mathscr{D} \wedge A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$.
- axiom σ–aditivity: $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots \in \mathscr{D} \wedge A_k \cap A_\ell = \emptyset \ (k \neq \ell) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[\cup_{k=1}^{\infty} A_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[A_k]$.

Toto zavedení je sice redundantní, což značí, že některé z uvedených axiomů je možno prokázat na základě splnění zbylých axiomů, ale pro přehlednost a lepší pochopení se ho v tomto textu přidržíme.

Zde navíc podotýkáme, že z axiomů pravděpodobnostní míry bezprostředně vyplývá, že

$$\forall G \in \mathscr{D}: \ \mathcal{P}[G] \in \langle 0, 1 \rangle, \tag{1.2}$$

tj. $\mathrm{Ran}(\mathcal{P}) \subset \langle 0, 1 \rangle$, kde $\mathrm{Ran}(\mathcal{P})$ značí obor hodnot pravděpodobnostní míry.

1.7 Jevy a jejich množinová interpretace

Intuitivně jsme již pochopili, že výsledky náhodných pokusů lze s výhodou pokládat za množiny možných výsledků náhodného experimentu. Této úvahy jsme již využili při zjednodušení zápisu $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A]$ na $\mathcal{P}[A]$. Odsud ale vyplývá, že při řešení úloh na pravděpodobnost bude možné používat množinovou symboliku a operace.

Jev, který nastane tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A, B, se nazývá **sjednocením jevů** A a B a značí se symbolem $A \cup B$. Jev, který nastane, pokud nastanou oba jevy A, B současně, se nazývá **průnikem jevů** A a B a značí se symbolem $A \cap B$. Analogicky je definováno také sjednocení či průnik většího počtu jevů.

Jev, který nastane, jestliže nastane jev A, ale nenastane jev B, se nazývá **rozdílem jevů** A a B a značí se symbolem $A \setminus B$.

Platí-li, že kdykoli nastane jev A, nastane i jev B, řekneme, že A **je podjevem jevu** B nebo že jev A má za následek jev B. Píšeme $A \subset B$.

Jev A, který nastává právě tehdy, když nenastává jev B, se nazývá **jevem opačným (doplňkovým)** k jevu A Označujeme ho symbolem $A = B^c$ a zjevně platí, že $B^c = E \setminus B$, resp. $B \cup B^c = E$.

Jevy A a B, pro které $A \cap B = \emptyset$, se nazývají **neslučitelnými (disjunktními) jevy**. Jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ se nazývají neslučitelnými (disjunktními), platí-li pro ně implikace

$$\forall i, k \in \{1, 2, \ldots, n\}: \quad i \neq k \ \Rightarrow \ B_i \cap B_k = \emptyset.$$

Jestliže navíc platí, že $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = E$, řekneme, že jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tvoří **úplný systém neslučitelných jevů.**

Jev, který lze vyjádřit jako sjednocení alespoň dvou neslučitelných jevů, se nazývá **jev složený.** Jev, který složený není, se nazývá **jevem elementárním.** Snadno lze ukázat, že každé dva elementární jevy jsou neslučitelné a že celý výběrový prostor E lze rozložit na úplný systém elementárních jevů.

1.8 Odvozené vlastnosti pravděpodobnosti

Z axiomů pravděpodobnosti lze vcelku pohodlně odvodit celou řadu doplňkových vlastností, které pravděpodobnostní mítu charakterizují. Nejprve ovšem ukážeme, že dokonce i axiom monotonie může být odvozen ze zbylých axiomů. Uvažme množiny (jevy) $A, B \in \mathscr{D}$, takové, že A je podjevem B, tj. $A \subset B$. Z rovností $A = B \cup (B \setminus A)$, $B \cap (B \setminus A) = \emptyset$ a z axiomu aditivity plyne, že

$$\mathcal{P}[A] = \mathcal{P}[B] + \mathcal{P}[B \setminus A].$$

Zároveň ale z odvozené vlastnosti (1.2) víme, že $\mathcal{P}[B \setminus A] \in \langle 0, 1 \rangle$. Odtud již přímo vyplývá, že $\mathcal{P}[A] \leqslant \mathcal{P}[B]$, což bylo cílem dokázat.

1.8.1 Úloha – další vlastnosti pravděpodobnosti

V tomto příkladě se pokusme ukázat, že pro pravděpodobnost platí také další dva dodatkové vztahy. Prvním z nich je **subtraktivita,** tj. tvrzení tvaru:

$$A, B \in \mathscr{D} \;\wedge\; A \subset B \implies P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Druhým z nich je **komplementarita,** tj. tvrzení tvaru:

$$A \in \mathscr{D} \implies P(A^{c}) = 1 - P(A).$$

1.8.2 Úloha – důkazy dalších vlastností

Dokažte, že platí:

- $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[A \cap B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.
- Je-li $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathscr{D}$ úplný systém neslučitelných jevů, pak $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}[B_k] = 1$.
- $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^{c} = A_1^{c} \cap A_2^{c} \cap \ldots \cap A_n^{c}$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^{c} = A_1^{c} \cup A_2^{c} \cup \ldots \cup A_n^{c}$ pro libovolnou sadu jevů ze σ–algebry $\mathscr{D}$.
- $\mathcal{P}[A \setminus B] + \mathcal{P}[A \cap B] + \mathcal{P}[B \setminus A] = \mathcal{P}[A \cup B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

1.8.3 Úloha – rozhodnutí o platnosti tvrzení

Pokusme se rozhodnout, zda (případně za jakých podmínek) platí rovnost $\mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B]$ pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathscr{D}$.

Kapitola 2

Distribuční funkce a její vlastnosti

Bez ohledu na typ náhodné proměnné lze pro každou jednorozměrnou náhodnou proměnnou zavést nejuniverzálnější ze všech pravděpodobnostních charakteristik, kterou je tzv. distribuční funkce. Jedná se vlastně o funkci jedné proměnné, která vyčerpávajícím způsobem charakterizuje náhodný proces, který analyzujeme. Prostřednictvím ní lze totiž, jak uvidíme později, zodpovědět každý z přípustných pravděpodobnostních dotazů.

2.1 Zavedení distribuční funkce náhodné proměnné

Pro náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ zavádíme k ní příslušnou **distribuční funkci** předpisem

$$F(x) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < x]. \tag{2.1}$$

Definičním oborem distribuční funkce je množina $\mathbf{R}$ všech reálných čísel, a to i tehdy, je-li výběrovým prostorem podstatně méně mohutná množina, například interval $E = (-4, 7)$, nebo čtyřprvková množina $E = \{2, 4, 6, 8\}$.

2.1.1 Příklad – distribuční funkce pro hod falešnou kostkou

Uvažujme falešnou hrací kostku, při jejímž hodu padá číslo 3 pětkrát častěji něž ostatní hodnoty. Všechny ostatní hodnoty jsou stejně pravděpodobné. Výběrovým prostorem je množina $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6.\}$. A jejím rozkladem na úplný systém neslučitelných (a zároveň elementárních) jevů je zjevně systém množin (jevů) $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3\}$, $B_4 = \{4\}$, $B_5 = \{5\}$ a $B_6 = \{6\}$. S ohledem na výše uvedený fakt, že $\mathcal{P}[B_3] = 5\mathcal{P}[B_k]$ pro všechna $k = 1, 2, 4, 5, 6$, a také že $\sum_{k=1}^{6} \mathcal{P}[B_k] = 1$, vidíme, že pravděpodobnostní tabulka zkoumaného jevu vypadá takto:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

Z této pravděpodobnostní tabulky lze pak snadno dopočítat hodnotu příslušné distribuční funkce v libovolném bodě $x \in \mathbf{R}$. Například

$$F(2.5) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 2.5] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 2] = \frac{2}{10}.$$

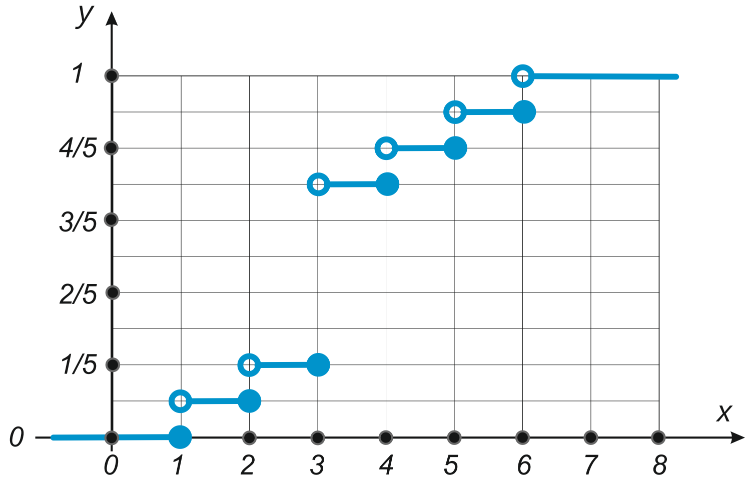
Analogicky

$$F(5) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 5] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2,3,4\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 2] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 3] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = 4] = \frac{8}{10}.$$

Povšimněte si ale, že pro $x = 5,01$, (tj. při nepatrné změně předešlého zadání) platí

$$F(5.01) := \mathcal{P}[\mathbb{X} < 5.01] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{1,2,3,4,5\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = 1]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 2]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 3]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 4]+\mathcal{P}[\mathbb{X} = 5] = \frac{9}{10}.$$

Z toho je zřejmé, že distribuční funkce diskrétních náhodných veličin má typicky skokový charakter. Říkáme, že $F(x)$ je schodovitou funkcí. Pro tento příklad ještě vykresleme její podobu.



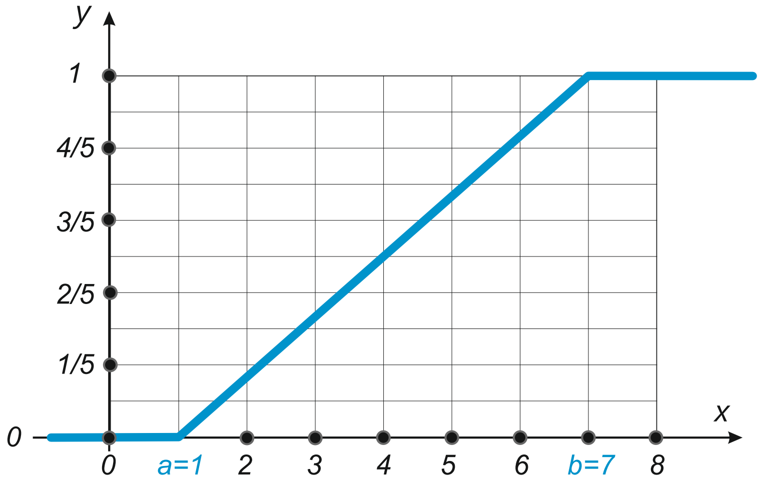
Z obrázku je patrné, že vykreslená distribuční funkce je spojitá zleva. To se nakonec ukáže jako univerzální vlastnost každé distribuční funkce.

2.1.2 Příklad – distribuční funkce rovnoměrného spojitého rozdělení

Jako elementární příklad distribuční funkce nám může dobře posloužit distribuční funkce spojité rovnoměrně rozdělené náhodné veličiny, jejíž realizace mohou se stejnou pravděpodobností nabývat všech hodnot z otevřeného intervalu (a,b). Není nikterak těžké určit, že příslušná distribuční funkce je tvaru

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b); \\ 1 & x \geqslant b. \end{cases}$$

Tato distribuční funkce je vykreslena na obrázku dole. V tomto případě je distribuční funkce nejen spojitá zleva, ale nad to ještě kompletně spojitá. Na obou obrázcích jsou navíc dobře patrné všechny základní vlastnosti distribučních funkcí citované v oddíle 2.2.



Uvedené rozdělení se nazývá rovnoměrné, protože všechny intervaly $\langle a, a+\delta)$ o stejné délce $\delta > 0$, které jsou podmnožinou výběrového prostoru $E = \langle 1, 7\rangle$, mají stejnou pravděpodobnost. To uvidíme

2.2 Základní vlastnosti distribuční funkce

Mezi vlastnosti všech distribučních funkcí, které lze jednoduše vyvodit přímo z definice (2.1), patří tyto:

- $\mathrm{Dom}(F) = \mathbf{R}$;
- $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0, 1\rangle$;
- $F(x)$ je na $\mathbf{R}$ neklesající;
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
- $F(x)$ je na $\mathbf{R}$ spojitá zleva.

Dodatečným technickým předpokladem je požadavek na částečnou spojitost funkce $F(x)$, kdy je $F(x)$ buď kompletně spojitá, tj. $F(x) \in C(\mathbf{R})$, anebo má pouze konečně bodů nespojitosti. Tuto druhou vlastnost zapisujeme symbolem $F(x) \in PC(\mathbf{R})$. Pro pečlivější čtenáře také nabízíme níže přesnou definici prostoru po částech spojitých funkcí.

Nechť M je libovolná neprázdná podmnožina množiny všech reálných čísel. Symbolem $PC(M)$ označujeme množinu (přesněji třídu) všech funkcí $g : M \mapsto \mathbf{R}$ **po částech spojitých** na množině M. Pro příslušnost měřitelné funkce $g(x)$ do třídy $PC(M)$ musí funkce splňovat tyto vlastnosti: a) $M \subset \mathrm{Dom}(g)$; b) $g(x)$ je spojitá zleva ve všech bodech množiny M; c) $g(x)$ je spojitá všude v množině $A \subset M$, přičemž $\lvert M \setminus A\rvert < \aleph_0$, což značí, že $g(x)$ je spojitá ve všech bodech množiny M s výjimkou konečně mnoha bodů zahrnutých v množině $M \setminus A$ a d) v bodech množiny A navíc existují také limity zprava (konečné či nekonečné).

2.2.1 Heavisideova funkce

Jednou z nejelementárnějších po částech spojitých funkcí je tzv. **Heavisideova funkce** [čti `hevisajd`]. Její jednorozměrná verze $\Theta(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ je zavedena předpisem

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0; \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Pro libovolnou funkci $h(x) : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ navíc definujeme součin $\Theta(x)\, h(x)$ jako nulový pro všechna $x \in I$, kde $I = (-\infty, 0\rangle$, a to bez ohledu na to, zda je funkce na množině I definovaná či zda v některých bodech intervalu I nemá limity, případně má limity rovné $\pm\infty$.

Heavisideova funkce představuje elegantní způsob, jak zjednodušovat zápisy funkcí, jejichž průběhy se skokově mění. Takové funkce se totiž běžně zapisují pomocí větvení, jako například u funkce

$$g(x) = \begin{cases} 7x^2 & |x| < 4; \\ 0 & |x| \geqslant 4. \end{cases}$$

Takovou funkci lze s využitím formátu Heavisideovy funkce pohodlně zapsat v kompaktním tvaru $g(x) = 7x^2\Theta(4 - |x|)$.

Dalším příkladem po částech spojité funkce je například funkce $g(x) = \Theta(x)/x$, při jejímž zkoumání se uplatní výše zmíněné pravidlo, které vyústí ve fakt, že $g(0) = 0$, ačkoli výraz $\Theta(x)/x$ by sám o sobě nebyl v nule definován.

2.2.2 Důkazy základních vlastností distribuční funkce

V této části textu prodiskutujeme (a zdůvodníme) základní vlastnosti, které má každá distribuční funkce.

To, že definičním oborem distribuční funkce je množina všech reálných čísel, je naprosto zřejmé z definice (2.1). A protože pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} < x]$ může nabývat pouze hodnot mezi nulou a jedničkou (včetně), je zcela zřejmé, že funkčními hodnotami distribuční funkce $F(x)$ mohou být pouze čísla z uzavřeného intervalu $\langle 0, 1\rangle$, což značí, že $\mathrm{Ran}(F) \subset \langle 0, 1\rangle$. Neznamená to ale nutně, že $\mathrm{Ran}(F) = \langle 0, 1\rangle$, jak je patrné například na obrázku XX výše, kde $\mathrm{Ran}(F) = \{0, 1/10, 1/5, 7/10, 4/5, 9/10, 1\}$.

Nyní dokažme, že $F(x)$ je na celém **R** **neklesající** funkcí. Zvolme tedy libovolně dvojici čísel $x < y$ a pokusme se ukázat, že $F(x) \leqslant F(y)$. Za daných okolností zcela jistě platí, že interval $(-\infty, x)$ je podmnožinou intervalu $(-\infty, y)$. Z monotonie pravděpodobnostní míry odtud plyne, že $\mathcal{P}[(-\infty, x)] \leqslant \mathcal{P}[(-\infty, y)]$. Odtud dále

$$F(x) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, y)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < y] = F(y),$$

což bylo cílem dokázat.

Další vlastností, jíž se pokusíme dokázat, je rovnost $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ta fakticky vychází z faktu, že $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty)] = \mathcal{P}[\mathbf{R}] = 1$. Je-li tedy $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost vyhovující podmínkám $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, pro níž navíc platí, že $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$, pak je posloupnost příslušných funkčních hodnot $F(x_k)_{k=1}^{\infty}$ neklesající, jak lze snadno odvodit z monotonie pravděpodobnostní míry

$$F(x_k) = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x_k] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x_k)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, x_{k+1})] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < x_{k+1}] = F(x_{k+1}),$$

a z logiky věci také omezená. Každá taková posloupnost ale musí mít nutně limitu. Označme ji $\lim_{k\to+\infty} F(x_k) = a$. Zbývá prokázat, že $a = 1$. Posloupnost intervalů $I_k = \langle x_k, x_{k+1})$ doplněná o interval $I_0 = (-\infty, x_1)$ je disjunktním rozkladem množiny **R**, neboť $\mathbf{R} = \biguplus_{k=0}^{\infty} I_k$. Ze σ–aditivity pravděpodobnostní míry odsud dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, +\infty)] = 1.$$

Protože $\mathcal{P}[I_k] = F(x_{k+1}) - F(x_k)$, jak uvidíme vzápětí, a $\mathcal{P}[I_0] = F(x_1)$, má n–tý částečný součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k]$ hodnotu

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = F(x_1) + \sum_{k=1}^{n} (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(x_{n+1}).$$

A protože součet číselné řady je v matematické analýze definován jako limita posloupnosti částečných součtů, musí nutně platit:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}[\mathbb{X} \in I_k] = \lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}),$$

odkud již vidíme, že $\lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 1$. Protože tato vlastnost platí pro každou posloupnost daného tvaru, plyne z Heineovy věty, že $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Analogickým způsobem se prokáže, že $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Prokázat **levou spojitost** distribuční funkce, tedy zbývající ze základních vlastností, je poněkud technickou záležitostí. Pečlivější čtenáře proto odkazujeme za větu 2.3.10 na straně 26 skript [**?**]).

2.3 Pravděpodobnosti intervalů a bodových množin

Znalost distribuční funkce technicky vzato umožňuje zodpovědět všechny přípustné pravděpodobnostní dotazy. Mezi nimi jsou ale nejčastějšími verzemi otázky určení pravděpodobnosti pro bodové množiny či intervaly.

2.3.1 Pravděpodobnost polouzavřeného intervalu

Nejprve zvolme čísla $a < b$ libovolně a pokusme se zodpovědět pravděpodobnostní dotaz tvaru $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] = ?$. Protože ale platí, že $\langle a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a)$ a zároveň $(-\infty, a) \subset (-\infty, b)$, dostáváme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, b)] - \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (-\infty, a)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} < b] - \mathcal{P}[\mathbb{X} < a] = F(b) - F(a).$$

Přimomínáme, že zde bylo využito výsledku jedné z předchozích úloh, a sice

$$A, B \in \mathscr{D} \;\wedge\; A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}[A \setminus B] = \mathcal{P}[A] - \mathcal{P}[B].$$

2.3.2 Pravděpodobnost otevřeného intervalu

Pro libovolná čísla $a < b$ stanovme nyní pravděpodobnost, že výsledkem experimentu bude hodnota z otevřeného intervalu (a, b). Nejprve uvažme, že otevřený interval $(0, 1)$ lze pokrýt disjunktním spočetným sjednocením polouzavřených intervalů, neboť

$$(0, 1) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) = \langle 1/2, 1) + \langle 1/3, 1/2) + \langle 1/4, 1/3) + \ldots.$$

Odtud

$$(0, b-a) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{b-a}{n+1}, \frac{b-a}{n} \right)$$

a následně

$$(a, b) = \biguplus_{n=1}^{\infty} \left\langle a + \frac{b-a}{n+1}, a + \frac{b-a}{n} \right).$$

Ze σ–aditivity míry pak odsud vyvozujeme, že

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\left[\left\langle a + \frac{b-a}{n+1}, a + \frac{b-a}{n}\right)\right].$$

Dále:

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\right).$$

Posloupnost částečných součtů této řady lze ale razantně zjednodušit, neboť

$$\sum_{n=1}^{k} \left(F\left(a + \frac{b-a}{n}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{n+1}\right)\right) =$$

$$= F(b) - F(a/2 + b/2) + F(a/2 + b/2) - F(2a/3 + b/3) + F(2a/3 + b/3) - \ldots + F\left(a + \frac{b-a}{k}\right) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right) =$$

$$= F(b) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right).$$

A protože součet číselné řady je definován jako limita posloupnosti částečných součtů, získáváme výsledek

$$\mathcal{P}[(a,b)] = \lim_{k\to\infty}\left(F(b) - F\left(a + \frac{b-a}{k+1}\right)\right) = F(b) - \lim_{x\to a_+} F(x),$$

kdy posledně uvedený výraz reprezentuje limitu zprava funkce $F(x)$ v bodě $x = a$.

Za povšimnutí zde stojí, že pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)]$ a $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)]$ jsou totožné jedině v případě, že je distribuční funkce $F(x)$ spojitá v bodě a. Jinak jsou obě pravděpodobnosti různé a vzhledem k monotonii pravděpodobnostní míry lze univerzálně stanovit pouze nerovnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)]$.

2.3.3 Pravděpodobnost jednoprvkové množiny

Jako výchozí tvar jednoprvkové množiny zvolme $A = \{a\}$ pro libovolné $a \in \mathbf{R}$. Protože ale platí elementární rovnosti $\{a\} \uplus (a, b) = \langle a, b)$ a $\{a\} \cap (a, b) = \emptyset$, vychází rovnou z axiomu aditivity, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b) \setminus (a, b)] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b)] - \mathcal{P}[\mathbb{X} \in (a, b)] =$$

$$= F(b) - F(a) - F(b) + \lim_{x\to a_+} F(x) = \lim_{x\to a_+} F(x) - F(a) = [F(x)]_a,$$

kde symbol $[F(x)]_a$ označuje délku skoku distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = a$. Je-li tedy distribuční funkce $F(x)$ v bodě $x = a$ spojitá, je pravděpodobnost, že výsledkem experimentu bude hodnota a, nulová.

2.3.4 Pravděpodobnost konečněprvkové množiny

Uvažujme množinu $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ čítající m různých hodnot a zkoumejme pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K]$. Rozložíme-li množinu $K = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ na disjunktní sjednocení množin $A = \{a_1\}$ a $B = \{a_2, \ldots, a_m\}$, pak z aditivity pravděpodobnostní míry dostáváme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B].$$

Rozložíme-li nyní množinu $B = \{a_2, \ldots, a_m\}$ na disjunktní sjednocení množon $C = \{a_2\}$ a $D = \{a_3, \ldots, a_m\}$, potom z analogie dostáváme rovnost

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_1] + \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_2] + \mathcal{P}[\mathbb{X} \in C].$$

Opakovanou aplikací tohoto postupu vidíme, že

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in K] = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k] = \sum_{k=1}^{m} [F(x)]_{a_k},$$

kde bylo využito výsledku pododdílu 2.3.3.

2.3.5 Pravděpodobnost spočetněprvkové množiny

Je-li $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$ množina čítající spočetně různých hodnot, lze ji podobně jako v předchozím pododdíle rozdělit na spočetné disjunktní sjednocení $S = \biguplus_{k=1}^{\infty} \{a_k\}$ jednoprvkových množin. Ze σ–aditivity pravděpodobnostní míry dostáváme vztah

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in S] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k] = \sum_{k=1}^{\infty} [F(x)]_{a_k},$$

kde byl opět použit základní vztah získaný v pododdíle 2.3.3.

2.3.6 Úloha – pravděpodobnost uzavřeného intervalu

Na základě předešlých výsledků odvoďte pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, b \rangle]$, že výsledkem experimentu s náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ bude hodnota ležící v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$.

2.3.7 Úloha – distribuční funkce diskrétní rovnoměrně rozdělené proměnné

Rozmyslete, jakou vlastnost má distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné, kdy jsou všechny elementární jevy stejně pravděpodobné. Nalezněte také příklady takového náhodného jevu a příslušnou distribuční funkci vykreslete.

2.3.8 Příklad – spojité rovnoměrné rozdělení

Uvažujme rovnoměrně rozdělenou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ diskutovanou v oddíle 2.1.2. Z obrázku XX vidíme, že v intervalu $\langle 1, 7 \rangle$ roste distribuční funkce (tj. pravděpodobnost, že $\mathbb{X}$ padne do intervalu $(-\infty, x)$) lineárně, což je znak typický pro rovnoměrné rozdělení. A ukažme, že všechny intervaly $\langle a, a + \delta)$ o stejné délce $\delta > 0$, které jsou podmnožinou výběrového prostoru $E = \langle 1, 7 \rangle$, mají stejnou pravděpodobnost. Aby interval $\langle a, a + \delta)$ byl skutečně podmnožinou intervalu $\langle 1, 7 \rangle$, musí nutně platit, že $1 \leqslant a < 7$ a $a + \delta \leqslant 7$. Pak ale platí:

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, a + \delta)] = F(a + \delta) - F(a).$$

A protože distribuční funkci z obrázku XX lze kompaktně zapsat ve tvaru

$$F(x) = \Theta(x-1)\cdot\Theta^\star(7-x)\cdot\frac{x-1}{6},$$

kde $\Theta^\star(x) = 1 - \Theta(-x)$ je alternativní Heavisideova funkce, dostáváme odtud

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \langle a, a+\delta)] = F(a+\delta) - F(a) = \frac{a+\delta-1}{6} - \frac{a-1}{6} = \frac{\delta}{6}.$$

Pro všechny diskutované intervaly je tedy příslušná pravděpodobnost stejná. Výsledek je zřetelně nezávislý na hodnotě a, tj. nezávislý na umístění intervalu uvnitř výběrového prostoru. A to je právě důvod, proč se o této náhodné proměnné hovoří jako o **rovnoměrně rozdělené.**

2.4 Úvahy o množinách nulové pravděpodobnosti

Zajímavou problematikou teorie pravděpodobnosti jsou vlastnosti množin, jejichž pravděpodobnostní míra je nulová. Hovoříme o tzv. $\mathcal{P}$–nulových množinách. Jedná se o ty množiny $A \in \mathcal{D}$, pro které je pravděpodobnost, že výsledkem experimentu s náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ bude hodnota ležící v množině A, nulová, tedy

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = 0.$$

Jev $\mathbb{X} \in A$ by tedy zřejmě bylo možné klasifikovat, jako jev nemožný. Z klasických příkladů na pravděpodobnost si totiž většinou odnášíme poznatek, že je-li pravděpodobnost nějakého jevu nulová, pak tento jev nemůže nastat. Toto tvrzení je ovšem, jak uvidíme vzápětí, plnohodnotnou pravdou pouze v případě, kdy zkoumáme diskrétní náhodné veličiny. V tomto případě je totiž výběrový prostor E konečnou nebo spočetnou množinou a označíme-li $B = A \cap E$, pak má množina B jistě konečný nebo spočetný počet prvků a zcela jistě pro ni platí rovnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = 0$. neboť $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] \leqslant \mathcal{P}[\mathbb{X} \in A] = 0$. Za daných okolností, je tedy jasné, že B je složena ze vzájemně různých prvků (číselných hodnot) $b_1, b_2, b_3, \ldots$, tj.

$$B = \{b_k \in \mathbf{R} : \; k = 1, 2, \ldots, m\}$$

nebo

$$B = \{b_k \in \mathbf{R} : \; k \in \mathbf{N}\}.$$

Podle předešlých zjištění tedy

$$0 = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \sum_{k=1}^{m} [F(x)]_{b_k},$$

případně

$$0 = \mathcal{P}[\mathbb{X} \in B] = \sum_{k=1}^{\infty} [F(x)]_{b_k},$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné proměnné $\mathbb{X}$. Odtud vidíme, že pro všechna přípustná k je hodnota $[F(x)]_{b_k}$ nulová, tj. distribuční funkce je ve všech bodech b_k spojitá. Navíc tedy $\mathcal{P}[\mathbb{X} = b_k] = 0$, což vzhledem k diskrétnosti náhodné proměnné $\mathbb{X}$ znamená, že žádná z hodnot $b_1, b_2, b_3, \ldots$ nemůže být výsledkem experimentu $\mathbb{X}$.

Pro spojité náhodné proměnné je ale situace mírně komplikovanější. Uvažujme opět, tak jako v oodílech 2.1.2 a 2.3.8 rovnoměrně rozdělenou náhodnou veličinu $\mathbb{X}$ popsanou distribuční funkcí

$$F(x) = \Theta(x-1)\cdot\Theta^\star(7-x)\cdot\frac{x-1}{6}.$$

Zvolíme-li číslo $a \in \mathbf{R}$ libovolně, vidíme, že díky spojitosti distribuční funkce platí

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = [F(x)]_a = \lim_{x \to a_+} F(x) - \lim_{x \to a_-} F(x) = 0.$$

To tedy značí, že pravděpodobnost, že výsledkem experimentu $\mathbb{X}$ bude hodnota a, je nulová. To ale platí pro úplně všechna $a \in \mathbf{R}$. Takže docházíme ke zdánlivě kontroverznímu faktu, že pro všechna $a \in \mathbf{R}$ je $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0$. Přitom je ale jasné, že losujeme-li čísla z intervalu $E = \langle 1, 7 \rangle$, může čas od času být výsledkem tohoto pokusu jakékoli číslo z tohoto intervalu. To nutně znamená, že výrok $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0$ neříká, že jev $\mathbb{X} = a$ je nemožný. Říká jen, že jeho četnost je v porovnání s jinými (rozsáhlejšími) jevy extrémně nízká. Tím se myslí toto.

Provedeme-li m opakovaných pokusů s toutéž náhodnou proměnnou $\mathbb{X}$ a zaznamenáme-li si do proměnné n počet všech případů, kdy byla výsledkem experimentu hodnota a, pak výraz n/m reprezentuje relativní četnost zkoumaného jevu. Protože číslo n závisí na počtu všech pokusů, píšeme $n = n(m)$. Relativní četnost

$$\varkappa(m) = \frac{n(m)}{m}$$

je tedy také funkcí celkového počtu pokusů. A protože je jasné, že se zvyšujícím se počtem pokusů bude relativní četnost $\varkappa(m)$ konvergovat k teoretické hodnotě pravděpodobnosti $\mathcal{P}[\mathbb{X} = a]$, vidíme, že

$$\lim_{m \to +\infty} \varkappa(m) = \lim_{m \to +\infty} \frac{n(m)}{m} = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a] = 0.$$

To tedy značí, že i když čas od času padne hodnota a, počet výskytů tohoto jevu je tak nízký, že podíl příznivých výsledků ku všem výsledkům klesá s počtem pokusů a limitně se (pro počet pokusů rostoucí nade všechny meze) blíží nule.

Tyto úvahy fakticky představují podstatu celé teorie pravděpodobnosti a my je zde bude postupně ještě rozvíjet.

Kapitola 3

Diskrétní náhodná proměnná a její charakteristiky

V této kapitole rozebereme základní vlastnosti diskrétních náhodných proměnných a vzájemné vazby mezi nimi. Upozorníme přitom na zajímavá specifika, která diskrétnost těchto proměnných přináší. Jelikož jsme se v předešlé kapitole ujistili, že distribuční funkce je univerzální popisný nástroj, který funguje spolehlivě jak pro spojité, tak pro diskrétní náhodné proměnné, není již třeba se k tomuto nástroji vracet. Rozebrali jsme ho totiž poměrně důkladně.

3.1 Pravděpodobnostní tabulka

Protože pro diskrétní náhodné proměnné je výběrový prostor buď konečněprvkový nebo nanejvýš spočetněprvkový, lze ho vždy uvádět v jednom ze tvarů

$$E = \{a_k \in \mathbf{R} : \ k = 1, 2, 3, \ldots, m\}, \qquad E = \{a_k \in \mathbf{R} : \ k \in \mathbf{N}\}.$$

A protože jevy $\{a_k\}$ jsou zcela jistě jevy elementární, pro kompletní řešitelnost příslušných pravděpodobnostních dotazů postačí stanovit, jaká je pravděpodobnost $\mathcal{P}[\mathbb{X} \in \{a_k\}] = \mathcal{P}[\mathbb{X} = a_k]$ všech těchto elemntárních jevů. K tomu tedy stačí určit tzv. **pravděpodobnostní tabulku,** v níž jsou v prvním sloupci vypsány všechny elementární jevy a ve druhém je stanovena jejich pravděpodobnost. Z této pravděpodobnostní tabulky lze pak jednoduše určit jak distribuční funkci, tak také další charakteristiky, o kterých bude pojednáno níže. Pravděpodobnostní tabulka může ale být pochopitelně, pokud to povaha náhodné proměnné dovoluje, nahrazena i úspornějším zápisem. Příkladem může být například již několikrát diskutovaná francouzská ruleta (viz sekce 1.1.1), jejíž pravděpodobnostní tabulka může být nahrazena kompaktní rovnicí

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = k] = \frac{1}{37}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 36).$$

3.2 Deskriptivní charakteristiky

Na rozdíl od distribuční funkce a pravděpodobnostní tabulky, které obě dávají kompletní přehled o chování náhodné proměnné, mnohem běžnějšími charakteristikami (zejména při řešení úloh z praxe, případně v populárních pojednáních) jsou číselné reprezentace náhodné proměnné. Tyto tzv. **deskriptivní charakteristiky** jsou typicky jednočíselnými údaji, které zhruba vystihují základní rysy zkoumaného jevu. Z těch nejznámější zde uveďme střední hodnotu, rozptyl (varianci), či směrodatnou odchylku.

3.2.1 Střední hodnota náhodné proměnné

Střední hodnotu náhodné proměnné definujeme vztahem

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) := \sum_{x \in E} x \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x], \tag{3.1}$$

pokud ovšem uvedená řada konverguje. To za určitých okolností nemusí být pravda. Všimněte si, že suma prochází všechny prvky výběrového prostoru a jejich velikost násobí (váží) příslušnou pravděpodobností. Vyšší váha je tedy definičním vztahem přisouzena těm hodnotám, jejíchž pravděpodobnost je vyšší. To tedy značí, že střední hodnotou rozumíme jakési statistické těžiště daného jevu, tj. jedinou optimálně vyváženou hodnotu, jíž lze nahradit velké množství realizací daného experimentu.

Už na začátku těchto úvah ale zmiňme, že jednou z výrazných a neustále opakovaných chyb, kterých se dopouští běžní civilisté, je zaměňování pojmu střední hodnota s pojmem aritmetický průměr. Hned na tomto místě si pojďme říci, že zatímco střední hodnota je teoretickou hodnotou odvozenou analytickými prostředky ze znalosti chování náhodné proměnné, tak k vyčíslení aritmetického průměru může dojít až po praktické realizaci daného experimentu. Bývá zvykem těchto n zaznamených výsledků (označme je například $x_1, x_2, \ldots, x_n$) nazývat **statistickým výběrem.** Z tohoto výběru lze pak snadno vyčíslit aritmetický průměr prostřednictvím banální rovnosti

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Teorie pravděpodobnosti ovšem nakonec prokáže (a my v těchto skriptech také) pevnou souvislost obou diskutovaných pojmů. Pro velký počet realizací, tj. pro n rostoucí nade všechny meze, konverguje totiž aritmetický průměr právě k teoretické střední hodnotě.

3.2.2 Úloha – průměrná hodnota

V jednom městě žijí rodiny s jedním, dvěma, třemi nebo čtyřmi dětmi. Rodin s jedním dítětem je 40%, rodin se dvěma dětmi je 30%, rodin s třemi dětmi je 20% a rodin se čtyřmi dětmi je 10%. Určete kolik dětí má průměrná rodina.

3.2.3 Momenty náhodné proměnné

Kromě střední hodnoty charakterizují analyzovanou náhodnou proměnnou také tzv. **statistické momenty.** Ty jsou zaváděny vztahem

$$\mu_k = \mathrm{E}(\mathbb{X}^k) := \sum_{x \in E} x^k \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

který je zobecněním vztahu (3.1). Předpokládá se, že k je přirozené číslo nebo nula. Přitom ale pro $k = 0$ je bez ohledu na zvolenou náhodnou proměnnou nultý moment roven vždy jedné. De facto se jedná o potvrzení správné normalizace pravděpodobnosti, tj prokázání rovnosti $\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = 1$. Prvním momentem je pak právě střední hodnota. O těchto typech momentů se někdy mluví jako o **momentech necentrálních.**

Vedle nich existují ještě **momenty centrální,** které zkoumají chování odchylek $(x - \mu_1)^k$ od střední hodnoty $\mu_1 = \mathrm{E}(\mathbb{X})$. Ty jsou definovány vztahem

$$\varkappa_k := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^k \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

pokud tedy řada na pravé straně konverguje.

3.2.4 Úloha – vztahy centrálních a necentrálních momentů

Ukažte, že ze znalosti momentů $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ může být dopočten centrální moment $\varkappa_m$.

3.2.5 Rozptyl a směrodatná odchylka

Druhý centrální moment

$$\varkappa_2 := \sum_{x \in E} (x - \mu_1)^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x],$$

má v teorii i praxi pravděpodobnosti naprosto zásadní postavení. Kvantifikuje totiž míru rozptýlení jednotlivých realizací náhodné proměnné kolem příslušné střední hodnoty. Liší-li se výsledky experimentu od střední hodnoty jen nepatrně, je ropztyl malý a naopak. Dvě náhodné proměnné se stejnou střední hodnotou se totiž mohou exrémně odlišovat právě hodnotou ropztylu. Jednoduchou matematickou úpravou lze (v analogii k předešlé úloze) ukázat, že

$$\varkappa_2 = \sum_{x \in E} x^2 \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] - 2\mu_1 \sum_{x \in E} x \cdot \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] + \mu_1)^2 \sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] =$$

$$\mu_2 + \mu_1^2 = \mathrm{E}(\mathbb{X}^2) - \mathrm{E}^2(\mathbb{X}).$$

Rozptyl náhodné proměnné označujeme jedním ze symbolů $\mathrm{D}(\mathbb{X})$, případně $\mathrm{VAR}(\mathbb{X})$. My se v těchto skriptech přidržíme prvního ze symbolů. Zkratka druhého ze symbolů je odvozena z anglického překladu slova ropztyl, tj. variance. Odmocninu z rozptylu pak nazýváme **směrodatnou odchylkou** náhodné proměnné (anglicky: standard deviation) a značíme $\mathrm{SD}(\mathbb{X}) = \sqrt{\mathrm{D}(\mathbb{X})}$.

3.2.6 Úloha – stanovení střední hodnoty a rozptylu

Pro náhodnou proměnnou, jejíž pravděpodobnostní popis je zadán tabulkou

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$B_1 = \{1\}$	$\mathcal{P}[B_1] = \frac{1}{10}$
$B_2 = \{2\}$	$\mathcal{P}[B_2] = \frac{1}{10}$
$B_3 = \{3\}$	$\mathcal{P}[B_3] = \frac{5}{10}$
$B_4 = \{4\}$	$\mathcal{P}[B_4] = \frac{1}{10}$
$B_5 = \{5\}$	$\mathcal{P}[B_5] = \frac{1}{10}$
$B_6 = \{6\}$	$\mathcal{P}[B_6] = \frac{1}{10}$

vypočítejte střední hodnotu a rozptyl.

3.3 Frekventovaná diskrétní rozdělení

V této sekci představíme několik diskrétních rozdělení, která se velice často objevují v empirických či experimentálních systémech.

3.3.1 Alternativní (Bernoulliho) rozdělení

Jedním z nejjednodušších a všeobecně známých rozdělení je **alternativní (Bernoulliho) rozdělení.** Typickým příkladem jevu, který se řídí tímto rozdělením, je házení mincí. Pravděpodobnost každého ze dvou možných výsledků (panna, orel) je totiž konstantní při každém hodu a parametrem q je pak popsán například výsledek $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p]$, tj. $\mathcal{P}[\mathbb{X} = p] = q$, z čehož ihned plyne, že $\mathcal{P}[\mathbb{X} = o] = 1 - q$. Dalšími příklady bernoulliovsky rozdělených náhodných veličin jsou testy, zda je konkrétní výrobek vadný či ne, odpověď člověka na otázku, zda souhlasí s určitým tvrzením (ano/ne), případně test, zda je daný pacient zdravý či nemocný.

Řídí-li se náhodná proměnná $\mathbb{X}$ tímto rozdělením, zapisujeme to symbolicky takto: $\mathbb{X} \sim A(q)$, kde $q \in (0, 1)$ je parametr rozdělení. Tabulková podoba rozdělení je následující:

Elementární jev	Jeho pravděpodobnost
$\mathbb{X} = 1$	$\mathcal{P}[\mathbb{X} = 1] = q$
$\mathbb{X} = 0$	$\mathcal{P}[\mathbb{X} = 0] = 1 - q$

přičemž hodnoty 0, 1 mohou zastupovat i nečíselné hodnoty, tj. například 0 = zdravý, 1 = nemocný. Není těžké ukázat, že

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = q, \qquad \mathrm{D}(\mathbb{X}) = q(1 - q).$$

3.3.2 Úloha – distribuční funkce alternativního rozdělení

Vykreslete distribuční funkci alternativního rozdělení s parametrem $q = 0.25$.

3.3.3 Binomické rozdělení

Právě probrané rozdělení je vlastně speciálním případem **binomického rozdělení**, které popisuje četnost výskytu náhodného jevu v n na sobě nezávislých pokusech, během nichž má daný jev v čase neměnnou pravděpodobnost. Tato četnost (chápaná jako diskrétní náhodná veličina) tedy může nabývat celočíselných hodnot od nuly po n, což značí, že příslušným výběrovým prostorem je množina $E = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$. Není těžké odvodit, že pravděpodobnost, že daný jev nastane právě x–krát z n pokusů tj. že $\mathbb{X} = x$, je popsána vztahem

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x}.$$

Tento vztah plyne z faktu, že možností, kterak vybrat $x$tici úspěšných pokusů z n možných, je právě $\binom{n}{x}$, a že má-li být x nezávislých pokusů úspěšných, pak musí být právě $n - x$ pokusů neúspěšných. A pravděpodobnosti nezávislých jevů se, jak známo, násobí. Povšimněte si, že poslední vztah je korektně normalizován, protože

$$\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x} = (q + 1 - q)^n = 1.$$

To, že je proměnná $\mathbb{X}$ binomicky rozdělena, zapisujeme symbolem $\mathbb{X} \sim Bi(n, q)$, kde $q \in (0, 1)$ a $n \in \mathbf{N}$ jsou parametry rozdělení.

Střední hodnotu binomického rozdělení lze pak určit následujícím výpočtem:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} q^x (1 - q)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x - 1)!(n - x)!} q^x (1 - q)^{n-x},$$

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = nq\sum_{y=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!}q^y(1-q)^{n-1-y} = nq(q+1-q)^{n-1} = nq.$$

3.3.4 Úloha – rozptyl binomického rozdělení

Analogickou cestou, která byla předvedena v posledním odvození, vypočítejte druhý moment binomického rozdělení a z něj ukažte, že pro hodnotu rozptylu platí $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = nq(1-q)$.

3.3.5 Uniformní rozdělení

Většina startovních úloh na diskrétní pravděpodobnost pracuje, aniž by si to možná jejich řešitel explicitně uvědomoval, s rozděleními, kdy mají všechny elementární jevy totožnou pravděpodobnost. Hovoříme o **rovnoměrně (uniformně) rozdělené náhodné proměnné**. Sem spadají hody kostkou či mincí, ruleta, losování čísel sportky a podobně. Obecně řečeno se jedná o případy, kdy je výběrový prostor konečný, tj. $E = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, a pravděpodobnostní tabulka je nahrazena jediným vztahem, a sice

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Střední hodnotou takto rozdělené náhodné proměnné je hodnota

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=1}^{m} x\cdot\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m}\sum_{x=1}^{m} x = \frac{1}{m}\frac{m}{2}(1+m) = \frac{m+1}{2}$$

odpovídající středu intervalu $\langle 1, m\rangle$. A protože $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$, má druhý moment velikost

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \sum_{x=1}^{m} x^2\cdot\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{1}{m}\sum_{x=1}^{m} x^2 = \frac{1}{m}\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) = \frac{(m+1)(2m+1)}{6},$$

odkud pak dostáváme, že rozptylem rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné je hodnota

$$\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{m^2-1}{12}.$$

3.3.6 Úloha – pomocný vztah

Pokuste se přímým výpočtem a poté i matematickou indukcí prokázat platnost vztahů

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1).$$

3.3.7 Geometrické rozdělení

Jedním z klasických příkladů diskrétního rozdělení je rozdělení, které popisuje, kolik nezdarů musí nastat, než se v sérii nezávislých Bernoulliho pokusů dostaví první úspěšný pokus. Tyto pokusy, kde úspěch $\mathbb{X} = 1$ nastává s pravděpodobností q a neúspěch $\mathbb{X} = 0$ s pravděpodobností $1-q$, nám umožňují odpovědět na otázky typu „Kolikrát musíte hodit mincí, než padne panna?“ nebo „Jaká je šance, že hráč rulety osmkrát v řadě vsadí na červenou a stále je neúspěšný?“ Tento typ rozdělení nabízí nejen zajímavé výpočty, ale také hlubší pohled do strategie hazardních her.

V matematice o tomto rozdělení hovoříme jako o **geometrickém rozdělení** s parametrem $q \in (0,1)$. Příslušnost náhodné proměnné $\mathbb{X}$ k tomuto rozdělení symbolicky zapisujeme výrazem $\mathbb{X} \sim Geo(q)$. Pravděpodobnostní funkce tohoto rozdělení je tvaru

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = q(1-q)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Snadno nahlédneme, že

$$\sum_{x \in E} \mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \sum_{x=0}^{\infty} q(1-q)^x = q\frac{1}{1-(1-q)} = 1,$$

kde jsem využili vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \tag{3.2}$$

pro součet geometrické řady s kvocientem $a \in (-1,1)$. Střední hodnotu tohoto rozdělení pak získáme následujícím postupem. Nejprve použijeme rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}, \tag{3.3}$$

která vznikla derivací vzorce (3.2). Její lehkou úpravou obdržíme vztah

$$\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)a^m = \sum_{m=0}^{\infty} ma^m + \sum_{m=0}^{\infty} a^m = \sum_{m=0}^{\infty} ma^m + \frac{1}{1-a},$$

odkud pak vidíme, že

$$\sum_{m=0}^{\infty} ma^m = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}$$

To pak zužitkujeme ve finálním odvození tvaru střední hodnoty

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \sum_{x=0}^{\infty} xq(1-q)^x = q\frac{1-q}{(1-(1-q))^2} = \frac{1-q}{q}.$$

3.3.8 Úloha – rozptyl geometrického rozdělení

Ukažte, že rozptyl geometrického rozdělení má hodnotu $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \frac{1-q}{q^2}$.

3.3.9 Poissonovo rozdělení

Mezi diskrétními rozděleními má privilegované postavení tzv. **Poissonovo rozdělení,** jehož výskyt v aplikačních úlohách je velice častý. Toto rozdělení totiž správně modeluje počet výskytů určitých událostí v daném časovém intervalu nebo v určité podoblasti prostoru. To vše ovšem za předpokladu, že se pozorovaná událost vyskytuje náhodně a nezávisle na ostatních výskytech, což znamená, že výskyt jedné události neovlivňuje pravděpodobnost výskytu další události. Příkladem náhodných proměnných, které se tímto rozdělením řídí, jsou ku příkladu:

- Počet zákazníků přicházejících do obchodu za hodinu, pokud je intenzita příchodů relativně stabilní v čase.
- Počet dopravních nehod na určité křižovatce během jednoho dne.

- Počet poruch zařízení během určitého časového úseku (například selhání komponent v serverové místnosti).
- Počet překlepů v určitém množství textu, pokud překlepy vznikají náhodně.
- Počet telefonních hovorů přijatých na zákaznické lince za minutu.
- Počet mutací v určitém úseku DNA za jednotku času.

Poissonovo rozdělení je tedy velmi užitečné pro modelování událostí, které se vyskytují nezávisle a náhodně, ale s určitou stabilní intenzitou v čase nebo prostoru. Jeho kvantitativní podoba je následující:

$$\mathcal{P}[\mathbb{X} = x] = \frac{\lambda^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.4}$$

Poissonovsky rozdělenou náhodnou proměnnou označujeme symbolem $\mathbb{X} \sim Poi(\lambda)$, kde $\lambda > 0$ je parametr reprezentující, jak bude patrno z výpočtu střední hodnoty, tzv. **intenzitu procesu.** Správnou normalizaci vztahu (3.4) lze jednoduše prokázat na základě znalosti Maclaurinova rozvoje

$$\mathrm{e}^{ay} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} y^n, \quad y \in \mathbf{R}$$

exponeciální funkce. Chceme-li vypočítat střední hodnotu poissonovsky rozdělené náhodné veličiny, lze to udělat takto:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} =$$

$$= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda.$$

Pro druhý moment lze pak postupovat podobně. Konkrétně takto:

$$\mathrm{E}(\mathbb{X}^2) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=1}^{\infty} (x-1) \frac{\lambda^x}{(x-1)!} + \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} + \mathrm{E}(\mathbb{X}) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1).$$

A proto je teoretickým rozptylem náhodné veličiny $\mathbb{X} \sim Poi(\lambda)$ číslo $\mathrm{D}(\mathbb{X}) = \lambda$.

3.3.10 Úloha – třetí moment Poissonova rozdělení

Vypočítejte třetí moment Poissonova rozdělení.