Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze							
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6

CELKEM

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze A

29. října 2024, 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (4 body)
Nalezněte limitní funkci posloupnosti, jejíž n–tým členem je funkce

$$g_n(x) = n^2\left(1 - \cos^4(x/n) + \sin^4(x/n)\right).$$

2 (9 bodů)
Nalezněte hodnotu limity

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

3 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(4n-1)!!!!}\frac{x^n}{2n-1}.$$

4 (6 bodů)
Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy $\hat{L}(y(x)) = q(x)$, $y(0) = -5$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 5$, víte-li, že

- $[x^2, \mathrm{e}^x]_\lambda \subset\subset \Omega_0$;
- $[\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^{-2x}]_\lambda \subset\subset \Omega_0$;
- $3x \in \Omega_q$.

5 (9 bodů)
Lze nebo nelze Weierstrassovým kritériem rozhodnout o stejnoměrné konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x^2-1)^{2n}}{\sqrt{n}\cdot 9^n}$$

na intervalu $I = (-1, 2)$?

6 (5 bodů)
Konverguje Maclaurinova řada funkce $g(x) = x(1-2x)^{-1}$ na svém oboru konvergence stejnoměrně?

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-1, 1\rangle$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n \quad \& \quad \mathcal{O} = \begin{cases} (-\infty, +\infty) & \text{pro } \beta \in \mathbf{N}_0 \\ \langle -1, 1\rangle & \text{pro } \beta \in (0, +\infty) \setminus \mathbf{N} \\ (-1, 1\rangle & \text{pro } \beta \in (-1, 0) \\ (-1, 1) & \text{pro } \beta \leqslant -1 \end{cases}$$

Katedra matematiky Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze								CELKEM
Jméno a příjmení	Cvičící	1	2	3	4	5	6	

Zápočtová práce č. 1 z předmětu 01ANB3 – verze B

29. října 2024, 10:00 — 11:40

V záhlaví vyplňte své jméno a jméno cvičícího!

1 (10 bodů)
Zjistěte, pro které nezáporné x je součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^2}{n!}x^n$$

nejmenší. A jaká je tato nejmenší hodnota?

2 (7 bodů)
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{(4n+1)!!!!\cdot(3n-1)}\,x^n.$$

3 (6 bodů)
Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy $\hat{L}(y(x)) = q(x)$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = -3$, víte-li, že

- $[x^2, \mathrm{e}^{-x}, x^2 + \mathrm{e}^{-x}]_\lambda \subset\subset \Omega_0$;
- $3\cos(2x) \in \Omega_q$.
- $[4x^2, x\mathrm{e}^{2x}]_\lambda \subset\subset \Omega_0$;

4 (9 bodů)
Rozhodněte, zda na intervalu $(-1, 1)$ platí rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sqrt{x^2+n}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sqrt{x^2+n}\right)'.$$

Podrobně zdůvodněte!

5 (4 body)
Nalezněte limitní funkci posloupnosti, jejíž n−tým členem je funkce

$$f_n(x) = n^2\left(1-\cos^4(x/n)+\sin^4(x/n)\right).$$

6 (4 body)
Jaký tvar a jaký obor konvergence má Maclaurinova řada funkce $h(x) = \ln(1+3x)$?

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-1, 1\rangle$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arcsin(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \& \quad \mathcal{O} = \langle -1, 1\rangle$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \& \quad \mathcal{O} = (-\infty, +\infty)$$

$$(1+x)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} x^n \quad \& \quad \mathcal{O} = \begin{cases} (-\infty, +\infty) \text{ pro } \beta \in \mathbf{N}_0 \\ \quad \langle -1, 1\rangle \quad \text{pro } \beta \in (0, +\infty) \setminus \mathbf{N} \\ \quad (-1, 1\rangle \quad \text{pro } \beta \in (-1, 0) \\ \quad (-1, 1) \quad \text{pro } \beta \leqslant -1 \end{cases}$$