Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze		1	2	3	4	5	6	CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící							

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze A

31. října 2023 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (8 bodů)
Rozhodněte, zda posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx \operatorname{arctg}(n)}{(8n^2 + x^2)^{3/2}}$$

konverguje na množině všech reálných čísel stejnoměrně.

2 (6 bodů)
Cauchyova úloha k diferenciální rovnici $\hat{L}(y(x)) = q(x)$ je zadána podmínkami $y(1) = 1$ a $y'(1) = 3$. Nalezněte její řešení, víte-li, že tuto rovnici řeší tři funkce

$$u(x) = 1 + x + x^2 + x^4, \quad w(x) = 1 + x + 2x^2 + x^4, \quad z(x) = 1 + x + x^2 + 2x^4.$$

Dále určete wronskián fundamentálního systému zadané rovnice.

3 (6 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(3n+1)!!!} (x-2)^n.$$

4 (9 bodů)
Rozhodněte, zda je Weierstrassovo kritérium účinným nástrojem při zkoumání stejnoměrné konvergence řady funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!!!}{(3n+2)!!!} \frac{x^2}{\sqrt{2x^6 + n^6}}$$

na množině $\mathbf{R}$.

5 (5 bodů)
Pro jaké $x \in \mathbf{R}$ nabývá součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(3n)!!!} x^{2n+3}$$

nejnižší hodnoty?

6 (6 bodů)
Řešte rovnici

$$-3x^3 y + xy' + 2y = x\,\mathrm{e}^{x^3 - x}.$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-1, 1\rangle$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n \quad \& \quad \mathcal{O} = \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{pro } \beta \in \mathbf{N}_0 \\ \langle -1, 1\rangle & \text{pro } \beta \in (0, +\infty) \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1\rangle & \text{pro } \beta \in (-1, 0) \\ (-1, 1) & \text{pro } \beta \leqslant -1 \end{cases}$$